

УДК: 519.6+523.68

## Моделирование полета осколков метеорного тела с учетом вращения

В. Т. Лукашенко<sup>a</sup>, Ф. А. Максимов<sup>b</sup>

Институт автоматизации проектирования РАН,  
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

E-mail: <sup>a</sup> lukashenko-vt@yandex.ru, <sup>b</sup> f\_a\_maximov@mail.ru

*Получено 16.03.2017, после доработки — 14.06.2019.*

*Принято к публикации 02.07.2019.*

Алгоритм решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач, разработанный на основе метода моделирования с помощью системы сеток, дополнен расчетным механизмом, позволяющим учитывать перемещение и вращение тел относительно центров масс. Для заданной конфигурации тел решается задача обтекания методом установления, после этого состояние системы перерасчитывается через малый промежуток времени. Итерационным способом оказывается возможным проследить динамику системы на больших интервалах времени. Алгоритм реализован для исследования полета системы тел с учетом их относительного положения и вращения. Выполнено тестирование алгоритма на задаче обтекания тела сегментально-конической формы. Показано хорошее согласование результатов с экспериментальными исследованиями. Алгоритм применен для расчета задачи о сверхзвуковом полете вращающегося тела. Для тел прямоугольной формы, имитирующих удлиненные осколки метеорного тела, показано, что для удлиненных тел аэродинамически более устойчивым положением является полет с большей по площади стороной поперек направления полета. Это приводит фактически к полету тел с максимально возможным аэродинамическим сопротивлением из-за максимальной площади миделя. Алгоритм применен для расчета задачи о разлете двух одинаковых тел прямоугольной формы с учетом их вращения. Вращение приводит к тому, что тела разлетаются не только под действием расталкивающей аэродинамической силы, но и дополнительной боковой силы из-за приобретения угла атаки. Скорость разлета двух осколков метеорного тела удлиненной формы при учете вращения увеличивается до трех раз по сравнению с вариантом, когда предполагается, что тела не вращаются. Исследование проведено в целях оценки влияния различных факторов на скорость разлета осколков метеорного тела после разрушения для построения возможных траекторий выпавших на землю метеоритов. Разработанный алгоритм решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач с учетом относительного перемещения и вращения тел может быть использован для решения технических задач, например для исследования динамики разделения ступеней летательного аппарата.

Ключевые слова: моделирование, метеорное тело, аэродинамические характеристики, динамика полета, фрагментация, интерференция, траектория, вращение

UDC: 519.6+523.68

## Modeling the flight of meteoroid fragments with accounting for rotation

V. T. Lukashenko<sup>a</sup>, F. A. Maksimov<sup>b</sup>

Institute for Computer Aided Design,  
19/18 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: <sup>a</sup> lukashenko-vt@yandex.ru, <sup>b</sup> f\_a\_maximov@mail.ru

*Received 16.03.2017, after completion — 14.06.2019.*

*Accepted for publication 02.07.2019.*

An algorithm for solving the conjugation of aerodynamic and ballistic problems, which is based on the method of modeling with the help of a grid system, has been complemented by a numerical mechanism that allows to take into account the relative movement and rotation of bodies relative to their centers of mass. For a given configuration of the bodies a problem of flow is solved by relaxation method. After that the state of the system is recalculated after a short amount of time. With the use of iteration it is possible to trace the dynamics of the system over a large period of time. The algorithm is implemented for research of flight of systems of bodies taking into account their relative position and rotation. The algorithm was tested on the problem of flow around a body with segmental-conical form. A good correlation of the results with experimental studies was shown. The algorithm is used to calculate the problem of the supersonic flight of a rotating body. For bodies of rectangular shape, imitating elongated fragments of a meteoroid, it is shown that for elongated bodies the aerodynamically more stable position is flight with a larger area across the direction of flight. This de facto leads to flight of bodies with the greatest possible aerodynamic resistance due to the maximum midship area. The algorithm is used to calculate the flight apart of two identical bodies of a rectangular shape, taking into account their rotation. Rotation leads to the fact that the bodies fly apart not only under the action of the pushing aerodynamic force but also the additional lateral force due to the acquisition of the angle of attack. The velocity of flight apart of two fragments with elongated shape of a meteoric body increases to three times with the account of rotation in comparison with the case, when it is assumed that the bodies do not rotate. The study was carried out in order to evaluate the influence of various factors on the velocity of fragmentation of the meteoric body after destruction in order to construct possible trajectories of fallen on earth meteorites. A developed algorithm for solving the conjugation of aerodynamic and ballistic problems, taking into account the relative movement and rotation of the bodies, can be used to solve technical problems, for example, to study the dynamics of separation of aircraft stages.

Keywords: modeling, meteoroid, aerodynamic characteristics, flight dynamics, fragmentation, interference, trajectory, rotation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 593–612 (Russian).

## Введение

При полете в атмосфере метеорное тело постепенно разрушается под действием увеличивающегося скоростного напора и теплового нагрева [Григорян, 1979; Андрущенко и др., 2013; Turchak, Gritsevich, 2014]. В результате из единого тела может образовываться сложная система из фрагментов, и аэродинамические свойства тел в такой системе могут значительно отличаться от аэродинамических свойств тел аналогичной геометрии, но обтекаемых изолированно. Задачу о моделировании динамики таких систем (каждого фрагмента в отдельности и системы в среднем) необходимо решать с учетом влияния тел друг на друга [Voiko et al., 2004].

Образующаяся в результате разрушения тела конфигурация фрагментов в общем случае неизвестна [Ждан и др., 2005], однако может быть оценена для конкретных тел [Vorošička et al., 1998; Vorošička, Kalenda, 2003; Vorošička et al., 2013]. В частных случаях, например при разрушении тела на два фрагмента сферической формы, выбор возможных относительных положений тел может быть определен [Барри, 2010b]. Исследование движения системы можно разбить на два этапа: 1) определение аэродинамических характеристик тел для всевозможных относительных положений; 2) решение задачи динамики с учетом взаимного влияния. Оценка аэродинамических свойств тел при этом может быть сделана с помощью экспериментальных исследований в аэродинамических трубах [Петров, 1998; Ковалев, Менде, 2011; Хлебников, 2014] или методами вычислительной аэродинамики [Андреев, Холодов, 1989; Ждан и др., 2004; Максимов, 2006].

В большинстве случаев метеорное тело и его фрагменты представляются телами малого удлинения, приближенно соответствующими сфере [Барри, 2005; Стулов, 2008]. Данная форма является аэродинамически нейтральной, и в случае моделирования фрагментов сферическими телами исследуются коэффициенты аэродинамического сопротивления и боковой силы, обусловленной эффектами интерференции. В реальности при фрагментации могут образовываться формы, существенно отличающиеся от сферы и создающие при повороте на угол атаки значительную боковую силу, которая будет определять полет фрагментов метеорного тела. Для оценки возможных значений коэффициента аэродинамического сопротивления исследуются форма прямоугольного бруса и форма плиты [Ждан и др., 2007; Грицевич, 2008]. Прямоугольная форма, в отличие от сферической, кроме различающихся коэффициентов сопротивления и подъемной силы обладает моментом тангажа, т. е. в зависимости от угла атаки для данной формы образуется момент тангажа, приводящий к вращению данной формы при полете в атмосфере.

При решении задачи о движении тел в газовой среде существует несколько подходов [Грязев, Могильников, 2017]: экстраполяция газодинамических параметров в ячейках, освобожденных в процессе перемещения границ твердых тел; использование локальных подвижных сеток; метод деформируемых дробных ячеек. В частности, широкое распространение получили пакеты моделирования FlowVision [Аксенов, 2017] и Gas Dynamics Tool [Зибаров, 2000] с использованием сеток из произвольных многогранников [Дерюгин и др., 2017].

Авторами [Лукашенко, Максимов, 2017] был разработан и реализован метод решения сопряженной задачи с учетом относительного перемещения тел, когда аэродинамическая и баллистическая задачи решаются параллельно. В этом случае наиболее трудоемкая аэродинамическая задача решается только для тех вариантов состояния системы, которые реализуются в полете. Дополнительным преимуществом такого подхода является учет нестационарности реального полета. Пример исследования динамики двух тел с помощью решения сопряженной задачи можно найти в [Барри, 2010a]. Исходя из текущей конфигурации, рассматривается задача об обтекании системы тел и определяются аэродинамические свойства каждого отдельного тела. Затем скорости и координаты тел изменяются в соответствии с имеющимися скоростями и действующими на тела силами.

Для моделирования задачи обтекания применяется система сеток [Максимов, 2013]. Строится сетка с постоянным шагом по пространству, на которую накладываются дополнительные

сетки, связанные с обтекаемыми телами. Преимуществом подобного подхода при моделировании является возможность рассматривать обтекание тел различных размеров и форм в достаточно произвольной конфигурации. В работе [Лукашенко, Максимов, 2017] алгоритм решения сопряженной задачи применен для моделирования ряда задач по разлету двух одинаковых тел. Произведено тестирование алгоритма на задаче о разлете двух круговых цилиндров на разных сверхзвуковых скоростях. Рассмотрено, как форма тел может оказывать влияние на скорость разлета, получены необходимые коэффициенты для расчета скорости разлета тел эллиптического и прямоугольных сечений в зависимости от их удлинения. Но при решении задачи предполагалось, что тела не вращаются. Целью данной работы является исследование момента тангажа форм малого удлинения, используемых для моделирования фрагментов метеорного тела, моделирование сопряженной задачи с учетом вращения и оценка влияния возможного вращения фрагментов не сферической формы на скорость разлета. В работе рассматриваются только газодинамические аспекты разлета тел в рамках традиционного подхода баллистики метеорных тел [Стулов и др., 1995].

