

УДК: 519.6

Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом

В. Н. Говорухин^а, А. М. Филимонова^б

Южный федеральный университет,
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

E-mail: ^а vngovoruhin@sfedu.ru, ^б alexandra.m.filimonova@gmail.com

Получено 29.05.2018, после доработки — 28.03.2019.

Принято к публикации 08.04.2019.

Предложен бессеточно-спектральный метод расчета динамики плоских вихревых течений невязкой несжимаемой жидкости в геофизических приближениях с учетом планетарного вращения. Математически задача описывается системой двух уравнений в частных производных относительно функций тока и завихренности с различными граничными условиями (замкнутая область течения и периодические условия). В основе метода лежат следующие положения: поле завихренности задано значениями на множестве частиц; функция завихренности приближается с помощью кусочно-непрерывной аппроксимации кубическими полиномами от двух пространственных переменных; коэффициенты полиномов находятся методом наименьших квадратов; функция тока на каждом временном шаге находится методом Бунюва – Галёркина; динамика жидких частиц рассчитывается псевдосимплектическим методом Рунге – Кутты. В статье впервые подробно описан вариант метода для периодических граничных условий. Адекватность численной схемы проверена на тестовых примерах.

В численном эксперименте исследована динамика конфигурации четырех круглых вихревых пятен с одинаковым радиусом и постоянной завихренностью, расположенных в вершинах квадрата с центром в полюсе. Изучено влияние планетарного вращения и радиуса пятен на динамику и формирование вихревых структур. Показано, что в случае достаточно большого расстояния между границами вихревых пятен их динамика близка к поведению точечных вихрей с той же интенсивностью. При росте радиуса возникает взаимодействие между вихрями, которое приводит к их слиянию. В зависимости от направления вращения сила Кориолиса может усиливать или замедлять процессы взаимодействия и перемешивания вихрей. Так, вихревая структура из четырех вихрей при небольших радиусах пятен стабилизируется в случае сонаправленности собственного и планетарного вращений и разрушается на меньших временах при противоположных направлениях. При больших радиусах вихревая структура не стабилизируется.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревые методы, вихревые структуры, геофизические течения

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 18-01-00453.

UDC: 519.6

Numerical calculation of planar geophysical flows of an inviscid incompressible fluid by a meshfree-spectral method

V. N. Govorukhin^a, A. M. Filimonova^b

Southern Federal University,
8a Milchakova st., Rostov-on-Don, 344090, Russia

E-mail: ^a vngovoruhin@sfnu.ru, ^b alexandra.m.filimonova@gmail.com

Received 29.05.2018, after completion — 28.03.2019.

Accepted for publication 08.04.2019.

In this article, a meshfree-spectral method for numerical investigation of dynamics of planar geophysical flows is proposed. We investigate inviscid incompressible fluid flows with the presence of planetary rotation. Mathematically this problem is described by the non-steady system of two partial differential equations in terms of stream and vorticity functions with different boundary conditions (closed flow region and periodic conditions). The proposed method is based on several assumptions. First of all, the vorticity field is given by its values on the set of particles. The function of vorticity distribution is approximated by piecewise cubic polynomials. Coefficients of polynomials are found by least squares method. The stream function is calculated by using the spectral global Bubnov–Galerkin method at each time step. The dynamics of fluid particles is calculated by pseudo-symplectic Runge–Kutta method. A detailed version of the method for periodic boundary conditions is described in this article for the first time. The adequacy of numerical scheme was examined on test examples.

The dynamics of the configuration of four identical circular vortex patches with constant vorticity located at the vertices of a square with a center at the pole is investigated by numerical experiments. The effect of planetary rotation and the radius of patches on the dynamics and formation of vortex structures is studied. It is shown that, depending on the direction of rotation, the Coriolis force can enhance or slow down the processes of interaction and mixing of the distributed vortices. At large radii the vortex structure does not stabilize.

Keywords: inviscid incompressible fluid flows, vortex methods, vortex structures, geophysical fluid dynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 413–426 (Russian).

This work was partially supported by RFBR Grant No. 18-01-00453.

Введение

Интерес к исследованию геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости обусловлен их приложениями в задачах динамики океана и атмосферы, метеорологии и гидродинамики. Так, для предсказания движений атмосферы необходимы изучение динамики вихревых течений, исследование их структуры и влияния различных воздействий. Для анализа многих геофизических процессов полезными являются двумерные математические модели, учитывающие физические факторы при ряде допущений [Педлоски, 1984; Должанский, 2006], а для их исследования — математические методы [Борисов, Мамаев, 2005]. Примером является анализ крупномасштабных движений атмосферы вращающихся планет, так называемые модели β -плоскости и γ -плоскости. Эти математические модели представляют собой систему уравнений в частных производных, связывающую завихренность и функцию тока.

При численном решении задач двумерной вихревой динамики эффективными являются методы частиц, основанные на свойстве сохранения завихренности в частицах невязкой жидкости (см. [Белоцерковский, Гиневский, 1995; Григорьев, Вшивков, 2000; Cottet, Koumoutsakos, 2000] и ссылки в них). Их достоинствами являются гибкость в аппроксимации неизвестных функций, отсутствие необходимости построения регулярной сетки и возможность детализации отдельных областей течения. В методах частиц завихренность задается в N движущихся частицах, а их скорость определяется из связи функции тока и завихренности. Имеется обоснование сходимости и оценки погрешности вихревых методов частиц (см. [Hald, 1979; Beale, Maida, 1982; Anderson, Greengard, 1985; Liu, Xin, 1995; Liu, Xin, 2000]). Для вычисления функции тока используются подходы, которые определяются областью течения, условиями на границе и иной спецификой задачи. Достаточно универсальными являются комбинированные эйлерово-лагранжевы методы «вихрей в ячейках», которые позволяют сократить вычислительные затраты расчета и учесть разнообразные физические факторы (см., например, [Дынникова, 2009; Mohammadian, Marshall, 2010; Wang et al., 2017]).