## Метод моделирования течения

Для моделирования течения используется система сеток. Для описания внешнего невязкого поля течения используется равномерная по пространству сетка в виде прямоугольных ячеек. Данная сетка не адаптируется под решение и при весьма ограниченном количестве узлов, применяемых в реальных расчетах сеток, строго говоря, не может позволить описать физические диссипативные процессы в следе. Использование уравнений Навье–Стокса на данной сетке не может быть обоснованным. При численном моделировании течения на этой сетке применяются уравнения Эйлера (диссипативный член полагается равным нулю), а для сглаживания решения используется схемная вязкость. На данную сетку, покрывающую всю рассматриваемую область течения, накладывается набор сеток, моделирующих течение около поверхности обтекаемых тел. Данные сетки связаны с поверхностью обтекаемых тел и строятся только в некоторой их окрестности, предназначены они для учета формы элементов проницаемой поверхности. Моделирование на этих сетках может быть как в рамках уравнений Эйлера, так и в рамках уравнений Навье–Стокса. По причинам, описанным выше, а также в [Zarei et al., 2011; Максимов, 2013; Гувернюк, Максимов, 2016], используются уравнения Навье–Стокса в приближении тонкого слоя. В рамках данной модели учитываются все члены уравнений Эйлера, а при вычислении диссипативного члена согласно теории пограничного слоя учитываются только вторые производные по нормали к поверхности тела. Такой подход обусловлен, с одной стороны, ограниченными вычислительными ресурсами, а с другой — оценкой составляющих диссипативного члена в рамках теории пограничного слоя. Так как при аэродинамическом проектировании обычно представляют интерес задачи при больших числах Рейнольдса, то теория пограничного слоя и ее оценки актуальны и для рассматриваемых задач.

Рассматривается двумерная плоская задача. Это связано с неприемлемо большими вычислительными ресурсами в случае использования трехмерной модели. Но основные качественные особенности аэродинамического взаимодействия тел при полете в системе и динамики полета этой системы могут предварительно изучаться на основе значительно менее трудоемкой с точки зрения вычислительных затрат двумерной модели. Расчеты показывают, что аэродинамические силы при обтекании двух сфер и двух цилиндров качественно и количественно хорошо согласуются, по крайней мере, при небольшом удалении друг от друга (см. пример аэродинамических сил на сферы и цилиндры, приведенный в [Максимов, 2013]). В простых, небольших по количеству тел, системах можно выделить плоскость, в которой происходят основные эффекты аэродинамического взаимодействия, и именно в этой плоскости рассматриваются течение и динамика.

Нестационарные уравнения Навье–Стокса в приближении тонкого слоя для двумерного плоского течения сжимаемого газа в безразмерной форме в криволинейной системе координат

$\xi = \xi(x, y)$ ;  $\eta = \eta(x, y)$  имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} J + \frac{\partial \xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F}}{\partial \xi} J + \frac{\partial \eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F}}{\partial \eta} J = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \eta} J,$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{\mu}{\text{Re}} \begin{Bmatrix} 0 \\ m_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + m_2 \eta_x \\ m_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + m_2 \eta_y \\ m_3 \end{Bmatrix},$$

$$m_1 = \eta_x^2 + \eta_y^2, \quad m_2 = \frac{1}{3} \left[ \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right], \quad m_3 = m_1 \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{u^2 + v^2}{2} \right] + m_2 [\eta_x u + \eta_y v].$$

Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $(u, v)$  — составляющие вектора скорости  $\mathbf{V}$  соответственно в направлениях  $(x, y)$  декартовой системы координат,  $p$  — давление,  $e$  — полная энергия единицы объема газа, которая для совершенного газа может быть представлена в виде

$$e = \rho \left( \varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \text{ — внутренняя энергия газа, } \gamma \text{ — показатель адиабаты.}$$

Безразмерные переменные определены через размерные, которые обозначены штрихом «'», следующим образом:

$$t = \sqrt{\frac{p'_o}{\rho'_o}} \frac{t'}{L'}, \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}'}{L'}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\frac{\rho'_o}{p'_o}} \mathbf{V}', \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_o}, \quad p = \frac{p'}{p'_o}, \quad T = \frac{T'}{T'_o}, \quad \mu = \frac{\mu'}{\mu'_o}.$$

Нижний индекс «o» — означает значение параметра в невозмущенном потоке. Здесь  $L'$  — характерный размер,  $\mathbf{X} = (x, y)$ ,  $\mathbf{V} = (u, v)$ .

Предполагается, что число Прандтля  $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$  постоянно; здесь  $c_p$  — коэффициент теплоемкости,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\mu$  — коэффициент вязкости.  $\text{Re} = \frac{\sqrt{p'_o \rho'_o} L'}{\mu'_o}$  —

число Рейнольдса. Систему дифференциальных уравнений дополняет уравнение состояния:  $p = \rho RT$ , где  $T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная. В безразмерном виде уравнение состояния имеет вид  $p = \rho T$ .

Коэффициенты матрицы преобразования могут быть вычислены по следующим формулам:  $\xi_x = J \frac{\partial y}{\partial \eta}$ ,  $\xi_y = -J \frac{\partial x}{\partial \eta}$ ,  $\eta_x = -J \frac{\partial y}{\partial \xi}$ ,  $\eta_y = J \frac{\partial x}{\partial \xi}$ . Здесь  $J$  — якобиан преобразования, который определяется по формуле  $J^{-1} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ . Использование обобщенного преобразования позволяет построить равномерную сетку в виде единичного квадрата. Коэффициенты матрицы преобразования при заданном распределении узлов в физической области вычисляются с использованием центральных разностей.

При выводе приведенной системы уравнений предполагается, что координатные линии  $\xi = \text{const}$  ориентированы по нормали к поверхности тела и производные по направлению  $\eta$  фактически соответствуют производным вдоль локальных нормалей к поверхности тела. Это

обеспечивает, что при вычислении диссипативного члена учитываются вторые производные по нормали к поверхности тела.

На рис. 1, а приведен пример фрагмента внешней расчетной сетки с равномерными прямоугольными ячейками с наложенной на нее областью тела в виде квадрата со скругленными кромками и контура внешней границы сетки около тела.

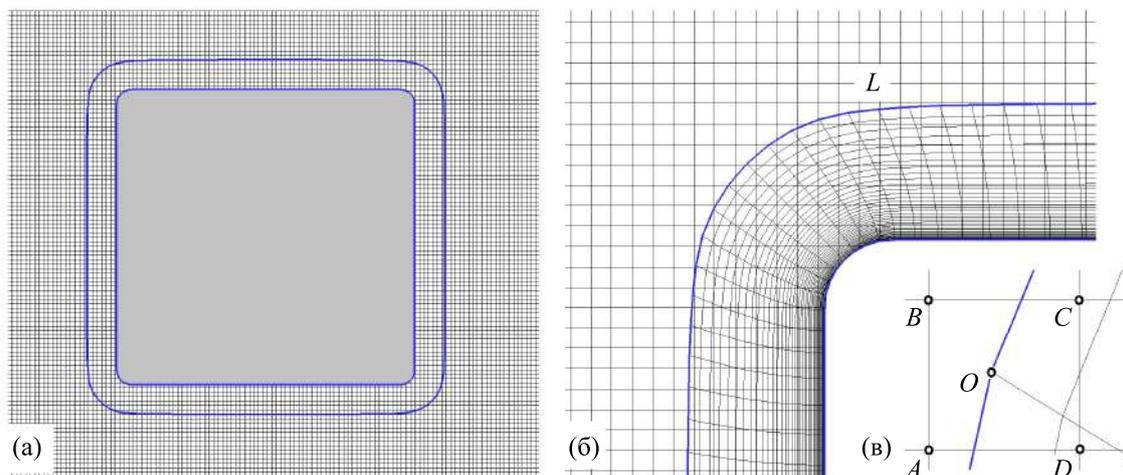


Рис. 1. Построение расчетной сетки вокруг квадрата с округленными кромками: а) общий вид; б) область у кромки; в) расположение узлов сеток в ячейках

На рис. 1, б в увеличенном масштабе приведен фрагмент области расчета около скругленной кромки тела с сеткой. В данном случае сетка около тела с контуром в виде квадрата со скругленными кромками построена с помощью конформного отображения. В начале строятся координатные линии  $\xi = \text{const}$  (конформное отображение обеспечивает ортогональность этих линий к контуру тела), а затем вдоль этих линий с помощью экспоненциального сгущения составляются узлы сетки с учетом задаваемых минимального расстояния между узлом на теле и ближайшего к телу и расстояния от тела до внешней границы расчетной области. При рассмотрении обтекания системы тел на внешнюю расчетную сетку накладывается набор тел, около каждого из которых строится соответствующая криволинейная сетка. Алгоритм расчета на внешней сетке и около каждого из тел одинаков.

Решение получается методом установления. Используется явная схема второго порядка аппроксимации [Максимов и др., 2011]. Особенностью расчетов по многоблочной технологии является интегрирование с общим шагом по времени на внешней расчетной сетке, т. е. выбирается минимальный шаг интегрирования по времени из условия устойчивости по всей области расчета. Это не является существенным ограничением, так как сетка равномерная. А при интегрировании на сетках около тел используется локальный шаг по времени, т. е. в каждом узле расчетной сетки шаг по времени выбирается из местных условий. Это обеспечивает более быстрое распространение возмущений, а следовательно, и установление. Чтобы решения на внешней сетке и сетках около тел связать в единое целое, после выполнения шага интегрирования значения газодинамических функций на внешней границе  $L$  сетки около тела путем интерполяции определяются из решения, получаемого на внешней сетке. Так как используется двухшаговая разностная схема [Максимов и др., 2011], то аналогичная процедура выполняется и для соседнего с границей  $L$  слоя узлов. В то же время решение во всех узлах внешней сетки, попадающих внутрь области определения решения сетки около тела, заменяется решением, получаемым на данной сетке.

При пересчете значений газодинамических функций с одной сетки на другую используется интерполяция. В рассматриваемом двумерном случае интерполяция реализована в следующем виде. Вначале определяется ячейка  $ABCD$ , в которой расположена точка  $O$  (рис. 1, в). Значения

функций в точке  $O$  определяются через значения функций в узлах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Значение функции  $f$  в узле  $O$  можно определить через ее значения в любых трех узлах (для определенности пусть это узлы  $B$ ,  $A$ ,  $D$ ) по интерполяционной формуле:

$$f_O = f_A + \alpha \cdot (f_B - f_A) + \beta \cdot (f_D - f_A), \text{ где } \alpha = \frac{|AO \times AB|}{|AD \times AB|}, \quad \beta = \frac{|AO \times AD|}{|AB \times AD|}.$$

Для того чтобы учесть значение функции в узле  $C$ , можно аналогично выразить  $f_O$  через ее значения в точках другой тройки узлов, например  $D$ ,  $C$  и  $B$ . Окончательное выражение для  $f_O$  берется как среднее арифметическое величин по четырем вариантам выбора угловой точки. Коэффициенты интерполяции определяются для всех узлов на контуре  $L$  и соседнем к нему. Для узлов равномерной сетки, попадающих внутрь ячеек сетки около тел, проводится аналогичная процедура и определяются соответствующие коэффициенты интерполяции.

Кроме области, в которой сопрягаются решения на внешней равномерной сетке и сеток около тел, на других границах должны быть поставлены необходимые граничные условия. Для сеток около тел это граница, соответствующая поверхности тела, на которой ставятся условия прилипания и заданной температуры поверхности. Для внешней сетки на левой границе, которая должна быть размещена достаточно далеко от обтекаемой системы тел, ставятся условия в невозмущенном потоке. На верхней и на правой границах ставятся неотражающие граничные условия.

## Алгоритм решения сопряженной задачи

На подготовительном этапе для задаваемой начальной конфигурации системы тел методом установления рассчитывается поле течения. Численное моделирование осуществляется многосеточным методом. При заданной конфигурации тела обтекаются однородным равномерным потоком. Учитывается положение тел относительно друг друга, но не берется во внимание различие в скорости отдельных тел — аналогичным образом исследуются свойства тел при испытаниях в аэродинамических трубах. По найденному распределению давления рассчитываются аэродинамические силы, действующие на каждое тело.

На следующем шаге решается баллистическая задача. В плоском случае движение центра масс каждого отдельного тела системы описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad m \frac{du}{dt} = -c_x \cdot 0.5 \rho V^2 S, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad m \frac{dv}{dt} = c_y \cdot 0.5 \rho V^2 S, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $x$ ,  $y$  — координаты тела;  $u$ ,  $v$  — проекции скорости соответственно на направления осей координат  $Ox$  и  $Oy$ ;  $V$  — величина модуля скорости;  $m$  — масса тела;  $\rho$  — плотность воздуха (среды), в которой движется система тел;  $S$  — характерная площадь;  $c_x$ ,  $c_y$  — коэффициенты аэродинамического сопротивления и подъемной силы.

Вращение тела относительно центра масс описывается уравнениями

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega, \quad I_{zz} \frac{d\omega}{dt} = m_z \cdot 0.5 \rho V^2 SL. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — угол атаки (или угол поворота тела относительно оси  $Oz$ , проходящей через центр масс тела);  $\omega$  — угловая скорость вращения тела относительно оси  $Oz$ ;  $I_{zz}$  — момент инерции тела относительно оси  $Oz$ ;  $m_z$  — коэффициент момента тангажа (коэффициент момента аэродинамических сил относительно оси  $Oz$ );  $L$  — характерный размер. Система уравнений (1), (2) для каждого из тел системы определяет динамику системы в целом. Для ее решения необходимы аэродинамические коэффициенты  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $m_z$ . Аэродинамические коэффициенты определяются с помощью распределения давления на поверхности тел.

Следующие этапы выполняются многократно до завершения задачи. В соответствии с уравнениями (1), (2) производится расчет состояния системы (координаты и скорости тел, угол поворота и угловая скорость) через некоторый малый интервал времени. Аэродинамические коэффициенты при этом определяются из решения аэродинамической задачи, а значения баллистических параметров — из текущих значений для каждого обтекаемого тела. После этого тела перемещаются: каждое тело — на расстояние, соответствующее относительному смещению тел в системе (т. е. за исключением смещения всей системы в среднем).

Предполагается, что изначально тела двигаются практически с одинаковой скоростью вдоль некоторого направления (ось  $Ox$ ). При этом величина и направление скорости каждого отдельного элемента системы могут иметь лишь небольшое отклонение. То есть для любого тела системы

$$\sqrt{(u - u_{cp})^2 + v^2} < u_{cp}, \quad (3)$$

где  $u_{cp}$  — средняя скорость по ось  $Ox$  всех тел в системе. Именно при этом среднем значении скорости осуществляется расчет аэродинамической задачи. Если же какое-либо из тел будет иметь значительно отличающуюся скорость, то оно будет быстро удаляться от системы, и тогда его движение можно рассматривать независимо от остальных тел системы.

Шаг интегрирования по времени определяется задаваемым максимальным шагом интегрирования и ограничивается условиями, чтобы максимальное смещение и угол поворота каждого из тел были не более задаваемых величин. Величина максимального смещения ограничивается размером в поперечном направлении расчетных областей (сеток) около тел.

После расчета состояния системы на новом временном слое производятся перемещение и поворот тел в газодинамической задаче. В соответствии с известным шагом интегрирования динамической задачи производится расчет поля течения через данный интервал времени. При удовлетворении граничных условий прилипания на поверхности тел задается скорость, соответствующая отличию от средней скорости системы, что обеспечивает возможность смещения и поворота тел на следующем временном шаге. После интегрирования газодинамической задачи по времени определяется новое распределение давления на поверхности тел, а соответственно и аэродинамических свойств тел, на новом временном слое. Система готова к новому шагу по времени для динамической задачи.

Особенностью проведенных расчетов является выбор начальных состояний системы, когда первоначально все тела двигаются в одном направлении и с одной скоростью, и скорость вращения тел в начальный момент равна нулю. С одной стороны, это обеспечивает возможность построения начального поля течения методом установления. С другой стороны, это обусловлено задачей, рассматриваемой в работе. Действительно, при том большом количестве неопределенных параметров при исследовании динамики полета метеорного тела сделанные предположения не представляются сильными. Кроме того, при рассмотрении задач аэродинамики и динамики сверхзвукового полета при существенно отличающихся скоростях тел в системе представляется разумным исследовать влияние физических явлений (например, воздействия ударной волны от рядом пролетевшего тела или движение в следе от пролетевшего тела). Это обусловлено тем, что в случае рассмотрения системы с набором тел, движущихся с разной скоростью и в разных направлениях, размеры вычислительной области значительно увеличиваются, что из-за существенного увеличения расстояния между узлами вычислительной сетки не позволяет адекватно описать особенности течения, а фактически исключает возможность решения физической задачи.

## Вращение тела, стабилизированного смещением центра масс

Для тестирования алгоритма выполнены расчеты обтекания тела сегментально-конической формы с углом обратного конуса  $7.5^\circ$ . Для данного варианта геометрии в [Петров, 1998] приведены результаты экспериментальных исследований во всем диапазоне углов атаки.

На рис. 2, а приведена рассчитанная величина коэффициента момента тангажа  $m_z$  в зависимости от угла атаки  $\alpha$  при числе Маха  $M = 6$  и ламинарной вязкости, соответствующей числу Рейнольдса  $Re = 10^5$ . Центр масс тела расположен на расстоянии  $X/L = 0.38$  от центральной точки на лобовой поверхности затупления. Угол атаки  $\alpha = 0^\circ$  соответствует расположению стороны тела с большим радиусом навстречу к потоку. На рис. 2, б приведены картины обтекания при различных значениях  $\alpha$ . Несмотря на то что в эксперименте исследовалось обтекание осесимметричной формы, а в расчетах — двумерной плоской формы, результаты расчета коэффициента  $m_z$  количественно и качественно согласуются с данными, приведенными в [Петров, 1998]. Согласно результатам расчетов у данной формы есть одно положение равновесия, соответствующее углу атаки  $\alpha = 0^\circ$ .

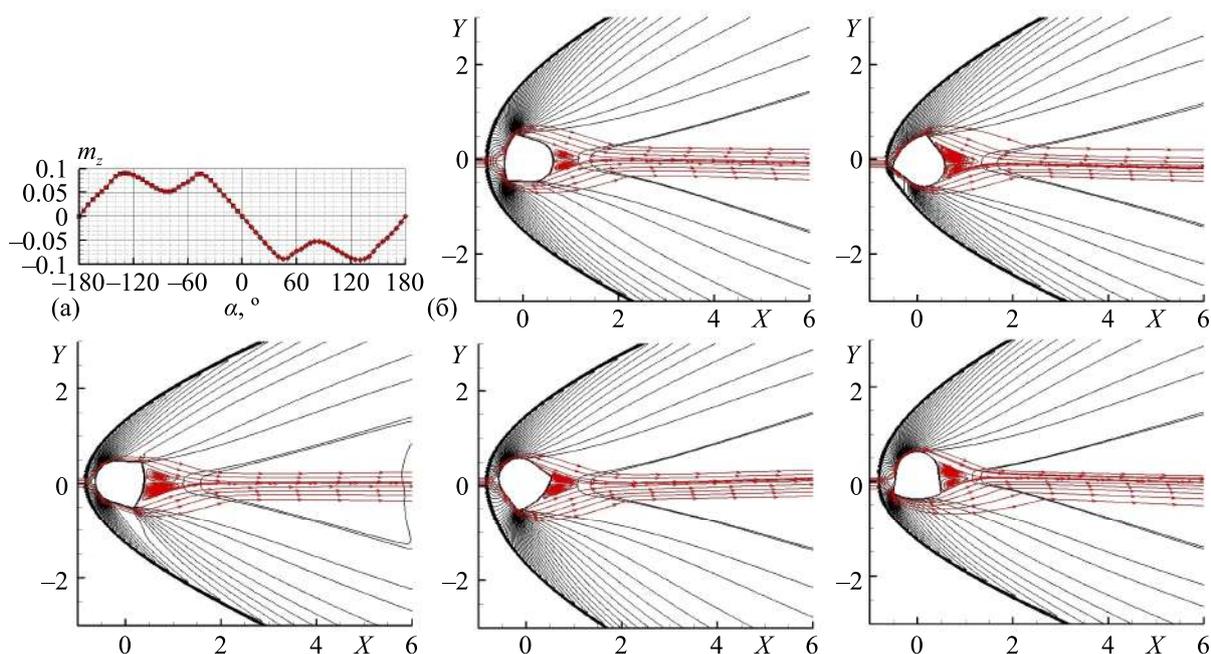


Рис. 2. Характеристики и колебания сегментально-конического тела: а) изменение момента тангажа  $m_z$  в зависимости от угла атаки  $\alpha$ ; б) картины изолинии давления (черный цвет) и линии тока (красный цвет) при  $\alpha = 10, 45, -90, -135$  и  $-170^\circ$