В представленной статье разработан вариант метода вихрей в ячейках, который первоначально был предложен в [Govorukhin, Ilin, 2009], а затем развит в [Говорухин, 2011; Govorukhin, 2013]. В перечисленных работах решались уравнения плоской динамики идеальной жидкости в замкнутой прямоугольной области или при протекании сквозь прямоугольный канал. Была показана эффективность метода при анализе ряда задач вихревой динамики [Govorukhin, Ilin, 2009; Говорухин, 2011], исследовании перестроек структуры вихревых конфигураций [Говорухин, 2016]. Разработан эффективный параллельный алгоритм метода [Говорухин, 2017]. В данной работе впервые представлена реализация аналогичного подхода для решения задач динамики вихревых структур в прямоугольной области при условии, что на функцию тока наложены периодические по пространственным переменным краевые условия. Такие граничные условия часто используются для численного исследования задач вихревой динамики на всей плоскости в тех случаях, когда не удается получить аналитические выражения для вектора скорости жидких частиц. В этом случае расчетная область задается шире, чем область, где сосредоточена вихревая конфигурация, что позволяет избежать существенного влияния граничных условий на численные результаты. Другим применением такой постановки является анализ турбулентных течений и свойств хаотического транспорта в них.

Известно, что взаимодействие сонаправленных распределенных вихрей определяется их размерами, интенсивностью, расстоянием между ними [Dritschel, 1995], распределением завихренности внутри пятен [Meunier et al., 2002]. Если расстояние r между вихрями меньше некоторой критической величины r_c , то возникают неустойчивые моды, которые приводят к перемешиванию вихревых пятен. Если $r > r_c$, то вихри образуют квазистационарную вихревую конфигурацию. Влияние планетарного вращения на процессы взаимодействия различных вихревых

структур до конца не ясно и требует дальнейшего изучения. В этой статье продолжены такие исследования, начатые в [Говорухин, 2016].

Статья имеет следующую структуру. В § 1 дана математическая формулировка модели крупномасштабной вихревой динамики в атмосфере; в § 2 описан разработанный вариант метода вихрей в ячейках. В § 3 приведены результаты тестовых расчетов. В § 4 представлены и проанализированы результаты численного исследования влияния планетарного вращения на конфигурацию четырех одинаковых вихревых пятен, расположенных в вершинах квадрата. В заключении (§ 5) обсуждаются полученные результаты и направления дальнейших исследований.

1. Математическая формулировка задачи

Рассматриваются плоские течения невязкой несжимаемой жидкости на вращающейся сфере. Соответствующая математическая модель может быть сформулирована в виде системы двух уравнений в частных производных относительно абсолютной завихренности q и функции тока ψ [Педлоски, 1984; Van Heijst, 1994]. Функция q является суммой $q = \omega + f$, где ω — относительная завихренность, а $f = f(x, y) = \Omega \sin(\phi)$ — планетарная завихренность, описывающая влияние силы Кориолиса. Ω — планетарная угловая скорость вращения, ϕ — географическая широта, равная нулю на экваторе и $\pm \frac{\pi}{2}$ на полюсах.

Первое уравнение системы описывает пассивный перенос абсолютной завихренности:

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv q_t + \psi_y q_x - \psi_x q_y = 0, \quad (1)$$

где D/Dt — материальная производная, t — время, x, y — пространственные переменные, а нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Скорость жидкости $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ выражается через функцию тока следующим образом:

$$v_1 = \psi_y, \quad v_2 = -\psi_x. \quad (2)$$

Для завихренности q задается начальное распределение

$$q|_{t=0} = q_0(x, y). \quad (3)$$

Из уравнения (1) следует, что значение завихренности, заданное в каждой жидкой частице с координатами $(x_i(t), y_i(t))$ в начальный момент, сохраняется во времени $q(x_i(t), y_i(t)) \equiv q_0(x_i(0), y_i(0))$, а динамика частицы определяется функцией тока и описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_1 = \psi_y(x_i, y_i), \\ \dot{y}_i = v_2 = -\psi_x(x_i, y_i). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени.

Второе уравнение системы связывает функцию тока ψ и завихренность:

$$-\Delta\psi = q = \omega + f, \quad (5)$$

где Δ — оператор Лапласа. При отсутствии планетарного вращения, то есть при $f = 0$, система (1) и (5) представляет собой уравнения Эйлера динамики невязкой несжимаемой жидкости в терминах завихренности и функции тока. В каждый момент времени t функция тока ψ может быть найдена из уравнения (5).

Далее будем рассматривать геофизические течения в окрестности полюса. Тогда, при ряде предположений (см. [Должанский, 2006; Педлоски, 1984]), планетарную завихренность можно представить в виде

$$f(r) = f_0 - \frac{1}{2}\gamma r^2, \quad (6)$$

где $\gamma = \text{const}$ — параметр, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус, $f_0 = \text{const}$, причем f_0 без потери общности может быть принято равным нулю. После подстановки (6) в (5) получим

$$-\Delta\psi = q - \frac{1}{2}\gamma(x^2 + y^2). \quad (7)$$

Уравнения (1) и (7) образуют систему уравнений, называемую математической моделью в приближении γ -плоскости, и используют для описания крупномасштабной динамики атмосферы в окрестности полюса, а также при изучении течений во вращающихся сосудах. В качестве области течения в таком приближении обычно используют всю плоскость, но рассматривают течения в некоторой окрестности центра координат $(0, 0)$, которому соответствует полюс планеты.