Реализация одного положения равновесия означает, что в динамике при начальных условиях с углом атаки, отличным от нулевого положения, тело будет совершать угловые колебания около единственного положения равновесия, а именно нулевого положения. Это позволяет протестировать алгоритм решения сопряженной аэробаллистической задачи с учетом вращения тела. На рис. 3, а приведено изменение угла атаки по времени при различном начальном значении угла атаки  $\alpha_0 = 10, 45, -90, -135$  и  $-170^\circ$ . На рис. 3, б результаты расчетов движения тела представлены в плоскости параметров  $(\alpha, \omega)$ . Начальные точки траекторий отмечены маркерами и расположены на прямой  $\omega = 0$ . Независимо от начального угла атаки, рассматриваемое тело совершает затухающие колебания к устойчивому положению равновесия ( $\alpha = 0^\circ, \omega = 0^\circ$ ). Так как амплитуда колебаний со временем затухает, то по результатам можно видеть, что при решении сопряженной аэродинамической и баллистической задач фактически определяется не только статический момент тангажа, но и демпфирующий момент [Липницкий и др., 2003], связанный со скоростью вращения тела. На рис. 3, в приведен текущий момент тангажа от текущего значения угла атаки  $\alpha$  для варианта расчета  $\alpha_0 = 45^\circ$ . Данный рисунок демонстрирует причину затухания колебаний: при движении тела по углу атаки в разных направлениях при фиксированном угле атаки реализуется разное значение момента тангажа, что приводит к обра-

зованию площади между кривыми при движении в одну и в другую сторону (обратно). Это приводит к уменьшению энергии, определяющей вращение тела, и в конечном итоге к демпфированию вращения. Тело со временем должно прийти в устойчивое положение равновесия  $\alpha = 0^\circ$ . На рис. 3, з приведен текущий момент тангажа от текущего значения угловой скорости  $\omega$  для варианта расчета  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

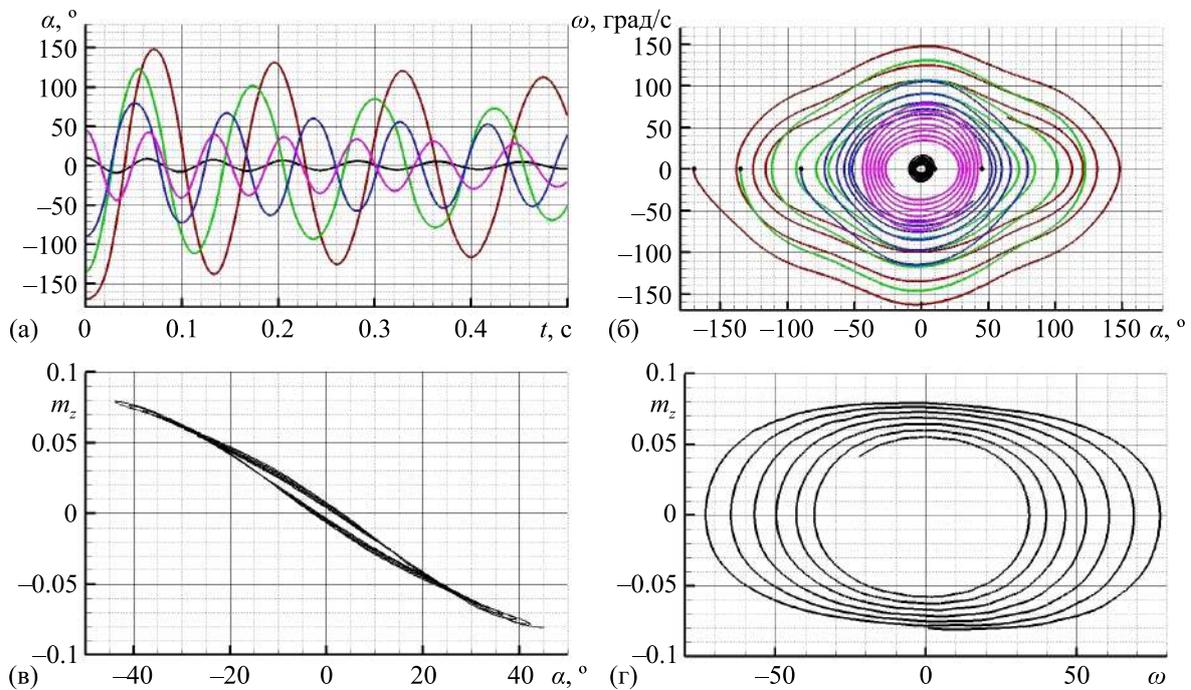


Рис. 3. Характеристики и колебания сегментально-конического тела: а) изменение угла атаки  $\alpha$  со временем; б) движение тела в плоскости угла атаки  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$  для начальных значений  $\alpha_0 = 10, 45, -90, -135$  и  $-170^\circ$ ; в) значение момента тангажа  $m_z$  в зависимости от угла атаки  $\alpha$  для случая  $\alpha_0 = 45^\circ$ ; г) значение момента тангажа  $m_z$  в зависимости от значения угловой скорости  $\omega$  для случая  $\alpha_0 = 45^\circ$

Расчеты выполнены в условиях полета на высоте 20 км при скорости 15 км/с. Данные параметры выбраны как характерные для задач метеоритной тематики [Стулов и др., 1995]. Размер миделя тела при  $\alpha = 0^\circ$  составляет 1.2 м. При плотности метеорита  $3300 \text{ кг/м}^3$  и предположении, что форма тела близка к форме сферы, масса тела составляет 3000 кг, а момент инерции —  $432 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

## Вращение тела прямоугольной формы

Если в качестве исходной формы метеоритного тела взять круговую форму (шар или круговой цилиндр в плоском случае), то такая форма аэродинамически нейтральна. Реальные формы метеорных тел могут отличаться от сферической, в связи с этим для изучения полета метеорных тел также рассматриваются формы прямоугольного бруса и плиты [Ждан и др., 2007; Грицевич, 2008]. В данном разделе приведены результаты исследования вращения тел прямоугольной формы (как пример тел, учитывающих удлинение реальных метеоритных тел).

Рассматривается обтекание тела с прямоугольным сечением при относительном удлинении  $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0$  и  $2.5$ . В таблице 1 приведены размеры и инерционно-массовые характеристики тел, для которых проведены расчеты динамики полета с учетом вращения. Первоначальное тело имеет форму куба с размером стороны 1 м, при плотности  $3300 \text{ кг/м}^3$  его масса составляет 3300 кг. Данное тело деформируется так, чтобы его объем и масса оставались

постоянными. В таблице 1 приведено пять вариантов тел, для которых выполнены расчеты:  $a$  и  $b$  — стороны прямоугольного тела в плоскости угла атаки,  $c$  — размер тела в боковом направлении, предполагается равным основному размеру  $c = a$ .

На рис. 4 представлены результаты расчетов тел прямоугольной формы. На рис. 4, а представлено изменение момента тангажа в зависимости от угла атаки для форм различного удлинения; на рис. 4, б — картины течения в виде изолиний давления и линий тока для визуализации течения в донной области. Расчеты проводились при числе Маха  $M = 6$ . Аэродинамические свойства тел в рамках теории течений с большой сверхзвуковой скоростью не изменяются при изменении числа Маха [Черный, 1959]. В связи с этим большинство исследований аэродинамических свойств метеоритных тел проводится именно при числе Маха  $M = 6$  [Ждан и др., 2007; Стулов, 2008; Барри, 2010а; Барри, 2010б]. При расчетах задавалась ламинарная вязкость, соответствующая числу Рейнольдса  $Re = 10^5$ , определенному по длине, выбранной в качестве характерного размера. Учет вязкости позволяет получить физически правдоподобную картину течения в донной области тел и обеспечить возможность устойчивого проведения расчетов в широком диапазоне условий по углу атаки тел при вращении. При этом реальные эффекты вязкости при больших сверхзвуковых скоростях полета незначительно влияют на аэродинамическое сопротивление тел и не оказывают никакого влияния на характеристики боковой силы, которая определяет разлет тел и изучается в данной работе.

Таблица 1

№	$\lambda$	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$I_{zz}$ , кг · м <sup>2</sup>
1	1.0	1	1	1	550
2	1.5	0.874	1.311	0.874	682
3	2.0	0.794	1.588	0.794	866
4	2.5	0.737	1.842	0.737	1082
5	0.5	1.26	0.63	1.26	546

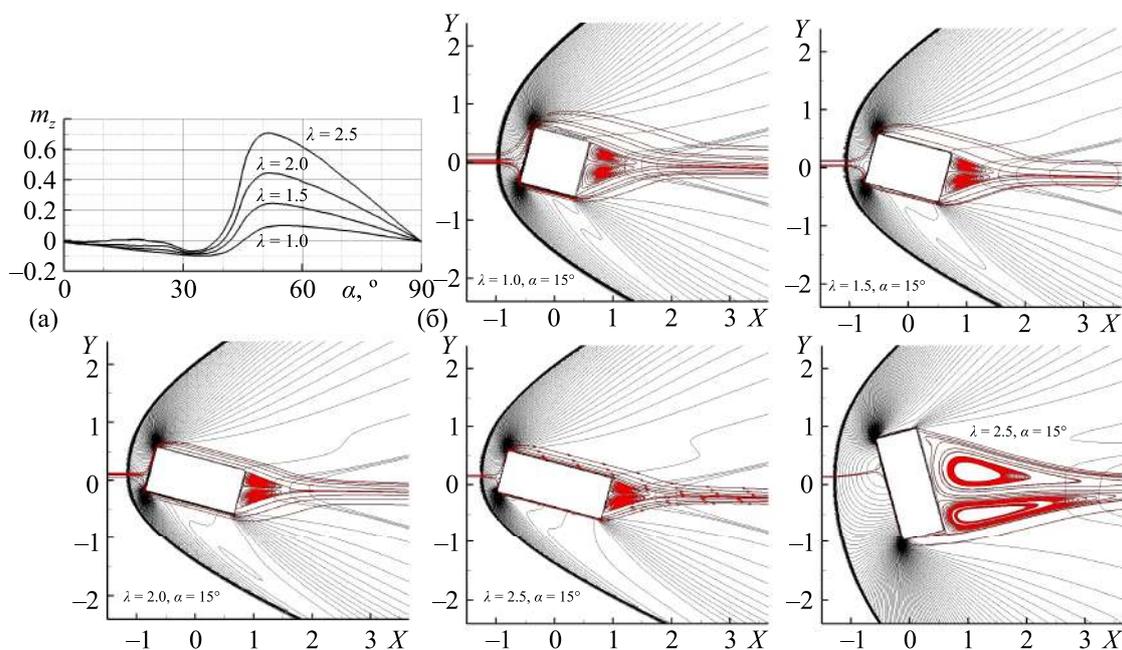


Рис. 4. Характеристики и колебания тела с прямоугольным сечением: а) изменение момента тангажа  $m_z$  в зависимости от угла атаки  $\alpha$ ; б) картины изолинии давления (черный цвет) и линии тока (красный цвет) для различных значений удлинения тела  $\lambda$

Угол атаки  $\alpha = 0^\circ$  соответствует положению, когда более длинная сторона прямоугольного сечения расположена вдоль потока. Согласно расчетам у тел данной формы есть два устойчивых положения равновесия:  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$ . В обоих случаях при установившемся движении тело будет ориентировано плоской стороной к набегающему потоку. Причем первое положение ( $\alpha = 0^\circ$ ) с увеличением удлинения  $\lambda > 1$  становится менее устойчивым. Более устойчивым (и, соответственно, более вероятным) расположением тела является полет тела большей стороной навстречу потоку ( $\alpha = 90^\circ$ ).

На рис. 5, а приведено изменение угла атаки по времени для тела с  $\lambda = 1.0$  при различном начальном положении по углу атаки  $\alpha_0 = -10, -40$  и  $-55^\circ$ . Данное тело совершает колебания относительно ближайшего положения равновесия. Период колебаний незначительно зависит от максимальной амплитуды колебаний (можно сравнить колебания при  $\alpha_0 = -10$  и  $-40^\circ$ ). Во всех случаях колебания имеют затухающий характер.

На рис. 5, б приведено  $\alpha = \alpha(t)$  для тел с  $\lambda = 1.0$  и  $1.5$  при одинаковом начальном положении по углу атаки  $\alpha_0 = -10^\circ$ . Характер колебаний для обоих тел одинаков, но тело с  $\lambda = 1.5$  имеет более быстрое уменьшение амплитуды колебаний при увеличении периода колебаний.

На рис. 5, в приведено  $\alpha = \alpha(t)$  для тела  $\lambda = 1.5$  при начальном положении по углу атаки  $\alpha_0 = -80^\circ$ , т. е. при таком же по величине отклонении угла атаки от положения равновесия, которое в данном случае составляет  $-90^\circ$ . Период колебаний в этом случае относительно варианта тела  $\lambda = 1$  по меньшей мере не уменьшается. Данные обстоятельства обусловлены отличием аэродинамических характеристик при разных углах атаки и момента инерции.

На рис. 5, г приведено  $\alpha = \alpha(t)$  для тел с  $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0$  и  $2.5$  при одинаковом начальном положении по углу атаки  $\alpha_0 = -40^\circ$ . В случаях  $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0$  устойчивым положением равновесия является значение  $\alpha = 0^\circ$ , но тело при  $\lambda = 2.5$  и данных начальных условиях колеблется относительно положения  $\alpha = -90^\circ$ . Это обусловлено особенностями аэродинамических свойств (рис. 4, а).

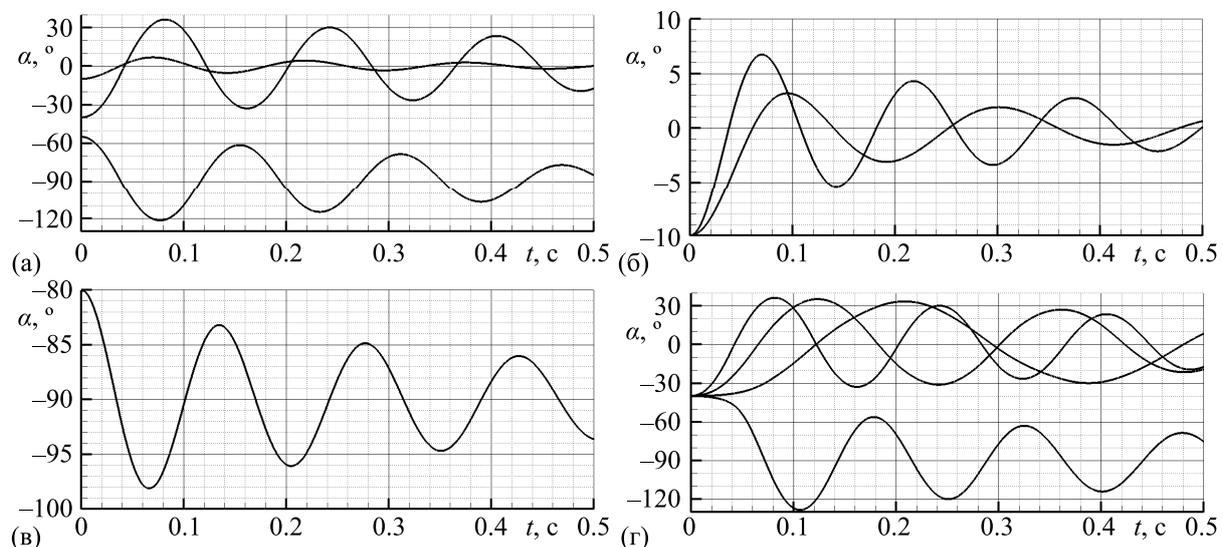


Рис. 5. Изменение угла атаки  $\alpha$  со временем для тел с прямоугольным сечением при различных значениях удлинения  $\lambda$  и начального угла атаки  $\alpha_0$ : а)  $\lambda = 1.0$  при  $\alpha_0 = -10, -40$  и  $-55^\circ$ ; б)  $\lambda = 1.0$  и  $1.5$  при  $\alpha_0 = -40^\circ$ ; в)  $\lambda = 1.5$  при  $\alpha_0 = -80^\circ$ ; г)  $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0$  и  $2.5$  при  $\alpha_0 = -40^\circ$

На рис. 6 результаты расчетов движения тела представлены в плоскости параметров  $(\alpha, \omega)$ . Приведено три траектории. Траектория 1 соответствует телу с  $\lambda = 1.0$  при начальных условиях  $\alpha_0 = -40^\circ, \omega_0 = 0$  рад/с. Траектория 2 — телу с  $\lambda = 2.0$  при тех же начальных условиях:  $\alpha_0 = -40^\circ, \omega_0 = 0$  рад/с. Два данных расчета приведены также на рис. 5, г в другом виде. Тело с удлинением 2 совершает более медленные колебания, предельное устойчивое положение равновесия —

$\alpha = 0^\circ$ . Но если в начальной точке к телу приложить возмущение  $\omega_0 = 1$  рад/с, которое с учетом реализующихся значений вращения не является большим, то тело попадает в область притяжения другого положения равновесия —  $\alpha = -90^\circ$ . Результат расчета представлен на рисунке в виде траектории 3.

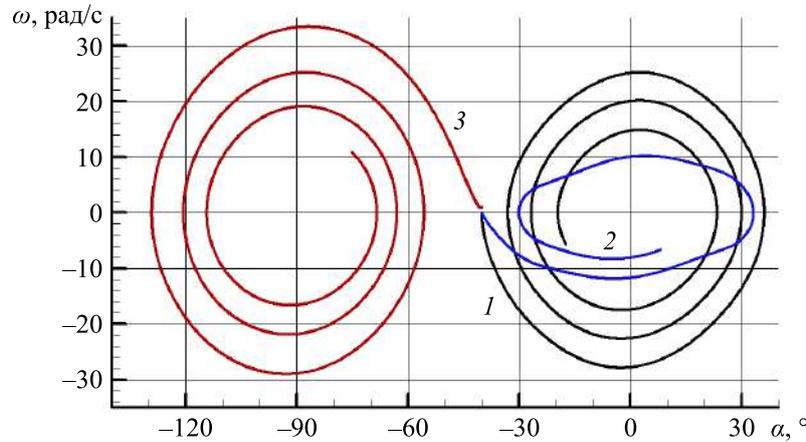


Рис. 6. Траектории колебаний тел с прямоугольным сечением в плоскости угла атаки  $\alpha$  и угловой скорости  $\omega$ : 1 — соответствует телу с удлинением  $\lambda = 1.0$  при  $\alpha_0 = -40^\circ$ ,  $\omega_0 = 0$  рад/с; 2 — соответствует телу с  $\lambda = 2.0$  при  $\alpha_0 = -40^\circ$ ,  $\omega_0 = 0$  рад/с; 3 — соответствует телу с  $\lambda = 2.0$  при  $\alpha_0 = -40^\circ$ ,  $\omega_0 = 1$  рад/с

Из представленных результатов следует, что метеорное тело, имеющее удлинение больше 1, из-за особенностей аэродинамических свойств, наиболее вероятно, при полете в атмосфере будет разворачиваться поперек потока. При этом метеорное тело будет испытывать максимально возможное аэродинамическое торможение из-за полета с максимально возможной площадью миделя. Данное обстоятельство необходимо учитывать при анализе полета метеорных тел.