В данной статье для численного моделирования расчетной областью для решения уравнения (7) является прямоугольник $D = \{-a < x < a, -b < y < b\}$. На границах области D возможны различные краевые условия для ψ . В случае замкнутой области течения такими условиями являются

$$\psi|_{x=-a} = \psi|_{x=a} = \psi|_{y=-b} = \psi|_{y=b} = 0. \quad (8)$$

Также могут рассматриваться периодические по пространственным переменным условия:

$$\psi|_{x=-a} = \psi|_{x=a}, \quad \psi|_{y=-b} = \psi|_{y=b}. \quad (9)$$

Условия (9) накладывают требования на правую часть уравнения (5) и, соответственно, начальную вихревую конфигурацию (3). Должны выполняться соотношения

$$\int_D \omega(x, y) dV \equiv \int_D (q_0(x, y) - f(x, y)) dV \equiv 0. \quad (10)$$

Таким образом, использование условий (9) применимо для численного исследования вихревых конфигураций, удовлетворяющих соотношению (10), например для диполя Ламба [Ламб, 1947]. Для других конфигураций далее будем использовать граничные условия (8). Для уменьшения влияния граничных условий на вихревую динамику в качестве расчетной области будем использовать D , а динамику жидкости — исследовать в области $\tilde{D} = \{-a/2 < x < a/2, -b/2 < y < b/2\}$. Такой подход позволяет смоделировать ситуацию геофизических течений в открытой области для начальных конфигураций, не удовлетворяющих (10).

2. Бессеточно-спектральный метод

Бессеточные вихревые методы основаны на свойстве пассивного переноса завихренности и решении систем уравнений вида (4). Методы различаются подходами к решению уравнения (7), то есть построением поля скорости частиц жидкости. Представленный метод является развитием численных подходов работ [Govorukhin, Ilin, 2009; Говорухин, 2011] применительно к решению задачи (1), (7), в области D или \tilde{D} при условиях (9) и (3), удовлетворяющему (10).

В основе метода лежит задание поля абсолютной завихренности значениями в N частицах с координатами $(x_i(t), y_i(t))$, $i = 1, \dots, N$. В каждой частице в начальный момент времени задается значение абсолютной завихренности $q^{(i)} = q_0(x_i(0), y_i(0))$ из условия (3), которое сохраняется

во времени, то есть $q(x_i(t), y_i(t)) \equiv q^{(i)}$. Координаты частиц в области D могут быть распределены равномерно в узлах прямоугольной сетки или случайным образом. Для повышения качества расчета начальное распределение частиц должно сохранять симметрию области течения или вихревой конфигурации. Динамика каждой жидкой частицы определяется уравнением (4), для решения которого необходимо находить поле скорости $(\psi_y, -\psi_x)$ в каждый момент времени из уравнения (7).

2.1. Аппроксимация поля завихренности

Поле абсолютной завихренности q на каждом временном шаге аппроксимируется по значениям в жидких частицах с помощью кусочной аппроксимации кубическими многочленами. Область D разделяется на $N_{box} = n_x \times n_y$ прямоугольных ячеек D_k , $k = 1, \dots, N_{box}$. Функция $q(x, y)$ представляется в виде

$$q(x, y) \approx \sum_{k=1}^{N_{box}} q^{(k)}(x, y). \quad (11)$$

Здесь функции $q^{(k)}(x, y)$ — многочлены относительно переменных x, y вида

$$q^{(k)}(x, y) = \begin{cases} \sum_{m,l=0,l+m \leq 3}^3 C_{lm}^{(k)} x^l y^m, & (x, y) \in D_k, \\ 0, & (x, y) \notin D_k, \end{cases} \quad (12)$$

где $C_{lm}^{(k)}$ — коэффициенты, которые находятся из условия минимизации выражения (метод наименьших квадратов):

$$\sum_m \left(\sum_{i,j=0,i+j \leq 3}^3 C_{ij}^{(k)} x_m^i y_m^j - q^{(m)} \right)^2. \quad (13)$$

Здесь суммирование по индексу m идет для частиц, принадлежащих ячейке с номером k . Применение подобных функций в задачах динамики идеальной несжимаемой жидкости обсуждалось в работе [Vera, Rebollo, 2001].

2.2. Аппроксимация поля скорости жидкости

Выражение для функции тока в каждый момент времени t разыскивается в виде отрезка ряда Фурье:

$$\psi \approx \sum_{i=1}^{k_x+1} \sum_{j=1}^{k_y+1} \psi_{ij} g_i(x) h_j(y), \quad (14)$$

где $g_i(x)$, $h_j(y)$ — тригонометрические базисные функции, ψ_{ij} — неизвестные коэффициенты. Для рассматриваемой здесь области D базисные функции имеют вид

$$\begin{aligned} g_i(x) &: \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi k(x+a)}{a}\right), \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi k(x+a)}{a}\right), k = 1, \dots, \frac{k_x+1}{2} \right\}, \\ h_j(y) &: \left\{ \frac{1}{\sqrt{2b}}, \frac{1}{\sqrt{b}} \sin\left(\frac{\pi k(y+b)}{b}\right), \frac{1}{\sqrt{b}} \cos\left(\frac{\pi k(y+b)}{b}\right), k = 1, \dots, \frac{k_y+1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что численное решение вида (14) с использованием базисных функций (15) удовлетворяет граничным условиям (9). Для поиска коэффициентов ψ_{ij} в каждый момент времени t из уравнения (7) применим глобальный метод Бубнова – Галёркина. После подстановки (14)

в уравнение (7) и проекции полученной невязки на каждую из комбинаций базисных функций $g_i(x)h_j(y)$ получим выражения для ψ_{ij} :

$$\begin{aligned}\psi_{ij} &= \frac{a^2 b^2}{\pi^2 (i^2 b^2 + j^2 a^2)} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(q(x, y) - \frac{\gamma}{2} (x^2 + y^2) \right) g_i(x) h_j(y) dx dy, \quad i > 1, j > 1, \\ \psi_{1j} &= \frac{b^2}{\pi^2 j^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(q(x, y) - \frac{\gamma}{2} (x^2 + y^2) \right) h_j(y) dx dy, \\ \psi_{i1} &= \frac{a^2}{\pi^2 i^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(q(x, y) - \frac{\gamma}{2} (x^2 + y^2) \right) g_i(x) dx dy, \\ \psi_{11} &= \frac{a^2 b^2}{\pi^2 (b^2 + a^2)} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(q(x, y) - \frac{\gamma}{2} (x^2 + y^2) \right) g_1(x) h_1(y) dx dy.\end{aligned}\tag{16}$$

Заметим, что коэффициенты перед интегралами в (16) стремятся к нулю при росте i и j , что позволяет взять конечное число членов ряда Фурье. Для вычисления коэффициентов ψ_{ij} необходимо проинтегрировать правые части в выражениях (16), заменив функцию $q(x, y)$ ее аппроксимацией вида (11), (12), то есть вычислить интегралы вида

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^{N_{box}} \iint_{D_k} \left(q^{(k)}(x, y) - \frac{\gamma}{2} (x^2 + y^2) \right) g_i(x) h_j(y) dx dy, \quad i = 1, \dots, k_x, \quad j = 1, \dots, k_y.\tag{17}$$

При использовании функций вида (12) и (15), используемых в рассматриваемой задаче, все интегралы (17) вычисляются аналитически. Результатом являются выражения для ψ_{ij} , зависящие от коэффициентов $\{C_{ij}^{(k)}, k = 1, \dots, N_{box}, i, j = 0, 1, 2, 3, i + j < 3\}$, которые вычисляются для каждого момента времени из условий (13). В силу громоздкости мы эти выражения здесь не приводим.

2.3. Расчет динамики жидких частиц

После вычисления коэффициентов ψ_{ij} разложения (14) может быть получено значение функции тока в любой точке $(x, y) \in D$ для каждого момента времени t . Тогда аппроксимация системы уравнений (4) динамики жидких частиц принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl} g_k(x_i) \frac{\partial h_l}{\partial y}(y_i), \\ \dot{y}_i = - \sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl} \frac{\partial g_k}{\partial x}(x_i) h_l(y_i), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.\tag{18}$$

Выражения для производных базисных функций (15) по пространственным переменным в правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18) вычисляются аналитически. Коэффициенты ψ_{ij} необходимо вычислять для каждого t с использованием схемы, описанной в предыдущем разделе.

Система (18) является гамильтоновой, а поле скорости, описываемое системой (18), сохраняет соленоидальность исходного векторного поля (4), что требует использования специальных методов решения задачи Коши (см. [Sanz-Serna, Calvo, 1994]). Как было показано в работе [Говорухин, 2014], для решения уравнений динамики множества частиц эффективным является псевдосимплектический метод Рунге–Кутты, предложенный в [Aubry, Chartier, 1998]. Этот метод используется нами при решении задачи Коши для системы (18).

В процессе вычислений частица с координатами (x_i, y_i) может покинуть расчетную область D . В этом случае, согласно наложенным условиям периодичности по пространству в области D , предполагается, что эта частица входит в область течения через противоположную часть границы. Проверка принадлежности частицы D и необходимая корректировка ее координат (в случае покидания области) проводятся в предложенной схеме расчета после каждого шага метода Рунге – Кутты.

3. Тестовые расчеты

Для проверки адекватности и применимости численной схемы проведен ряд тестовых расчетов при следующих параметрах: расчетной областью D являлся квадрат со сторонами $2a = 20$, $2b = 20$; количество жидких частиц $N = 160\,000$; для аппроксимации поля абсолютной завихренности расчетная область D разбивалась на $n_x \times n_y = 35 \times 35$ ячеек прямоугольной формы; число членов отрезка ряда (14) для аппроксимации функции тока $\psi(x, y)$ $k_x = 31$, $k_y = 31$; шаг по времени псевдосимплектического метода Рунге – Кутты $h = 0.005$. В качестве тестовых выбраны течения с известным поведением.

Тестовым примером в случае граничных условий (9) является расчет динамики диполя Ламба [Ламб, 1947] на плоскости в отсутствие влияния планетарного вращения, то есть при $\gamma = 0$ в уравнении (7). Эта вихревая конфигурация движется с постоянной скоростью U , не изменяя формы. В начальный момент времени поле завихренности $q_0(x, y)$ для этой конфигурации определяется формулой

$$q_0(r, \Theta) = \begin{cases} \frac{2\lambda U}{J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \cos(\Theta), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (19)$$

где r, Θ — полярные координаты на плоскости, J_i — функция Бесселя первого рода порядка i , $\lambda R = 3.831 \dots$ для гладкости поля завихренности, $R = 0.5$ — радиус диполя, $U = 0.3$ — скорость. $\lambda R = 3.831 \dots$ является нулем функции Бесселя первого рода.

Расчет проводился для $t \in [0, 100]$. За данный временной интервал диполь прошел через D более 10 раз вдоль оси x . Результаты приведены на рис. 1. В момент времени $t = 0$ центр диполя расположен в начале координат, а в момент времени $t = 100$ — в точке $(-3.7, 0)$. Видно, что вихревая структура сохранилась, линии тока жидких частиц не изменились. То есть предложенный численный метод позволяет с высокой точностью рассчитывать на больших отрезках времени динамику вихревых структур на плоскости без учета силы Кориолиса. В этом случае в качестве области \tilde{D} можно рассматривать всю область D .

Для замкнутой квадратной области течения с граничными условиями (8) проводились обширные тестовые расчеты. Их результаты приведены в работах [Говорухин, 2011; Govorukhin, Ilin, 2009; Govorukhin, 2013].