## Разлет двух тел прямоугольной формы с учетом вращения

Если рассматривается разлет двух одинаковых тел без учета вращения, то боковая скорость разлета двух тел определяется выражением [Лукашенко, Максимов, 2017]

$$V_p = V \sqrt{\frac{\rho S L}{m} f(y_0)}, \text{ где } f(y_0) = \int_{y_0}^{y_m} c_y \cdot dy.$$

Здесь  $V$  — скорость полета,  $m$  — масса тел,  $\rho$  — плотность воздуха,  $S$ ,  $L$  — характерные площадь и размер,  $y_0$ ,  $y_m$  — начальное расстояние между телами и расстояние, при котором аэродинамическое взаимодействие тел прекращается. Фактически для того, чтобы оценить скорость разлета двух одинаковых тел, надо знать коэффициент боковой силы  $c_y = c_y(y)$  в зависимости от расстояния между телами. В работе [Лукашенко, Максимов, 2017] приведены результаты расчетов боковой силы в зависимости от расстояния между телами для тел прямоугольной формы. На рис. 7, а приведены коэффициенты боковой силы для двух тел прямоугольной формы с удлинением  $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$  и  $3.0$ , которые сравниваются с аналогичным коэффициентом между телами в виде круговых цилиндров (линия с маркерами в виде кружка). Все расчеты проводились при заданном числе Маха  $M = 6$  и ламинарной вязкости, соответствующей числу Рейнольдса  $Re = 10^5$ . При этом скорость полета в продольном направлении за характерное время разлета в 0.1 с уменьшается с 15 км/с до 14.5 км/с. Боковая скорость разлета двух тел определяется площадью под соответствующими кривыми. Видно, что прямоугольная форма тела может

привести к увеличению скорости разлета. На рис. 7, б в аналогичном виде приведен коэффициент момента тангажа  $m_z$  верхнего прямоугольного тела в системе из двух тел. Примеры картин течения около тела с  $\lambda = 1.0$  при различном расстоянии между телами приведены на рис. 7, в. Если рассматривается разлет двух тел прямоугольной формы, на тела кроме боковой силы действует момент тангажа, который может приводить к вращению относительно центра масс как против часовой стрелки для тел малого удлинения  $\lambda \leq 1.0$ , так и по часовой стрелке для тел большего удлинения  $\lambda \geq 2.0$ . Коэффициент момента тангажа нелинейно зависит от расстояния между телами, а для моделирования разделения, кроме представленных на рис. 7, б данных, необходимы данные об аэродинамических свойствах при наличии угла поворота тел по тангажу.

Для оценки влияния вращения тел прямоугольной формы на скорость разлета были проведены прямые расчеты сопряженной аэродинамической и баллистической задач по представленному ранее алгоритму. Фактически было проведено 15 расчетов для систем из двух одинаковых тел (5 вариантов тел в таблице 1) при начальном расстоянии 1.5 между центрами масс (расстоянии, отнесенном к величине  $a$ ) при трех начальных значениях угла поворота тел  $\alpha_0 = -10, 0$  и  $+10^\circ$ , что в некотором смысле имитирует возмущение по начальной угловой скорости вращения.

На рис. 8 и 9 приведено два примера результатов расчетов:  $\lambda = 0.5$  и  $2.0$ . На рис. 8, а приведено изменение угла атаки  $\alpha$  и значения боковой скорости  $V$  по времени. На рис. 8, б, в и г приведены три варианта начального положения тел с  $\lambda = 0.5$ , отличающихся начальным поворотом тел. На рис. 8, д приведены картины течения для нескольких моментов по времени. Тела совершают колебания по углу атаки, причем, независимо от начального положения по углу атаки, тела разворачиваются так, что создается дополнительная боковая сила, способствующая увеличению боковой скорости разлета.

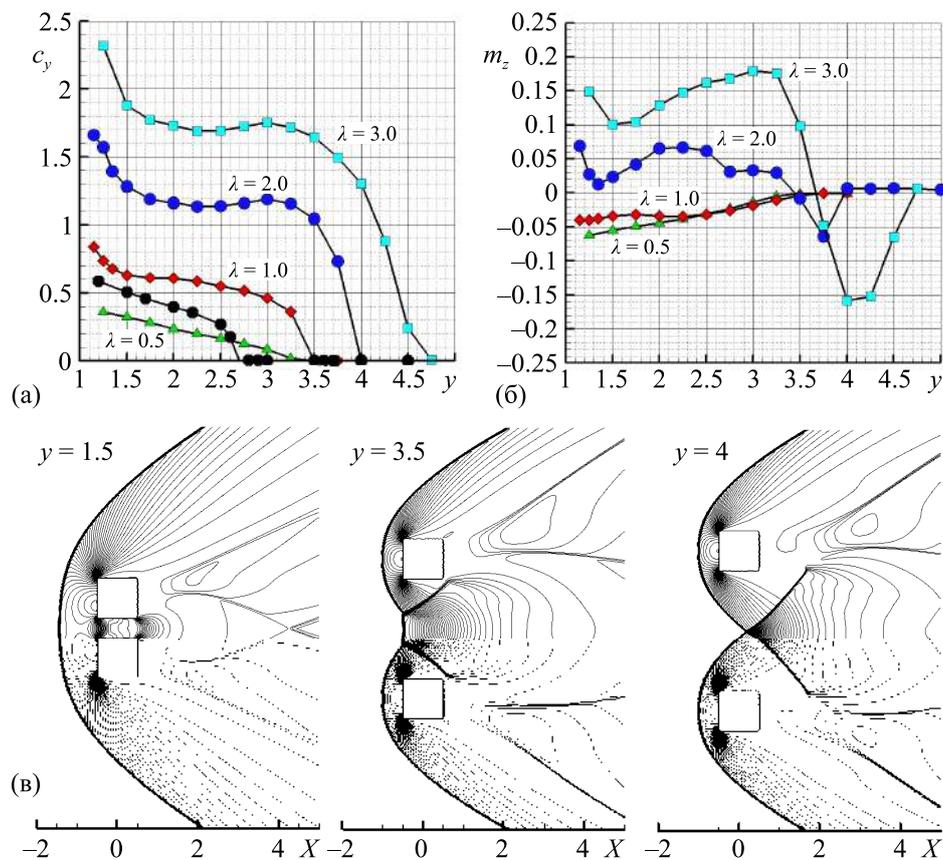


Рис. 7. Характеристики разлета двух тел прямоугольной формы при различном расстоянии  $y$  между телами: а) изменение коэффициенты боковой силы  $c_y$ ; б) изменение момента тангажа  $m_z$ ; в) изобары при обтекании тел с коэффициентом удлинения  $\lambda = 1.0$

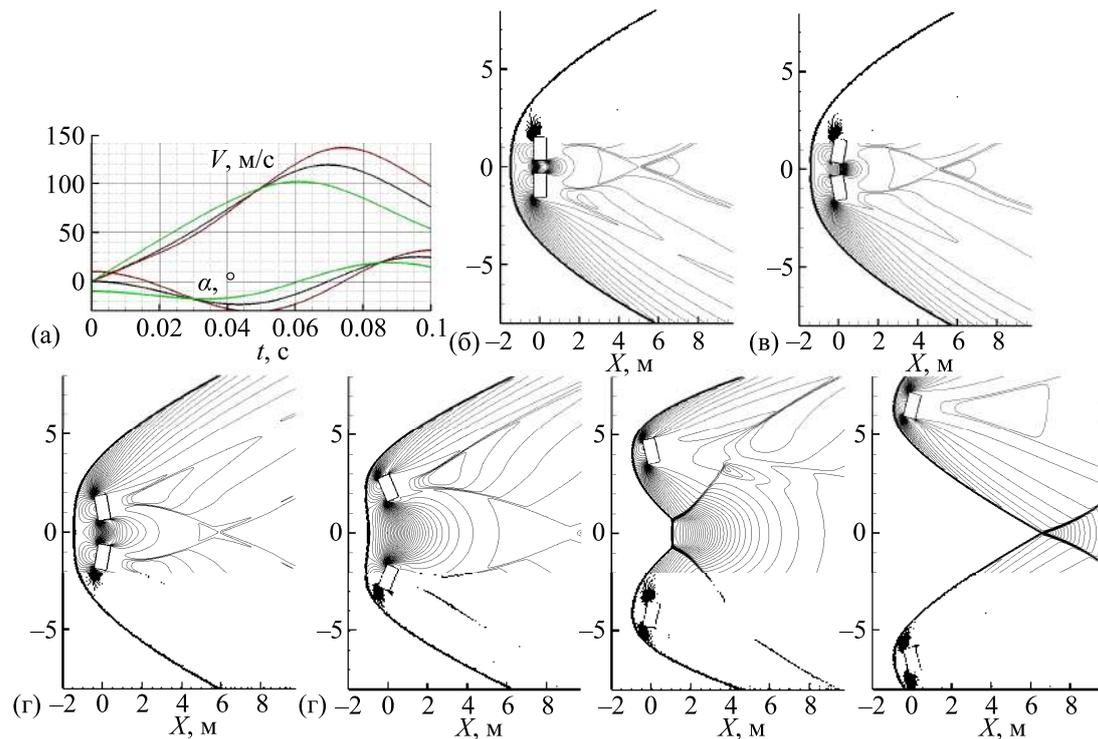


Рис. 8. Характеристики разлета двух тел прямоугольной формы с удлинением  $\lambda = 0.5$ : а) изменение угла атаки  $\alpha$  и значения боковой скорости  $V$  по времени; начальное положение при угле атаки: б)  $\alpha_0 = 0$ , в)  $\alpha_0 = +10^\circ$ , г)  $\alpha_0 = -10^\circ$ ; д) картины течения для нескольких моментов по времени при  $\alpha_0 = -10^\circ$

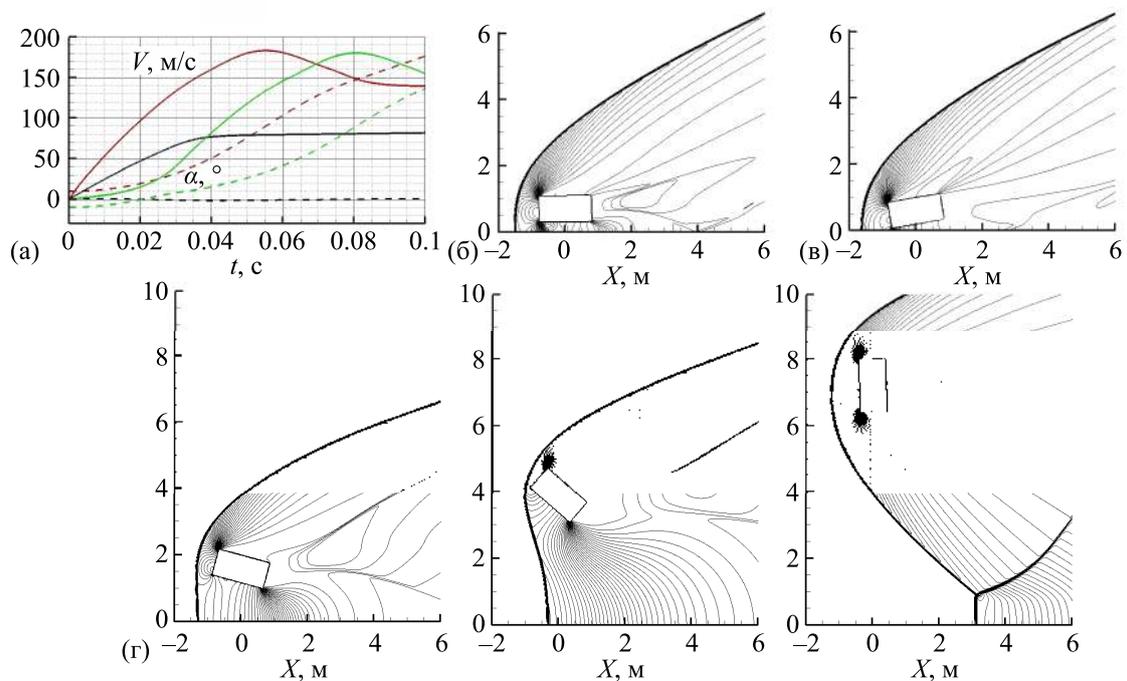


Рис. 9. Характеристики разлета двух тел прямоугольной формы с удлинением  $\lambda = 2.0$ : а) изменение угла атаки  $\alpha$  и значения боковой скорости  $V$  по времени; начальное положение при угле атаки: б)  $\alpha_0 = 0$ , в)  $\alpha_0 = -10^\circ$ ; г) картины течения для нескольких моментов по времени при  $\alpha_0 = -10^\circ$