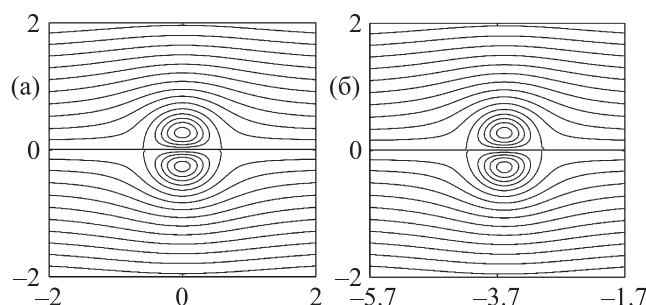


Рис. 1. Линии тока диполя Ламба в различные моменты времени: а) $t = 0$; б) $t = 100$

4. Численные эксперименты

Описанный метод был применен для анализа влияния планетарного вращения на динамику вихревых конфигураций. В качестве области D был выбран квадрат с длиной стороны $2a = 2b = 12$ с граничными условиями (8). В случае всей плоскости при отсутствии относительной завихренности траекториями жидких частиц являются окружности. Для области D и условий (8) при $\omega = 0$ форма траекторий меняется, но все траектории также являются замкнутыми кривыми. Основываясь на том, что сохраняется топологическая структура линий тока, порождаемых планетарным вращением, мы предполагаем, что использование условий (8) позволяет изучить влияние силы Кориолиса в окрестности полюса на динамику вихревых структур.

При $\omega \neq 0$ топология траекторий жидких частиц зависит от направлений вращения вихревой конфигурации и планетарного вращения (см. рис. 2). При сонаправленности собственного вращения вихревой конфигурации и планетарного вращения линии тока слегка деформируются (см. рис. 2 для $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.05$). В случае разнонаправленности вращений — в области D могут формироваться застойные зоны, пример см. на рис. 2 для $\gamma = -0.05$, что является следствием граничных условий (8).

Изучалась динамика вихревой конфигурации, состоящей из четырех распределенных круглых вихревых пятен постоянной завихренности, расположенных в вершинах квадрата со сторонами $2a$ и $2b$ и центром в точке $(0, 0)$. Распределение завихренности такой конфигурации в начальный момент времени может быть описано в виде

$$q_0(x, y) = \begin{cases} Q, & (x \pm \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 \leq R^2, \\ 0, & (x \pm \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 > R^2, \end{cases} \quad (20)$$

где $(\pm\alpha, \pm\beta)$ — координаты центров четырех вихревых пятен, $Q = \text{const}$ — значение завихренности, R — радиус вихревых пятен. Во всех расчетах в (20) в начальный момент времени принималась $Q = -1$ и координаты центров вихревых пятен $\alpha = \beta = 1.0$. Изучалось влияние изменения радиуса R и параметра γ на сохранение или разрушение вихревой структуры.

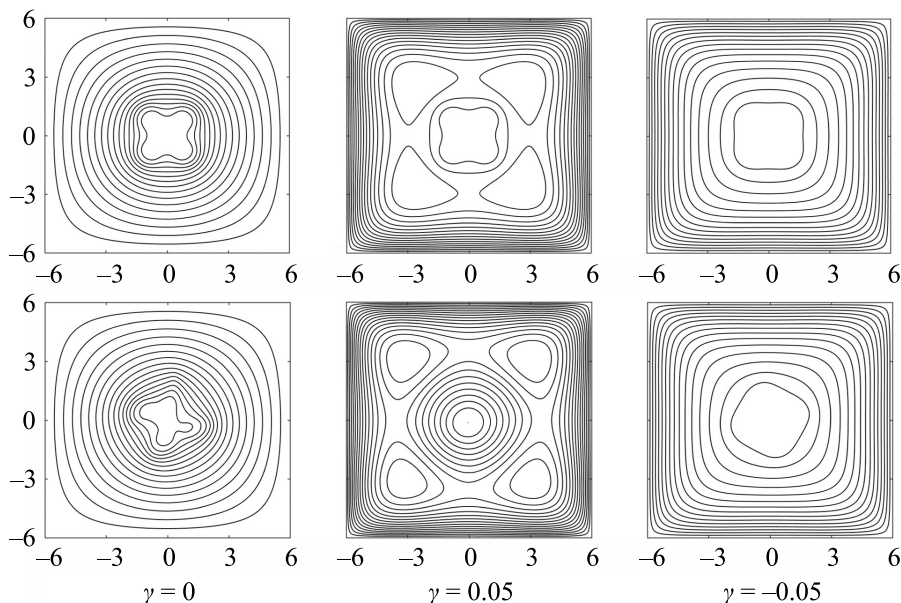


Рис. 2. Влияние величины параметра γ на вихревую конфигурацию (20) при $r = 0.6$ и $Q = -1$ в моменты времени $t = 0$ и $t = 500$

Большинство численных экспериментов проводилось с параметрами метода, приведенными в предыдущем разделе. Для контроля численных результатов ряд расчетов был проведен с большей детализацией метода. В этом случае D разбивалась на $n_x \times n_y = 45 \times 45$ ячеек, число членов отрезка ряда Фурье (14) $k_x = 51$, $k_y = 51$, а шаг метода Рунге – Кутты $h = 0.005$. Изменение параметров метода не оказало существенного влияния на полученные результаты. Вычисления проводились для трех значений $\gamma = 0, 0.05, -0.05$ и различных радиусов R вихревых пятен (20) на временном интервале $t \in [0, 300]$.