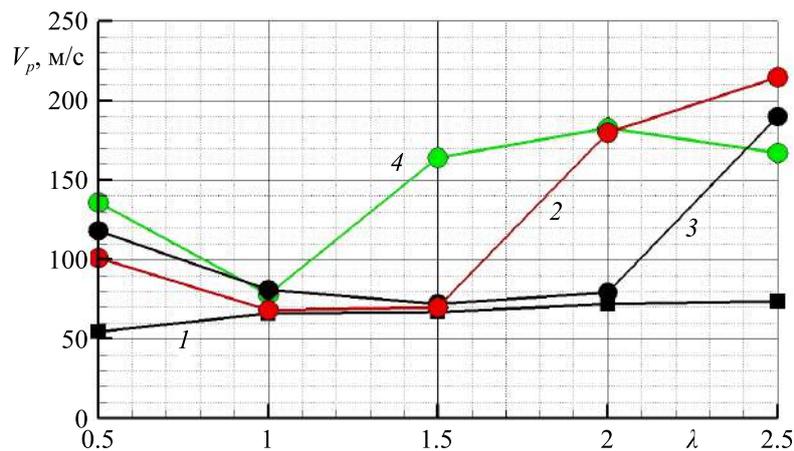


Рис. 10. Скорость разлета  $V_p$  двух одинаковых тел прямоугольной формы в зависимости от удлинения тел  $\lambda$ : 1 — без учета вращения; с учетом вращения при начальном угле поворота: 2 —  $\alpha_0 = -10^\circ$ , 3 —  $\alpha_0 = 0^\circ$ , 4 —  $\alpha_0 = +10^\circ$

На рис. 9, а приведено изменение угла атаки  $\alpha$  и значения боковой скорости  $V$  по времени для тел с  $\lambda = 2.0$ . В этом случае если первоначально тела не повернуть (рис. 9, б), то нулевое значение угла атаки сохраняется на все время разлета тел. При наличии начального ненулевого угла атаки тела разворачиваются на угол атаки до  $90^\circ$  и выше. На рис. 9, в, г приведены картины течения для нескольких моментов по времени. После разлета тела будут лететь большей стороной поперек направления полета. При развороте тел на угол атаки образуется боковая сила, приводящая к увеличению скорости разлета.

На рис. 10 представлены оценки скорости разлета  $V_p$  двух одинаковых тел на высоте 20 км при скорости полета 15 км/с в зависимости от удлинения тел. Линия 1 соответствует результатам работы [Лукашенко, Максимов, 2017], в которой не учитывается возможное вращение тел. Фактически эта оценка скорости разлета только под действием расталкивающей силы, которая возникает между телами при сверхзвуковой скорости полета. Линии 2, 3 и 4 получены в данной работе при начальном угле поворота тел  $\alpha = -10, 0$  и  $+10^\circ$ . Если тело имеет удлинение  $\lambda = 0.5$ , то в силу аэродинамических свойств при совместном обтекании верхнее тело поворачивается против часовой стрелки, при этом реализуется дополнительная подъемная сила, что приводит к росту скорости разлета. Скорость разлета с 54 м/с увеличивается до 118 ( $136 \div 101$ ) м/с, т. е. увеличивается более чем в два раза. В дальнейшем при разлете и фактически независимом полете двух тел они летят большей стороной навстречу потоку.

Если тело имеет удлинение  $\lambda = 1.0$ , то учет вращения приводит к незначительному росту скорости разлета не более чем в 1.2 раза. С увеличением удлинения тел  $\lambda \geq 1.5$  при наличии начального возмущения, имитированного в данной работе начальным углом поворота тел на угол  $10^\circ$ , тело разворачивается на  $90^\circ$ , при этом в процессе разворота образуется значительная боковая сила, которая приводит к росту скорости разлета в три раза по сравнению со случаем, когда возможность вращения не учитывается.

Полученные результаты по моделированию вращающихся тел с удлинением отличным от единицы показывают, что вращение может оказывать значительное влияние на динамику полета частей метеорного тела после фрагментации и, в частности, приводить к увеличению скорости разлета осколков в несколько раз по сравнению с телами сферической формы.

## Заключение

Для исследования обтекания систем тел в условиях значительной интерференции разработанный метод решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач дополнен расчетным алгоритмом, позволяющим учитывать влияние возникающего момент тангажа на дви-

жение тел. Проведены расчеты динамики тел прямоугольной формы с учетом возможности вращения тела по углу тангажа (или углу атаки). Показано, что более вероятным является полет удлиненного тела с ориентацией большой стороны тела поперек потока, при этом реализуется максимальная сила торможения. Проведены расчеты разлета двух одинаковых тел с различным удлинением. После разлета тела летят большей стороной поперек потока. При разлете двух тел кроме расталкивающей силы из-за вращения образуется дополнительная боковая сила, которая приводит к значительному росту скорости разлета — в три раза для сделанных расчетов при большем удлинении тел.

Полученные результаты важны для исследования баллистики метеорных тел. Вращение тел может существенно влиять на скорость разлета фрагментов метеорного тела после разрушения и, как следствие, приводить к значительно большей площади выпадения метеоритов. Разработанный алгоритм решения сопряженной аэродинамической и баллистической задач можно использовать для анализа полета систем тел с учетом взаимного влияния, в том числе и при вращении тел.

## Список литературы (References)

- Аксенов А. А.* FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 5–20.  
*Aksenov A. A.* FlowVision: industrialnaya vychislitel'naya gidrodinamika [FlowVision: Industrial computational fluid dynamics] // Computer research and modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 5–20 (in Russian).
- Андреев А. А., Холодов А. С.* О сверхзвуковом обтекании затупленных тел с учетом интерференции // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 142–147.  
*Andreyev A. A., Kholodov A. S.* On three-dimensional supersonic flow past blunt bodies when interference is present // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — Vol. 29, Issue 1. — P. 103–107. (Original Russian paper: *Andreyev A. A., Kholodov A. S.* O sverkhzvukovom obtekanii zatuplennih tel s uchedom interferenzii // Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1989. — Vol. 29, No. 1. — P. 142–147.)
- Андрущенко В. А., Сызранова Н. Г., Шевелев Ю. Д.* Моделирование падения Челябинского метеорита // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 6. — С. 927–940.  
*Andrushenko V. A., Syzranova N. G., Shevelev Yu. D.* Modelirovanie padeniya Chelyabinskogo meteorita [Modeling of Chelyabinsk meteorite fall] // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 6. — P. 927–940 (in Russian).
- Барри Н. Г.* Аэродинамика фрагментов метеорного тела. Эффект коллимации // Астрономический вестник. — 2010а. — Т. 44, № 1. — С. 59–64.  
*Barri N. G.* Meteoroid fragments dynamics: Collimation effect // Solar System Research. — 2010. — Vol. 44, Issue 1. — P. 55–59. (Original Russian paper: *Barri N. G.* Aehrodinamika fragmentov meteornogo tela. Effekt kollimacii // Astronomicheskij vestnik. — 2010a. — Vol. 44, No. 1. — P. 59–64.)
- Барри Н. Г.* Динамика двух сферических объектов в сверхзвуковом потоке // Доклады Академии наук. — 2010b. — Т. 434, № 5. — С. 620–621.  
*Barri N. G.* Dynamics of two spherical objects in supersonic flow // Doklady Physics. — 2010. — Vol. 55, Issue 10. — P. 516–518. (Original Russian paper: *Barri N. G.* Dinamika dvuh sfericheskikh objectov v sverkhzvukovom potoke // Doklady Akademij nauk. — 2010b. — Vol. 434, No. 5. — P. 620–621.)
- Барри Н. Г.* Модель разлета фрагментов разрушенного метеороида // Вестник Московского университета. — Сер. 1. Математика. Механика. — 2005. — № 4. — С. 56–59.  
*Barri N. G.* A model for the separation of fragments of a destroyed meteoroid // Moscow Univ. Mech. Bull. — 2005. — Vol. 60, Issue 4. — P. 20–22. (Original Russian paper: *Barri N. G.* Model razleta fragmentov razrushennogo meteoroida // Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1. Matematika. Mehanika. — 2005. — No. 4. — P. 56–59.)
- Григорян С. С.* О движении и разрушении метеоритов в атмосфере планет // Космические исследования. — 1979. — Т. 17, № 6. — С. 875–875.  
*Grigorian S. S.* O dvizhenii i razrushenii meteoritov v atmosphere planet [On the motion and destruction of meteorites in the atmosphere of planets] // Cosmic Research. — 1979. — Vol. 17, No. 6. — P. 875–875 (in Russian).