При малых $R \leq 0.5$ (см. рис. 3) в отсутствие планетарного вращения, $\gamma = 0$, вся вихревая конфигурация вращается по часовой стрелке вокруг общего центра завихренности с постоянной скоростью, определяемой суммарной относительной завихренностью. Скорость вращений мала: например, для $R = 0.5$ конфигурация совершает полный оборот за временной интервал $\tau \approx 100$, вихревые пятна не взаимодействуют и практически не меняют формы (см. верхний ряд на рис. 3). При наличии силы Кориолиса, $\gamma \neq 0$, динамика вихревой конфигурации немного меняется, но не претерпевает качественных перестроек. При $\gamma = 0.05$, что соответствует планетарному вращению в сторону вращения конфигурации, в момент времени $t = 35$ происходит симметричная деформация всех четырех пятен, но топология вихревой структуры не меняется. В случае же $\gamma = -0.05$ динамика вихревой конфигурации схожа со случаем отсутствия планетарного вращения (см. верхний ряд на рис. 3).

При увеличении радиуса в зависимости от величины γ становится возможным взаимодействие вихревых пятен и формирование квазистационарных вихревых структур (см. рис. 4). При $\gamma = -0.05$ (см. средний ряд) планетарное вращение оказывает существенное влияние на динамику вихревой конфигурации. В этом случае собственное вращение структуры и планетарное вращение разнонаправлены, и это способствует взаимодействию вихревых пятен. В момент времени $t = 25$ происходит деформация пятен, а затем, при $t = 54$, пятна начинают взаимодействовать, обмениваясь завихренностью, начинается формирование квазистационарной структу-

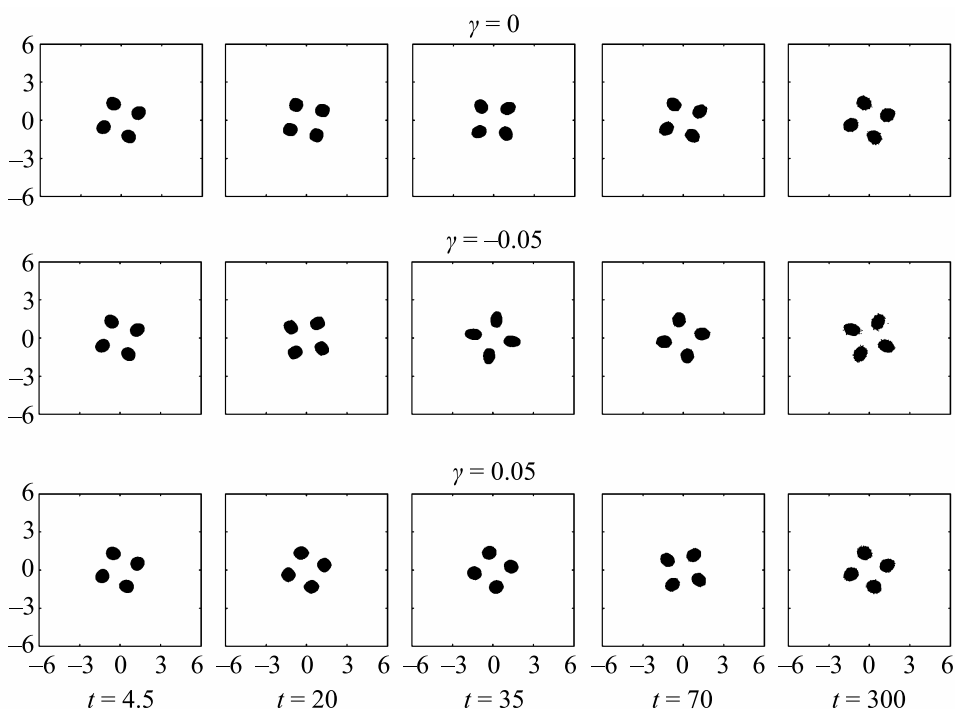


Рис. 3. Распределение завихренности на плоскости (x, y) при $t = 4.5, 20, 35, 70, 300$ для вихревой конфигурации (20) при $R = 0.5$ и $\gamma = 0, -0.05, 0.05$

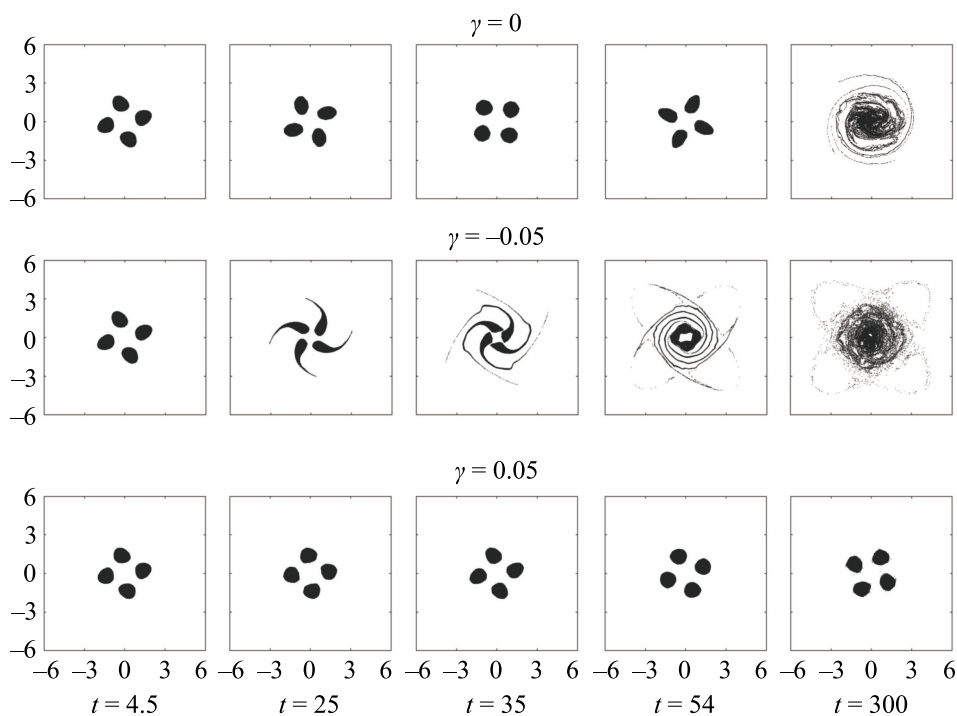


Рис. 4. Распределение завихренности на плоскости (x, y) при $t = 4.5, 25, 35, 54, 300$ для вихревой конфигурации (20) при $R = 0.6$ и $\gamma = 0, -0.05, 0.05$