- Грязев В. М., Могильников Н. В.* Некоторые приложения задачи расчета газодинамического течения в условиях подвижных границ твердых тел // Известия ТулГУ. Технические науки. — 2017. — Вып. 4. — С. 102–108.  
*Gryazev V. M., Mogilnikov N. V.* Nekotorye prilozheniya zadachi rascheta gazodinamicheskogo techeniya v usloviyah podviznykh granic tverdykh tel [Some applications of the task of calculation of the gasdynamic current in conditions mobile boundaries of solid bodies] // Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki. — 2017. — Issue 4. — P. 102–108 (in Russian).
- Гувернюк С. В., Максимов Ф. А.* Сверхзвуковое обтекание плоской решетки цилиндрических стержней // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1025–1033.  
*Guvernyuk S. V., Maksimov F. A.* Supersonic flow past a flat lattice of cylindrical rods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1012–1019. (Original Russian paper: *Guvernyuk S. V., Maksimov F. A.* Sverkhzvukovoe obtekanie ploskoi reschetki zhilindricheskikh sterschnei // Schurnal vychislitelnoi matematiki and matematicheskoi fiziki. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1025–1033.)
- Дерюгин Ю. Н., Саратов А. В., Жучков Р. Н.* Особенности построения методики расчета на сетках типа «химера» для неструктурированных сеток // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 106–118.  
*Deryugin Yu. N., Saratov A. V., Zhuchkov R. N.* Features of overset meshes methodology on unstructured grids // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2017. — Vol. 9, No. 5. — P. 587–597. (Original Russian paper: *Deryugin Yu. N., Saratov A. V., Zhuchkov R. N.* Osobennosti postroeniya metodiki rascheta na setkah tipa himera dlya nestrukтуриrovannykh setok // Kompyuternoe modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 2. — P. 106–118.)
- Ждан И. А., Стулов В. П., Стулов П. В.* Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке // Доклады Академии наук. — 2004. — Т. 396, № 2. — С. 191–193.  
*Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V.* Aerodynamic interaction of two bodies in a supersonic flow // Doklady Physics. — 2004. — Vol. 49, No. 5. — P. 315–317. (Original Russian paper: *Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V.* Aerodinamicheskoe vzaimodeistvie dvuh tel v sverkhzvukovom potoke // Doklady Akademij nauk. — 2004. — Vol. 396, No. 2. — P. 191–193.)
- Ждан И. А., Стулов В. П., Стулов П. В.* Трехмерные конфигурации фрагментов разрушенного тела в сверхзвуковом потоке // Доклады Академии наук. — 2005. — Т. 404, № 4. — С. 486–490.  
*Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V.* 3D configurations of broken body fragments in a supersonic flow // Doklady Physics. — 2005. — Vol. 50, No. 10. — P. 514–518. (Original Russian paper: *Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V.* Trekhmernie konfigurazii fragmentov razrushennogo tela v sverkhzvukovom potoke // Doklady Akademij nauk. — 2005. — Vol. 404, No. 4. — P. 486–490.)
- Ждан И. А., Стулов В. П., Стулов П. В., Турчак Л. И.* Коэффициенты сопротивления тел метеорных форм // Астрономический вестник. — 2007. — Т. 41, № 6. — С. 544–547.  
*Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V., Turchak L. I.* Drag coefficients for bodies of meteorite-like shapes // Solar System Research. — 2007. — Vol. 41, No. 6. — P. 505–508. (Original Russian paper: *Zhdan I. A., Stulov V. P., Stulov P. V., Turchak L. I.* Koefficienti soprotivleniya tel meteornih form // Astronomicheskii vestnik. — 2007. — Vol. 41, No. 6. — P. 544–547.)
- Зибаров А. В.* Пакет прикладных программ Gas Dynamics Tool и его применение в задачах численного моделирования газодинамических процессов: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. — М., 2000.  
*Zibarov A. V.* Paket prikladnykh programm gas dynamics tool i ego primenenie v zadachah chislenogo modelirovaniya gazodinamicheskikh processov [The software package Gas Dynamics Tool and its application in the problems of numerical modeling of gas-dynamic processes]: author. dis. Dr. Phys.-Mat. of sciences. — Moscow, 2000 (in Russian).
- Ковалев П. И., Менде Н. П., сост. и ред.* Альбом сверхзвуковых течений. — СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2011.  
*Kovalev P. I., Mende N. P., ed.* An album of supersonic flow visualization // Beijing, People's Republic of China, National Industry Press, 2000. (Russ. ed.: *Kovalev P. I., Mende N. P., ed.* Albom sverkhzvukovih techenii. — Saint-Petersburg: Pub. Politechnicheskogo universiteta, 2011.)
- Липницкий Ю. М., Красильников А. В., Покровский А. Н., Шманенков В. Н.* Нестационарная аэродинамика баллистического полета. — М.: Физматлит, 2003.  
*Lipnitskii Yu. M., Krasilnikov A. V., Pokrovskii A. N., Shmanenkov V. N.* Nestazhionarnaia aerodinamika ballisticheskogo poleta [Unsteady aerodynamics of ballistic flight]. — Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).

- Лукашенко В. Т., Максимов Ф. А. Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения // Инженерный журнал: наука и инновации. — 2017. — Вып. 9 (69). — С. 1–14.  
*Lukashenko V. T., Maksimov F. A. Matematicheskaya model' razleta oskolkov meteornogo tela posle razrusheniya* [Numerically simulated model of meteor body fragments distribution after destruction] // *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii* [Engineering Journal: Science and Innovation]. — 2017. — Issue 9 (69). — P. 1–14 (in Russian).
- Максимов Ф. А. Аэродинамическое взаимодействие двух тел в сверхзвуковом потоке // Сборник материалов Международной научной конференции «Проблемы баллистики». — Санкт-Петербург, БГТУ. — 2006. — Т. 2. — С. 44–48.  
*Maksimov F. A. Aerodinamicheskoe vzaimodeistvie dvuh tel v sverhzvukovom potoke* [Aerodynamic interaction of two bodies in a supersonic flow] // *Sbornik materialov mezhdunarodnoi nauchnoi konferencij "Problemi ballistiki"*. — St. Petersburg, BG TU. — 2006. — Vol. 2. — P. 44–48 (in Russian).
- Максимов Ф. А. Сверхзвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 6. — С. 969–980.  
*Maksimov F. A. Sverhzvukovoe obtekanie sistemi tel* [Supersonic flow of system of bodies] // *Computer Research and Modeling*. — 2013. — Vol. 5, No. 6. — P. 969–980 (in Russian).
- Максимов Ф. А., Чураков Д. А., Шевелев Ю. Д. Разработка математических моделей и численных методов для решения задач аэродинамического проектирования на многопроцессорной технике // ЖВММФ. — 2011. — Т. 51, № 2. — С. 303–328.  
*Maksimov F. A., Churakov D. A., Shevelev Yu. D. Development of Mathematical Models and Numerical Methods for Aerodynamic Design on Multiprocessor Computers* // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 284–307. (Original Russian paper: *Maksimov F. A., Churakov D. A., Shevelev Yu. D. Razrabotka matematicheskikh modelej i chislennyh metodov dlya resheniya zadach aehrodinamicheskogo proektirovaniya na mnogoprocessornoj tekhnike* // *ZHVMMF*. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 303–328.)
- Петров К. П. Аэродинамика тел простейших форм. — М.: Факториал, 1998.  
*Petrov K. P. Aerodinamika tel prosteyshih form* [Aerodynamics of bodies of simplest forms]. — Moscow: Factorial, 1998 (in Russian).
- Стулов В. П. О разрушении и распаде метеорных тел в атмосфере // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 421, № 4. — С. 486–489.  
*Stulov V. P. Meteoroid destruction and fragmentation in the atmosphere* // *Doklady Physics*. — 2008. — Vol. 53, Issue 8. — P. 458–461. (Original Russian paper: *Stulov V. P. O razrushenii i raspade meteornyh tel v atmosfere* // *Doklady Akademii nauk*. — 2008. — Vol. 421, No. 4. — P. 486–489.)
- Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И. Аэродинамика болидов. — М.: Наука. Физматлит, 1995.  
*Stulov V. P., Mirskii V. N., Vislyi A. I. Aerodinamika bolidov* [Fireball Aerodynamics]. — Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1995 (in Russian).
- Хлебников В. С. Аэротермодинамика элементов летательных аппаратов при стационарном и нестационарном сверхзвуковом отрывном обтекании. — М.: Физматлит, 2014.  
*Hebnikov V. S. Aerodinamika elementov letatelnyh apparatov pri stazhionarnom i nestazhionarnom sverhzvukovom otrivnom obtekanii* [Aerothermodynamics of aircraft elements for stationary and non-stationary supersonic separation flow] // Moscow, Fizmatlit, 2014 (in Russian).
- Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит, 1959.  
*Chernyj G. G. Tcheniya gaza s bol'shoj sverhzvukovoj skorost'yu* [Gas flows at high supersonic speed]. — Moscow: Fizmatlit, 1959 (in Russian).
- Boiko V. M., Klinkov K. V., Poplavskii S. V. Collective bow shock ahead of a transverse system of spheres in a supersonic flow behind a moving shock wave // *Fluid Dynamics*. — 2004. — Vol. 39, No. 2. — P. 330–338.
- Borovička J., Kalenda P. The Morávka meteorite fall: 4 Meteoroid dynamics and fragmentation in the atmosphere // *Meteoritics & Planetary Science*. — 2003. — Vol. 38, No. 7. — P. 1023–1043.
- Borovička J., Popova O. P., Nemtchinov I. V., Spurn'y P., Ceplecha Z. Bolides produced by impacts of large meteoroids into the Earth's atmosphere: comparison of theory with observations. I. Benesov bolide dynamics and fragmentation // *Astronomy and Astrophysics*. — 1998. — Vol. 334. — P. 713–728.

- Borovička J., Tóth J., Igaz A., Spurný P., Kalenda P., Haloda J., Svoreá J., Kornoš Leonard., Silber E., Brown P., Husárik M.* The Košice meteorite fall: Atmospheric trajectory, fragmentation, and orbit // *Meteoritics & Planetary Science*. — 2013. — Vol. 48, Issue 10. — P. 1757–1779.
- Turchak L. I., Gritsevich M. I.* Meteoroids interaction with the Earth atmosphere Atmospheric // *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. — 2014. — Vol. 44, No. 4. — P. 15–28.
- Zarei Z., Frost D. L., Timofeev E. V.* Numerical modeling of the entrainment of particles in inviscid supersonic flow // *Shock Waves*. — 2011. — Vol. 21, No. 4. — P. 341–355.