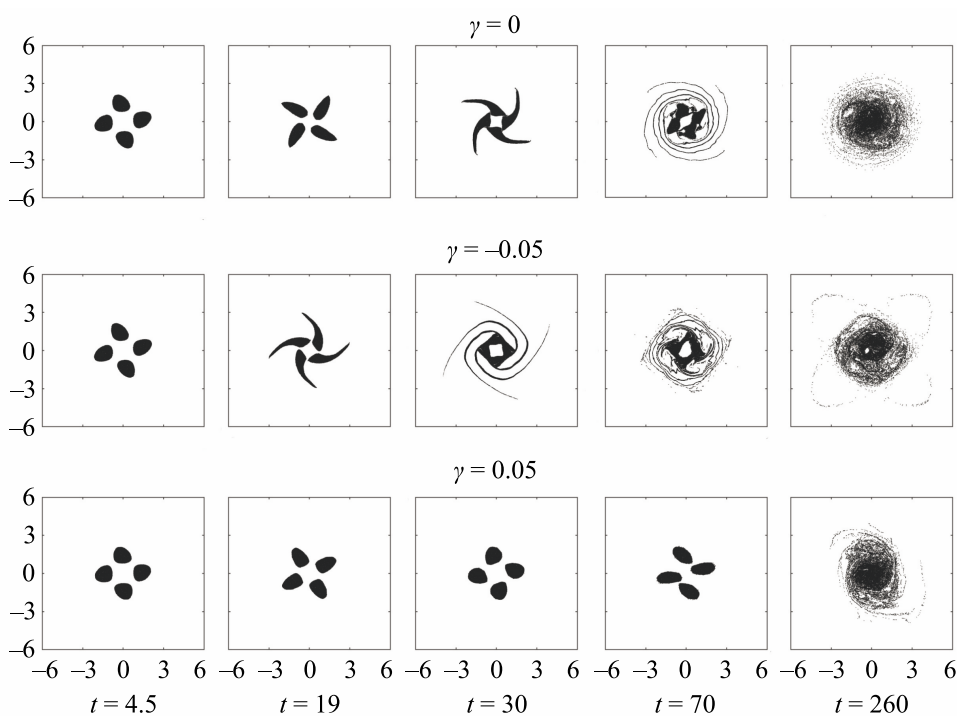


Рис. 5. Распределение завихренности на плоскости (x, y) при $t = 4.5, 19, 30, 70, 260$ для вихревой конфигурации (20) при $R = 0.65$ и $\gamma = 0, -0.05, 0.05$

ры, которая окончательно формируется при $t \approx 162$ и остается таковой вплоть до $t = 300$. В случае $\gamma = 0.05$ сила Кориолиса препятствует деформации вихревых пятен, то есть планетарное вращение стабилизирует исходную вихревую конфигурацию. В отсутствие планетарного вращения вихревые пятна деформируются, и их взаимодействие приводит к распаду симметричной структуры на больших временах. Таким образом, для $R = 0.6$ взаимодействие вихревых пятен отсутствует только при $\gamma = 0.05$. Начиная с $R = 0.65$, стабилизировать вихревую конфигурацию планетарным вращением не удастся (см. рис. 5). К моменту времени $t = 70$ исходная конфигурация разрушается с потерей симметрии, что приводит к полному перемешиванию при $t = 260$. При $\gamma = -0.05$ наблюдается динамика, схожая со случаем для $R = 0.6$ (см. средний ряд на рис. 5).

Обозначим через R_0 значение радиуса вихрей в (20), при котором вихри начинают обмениваться завихренностью при $\gamma = 0$. Вычисления показали, что критическое значение R_γ , при котором начинается этот процесс, при $\gamma \neq 0$ зависит от значения и знака параметра γ (скорости планетарного вращения и его направления относительно вращения вихревой структуры). При разнонаправленном вращении ($\gamma < 0$) взаимодействие начинается при меньших радиусах начальной конфигурации ($R_\gamma < R_0$), а сонаправленное вращение затягивает начало взаимодействия, т. е. $R_\gamma > R_0$ (см. рис. 5).

5. Заключение

В статье предложен метод расчета вихревой динамики, применимый для широкого круга двумерных геофизических и гидродинамических задач. Его преимуществом является относительно невысокая вычислительная сложность, что позволяет проводить расчеты на достаточно больших временах с высокой детализацией вихревых структур. Проведено решение ряда тестовых задач; результаты расчетов хорошо согласуются с точными аналитическими решениями и известными результатами вычислительных экспериментов. В расчетах на больших временах сохраняются квазистационарные тестовые вихревые конфигурации и их симметрия, из чего следует, что разработанная численная схема корректна и устойчива.

С помощью развитого вычислительного подхода продолжено изучение влияния планетарного вращения на вихревую динамику на сфере. Показано, что наличие силы Кориолиса (параметр $\gamma \neq 0$) оказывает существенное влияние на формирование и взаимодействие вихревых структур. В частности, можно сделать следующий вывод о влиянии параметра γ на динамику рассмотренной структуры из четырех одинаковых вихрей: если собственное вращение конфигурации и планетарное вращение сонаправлены, то это стабилизирует вихревую структуру. Если же вращения противоположны, то это замедляет вращение, усиливает взаимодействие вихревых пятен и может даже менять его направление, а в некоторых случаях — приводить к новой близкой к квазистационарной вихревой структуре.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания и рекомендации, которые позволили устранить неточности в первоначальной версии статьи и улучшить результаты вычислений.

Список литературы (References)

- Белоцерковский С. М., Гиневский А. С.* Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. — М.: Физматлит, 1995.
Belotserkovskii S. M., Ginevsky A. S. Modelirovaniye turbulentnykh struy i sledov na osnove metoda diskretnykh vikhrey [Modeling of turbulent jets and traces based on the method of discrete vortices]. — Moscow: Fizmatlit, 1995 (in Russian).
- Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. — М.–Ижевск: ИКИ, 2005.
Borisov A. V., Mamaev I. S. Mathematical methods in the dynamics of vortex structures. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005 (in Russian).

- Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 6. — С. 1133–1147.
Govorukhin V.N. A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2011. — Vol. 51, No. 6. — P. 1061–1073.
- Говорухин В. Н. О выборе метода интегрирования уравнений движения множества жидких частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2014. — Т. 54, № 4. — С. 177–190.
Govorukhin V.N. On the choice of a method for integrating the equations of motion of a set of fluid particles // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — Vol. 54, No. 4. — P. 706–718.
- Говорухин В. Н. Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 8. — С. 1491–1505.
Govorukhin V.N. Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2016. — Vol. 56, No. 8. — P. 1474–1487.
- Говорухин В. Н. Параллельная реализация бессеточного метода расчета течений идеальной несжимаемой жидкости // Выч. мет. программирование. — 2017. — Т. 18, вып. 2. — С. 175–186.
Govorukhin V.N. Parallel implementation of a meshfree method for calculating flows of an ideal incompressible fluid // *Numerical methods and programming [Vychislitel'nye Metody i Programmirovaniye]*. — 2017. — Vol. 18, No. 2. — P. 175–186 (in Russian).
- Григорьев Ю. Н., Вишивков В. А. Численные методы «частицы-в-ячейках». — Новосибирск: Наука, 2000.
Grigoryev Yu. N., Vshivkov V.A. Chislennyye metody “chastitsy-v-yacheykakh” [Numerical methods “particle-in-cells”]. — Novosibirsk: Nauka, 2000 (in Russian).
- Должанский Ф. В. Лекции по геофизической гидродинамике. — М.: Изд-во ИВМ РАН, 2006. — 378 с.
Dolzhanskiy Ph. V. Lektsii po geofizicheskoy gidrodinamike [Lectures on geophysical hydrodynamics]. — Moscow: IVM RAN, 2006 (in Russian).
- Дынникова Г. Я. Использование быстрого метода решения «задачи N тел» при вихревом моделировании течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, № 8. — С. 1458–1465.
Dynnikova G. Ya. Fast technique for solving the N -body problem in flow simulation by vortex methods // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2009. — Vol. 49, No. 8. — P. 1389–1396.
- Ламб Г. Гидродинамика. — М.–Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1947.
Lamb H. Hydrodynamics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1932.
- Педлоски Д. Геофизическая гидродинамика. — Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. — New York: Springer-Verlag, 1979.
- Anderson C., Greengard C. On vortex methods // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1985. — Vol. 22. — P. 413–440.
- Aubry A., Chartier P. Pseudo-symplectic Runge-Kutta methods // *BIT*. — 1998. — Vol. 38, No. 3. — P. 439–461.
- Beale J., Maida A. Vortex methods. II: Higher order accuracy in two and three dimensions // *Math. Comput.* — 1982. — Vol. 39. — P. 29–52.
- Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D. Vortex methods. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- Dritschel D. G. A general theory for two-dimensional vortex interactions // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1995. — Vol. 293. — P. 269–303.
- Govorukhin V.N., Il'in K. I. Numerical study of an inviscid incompressible flow through a channel of finite length // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. — 2009. — Vol. 60, No. 12. — P. 1315–1333.
- Govorukhin V.N. A Meshfree Method for the Analysis of Planar Flows of Inviscid Fluids // *Meshfree Methods for Partial Differential Equations VI* / M. Griebel, M. A. Schweitzer (eds.). — Springer Berlin Heidelberg, 2013. — Vol. 89 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering. — P. 171–180.

- Hald O.H.* Convergence of vortex methods for Euler's equations. II // *SIAM J. Numer. Anal.* — 1979. — Vol. 16. — P. 726–755.
- Liu J., Xin Z.* Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2D euler equations with vortex sheet data // *Comm. on Pure and Appl. Math.* — 1995. — Vol. 48, No. 6. — P. 611–628.
- Liu J.-G., Xin Z.* Convergence of a Galerkin method for 2-D discontinuous Euler flows // *Communications on Pure and Applied Mathematics.* — Vol. 53, No. 6. — P. 786–798.
- Meunier P., Ehrenstein U., Leweke T., Rossi M.* A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices // *Physics of Fluids.* — 2002. — Vol. 14, No. 8. — P. 2757–2766.
- Mohammadian A., Marshall J.* A “vortex in cell” model for quasi-geostrophic, shallow water dynamics on the sphere // *Ocean Modelling.* — 2010. — Vol. 32, No. 3-4. — P. 132–142.
- Sanz-Serna J. M., Calvo M. P.* Numerical Hamiltonian Problems. — Chapman and Hall, 1994.
- Van Heijst G.* Topography effects on vortices in a rotating fluid // *Meccanica.* — 1994. — Vol. 29, No. 4. — P. 431–451.
- Vera E. Ch., Rebollo T. Ch.* On cubic spline approximations for the vortex patch problem // *Applied Numerical Mathematics.* — 2001. — Vol. 36. — P. 359–387.
- Wang C., Sun J., Ba Y.* A semi-Lagrangian Vortex-In-Cell method and its application to high-Re lid-driven cavity flow // *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow.* — 2017. — Vol. 27, No. 6. — P. 1186–1214.