КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 Т. 11 № 3 С. 397–412
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-397-412

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.6

Исследование формирования структур Тьюринга под влиянием волновой неустойчивости

М. Б. Кузнецов

Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

E-mail: kuznetsovmb@mail.ru

Получено 02.04.2019, после доработки — 24.04.2019.
Принято к публикации 30.04.2019.

Рассматривается классическая для нелинейной динамики модель «брюсселятор», дополненная третьей переменной, играющей роль быстро диффундирующего ингибитора. Модель исследуется в одномерном случае в области параметров, где проявляются два типа диффузионной неустойчивости однородного стационарного состояния системы: волновая неустойчивость, приводящая к самопроизвольному формированию автоволн, и неустойчивость Тьюринга, приводящая к самопроизвольному формированию стационарных диссипативных структур, или структур Тьюринга. Показано, что благодаря субкритическому характеру бифуркации Тьюринга взаимодействие двух неустойчивостей в данной системе приводит к самопроизвольному формированию стационарных диссипативных структур еще до прохождения бифуркации Тьюринга. В ответ на различные случайные шумовые возмущения пространственно-однородного стационарного состояния в исследуемой параметрической области в окрестности точки двойной бифуркации в системе могут устанавливаться различные режимы: как чистые, состоящие только из стационарных или только автоволновых диссипативных структур, так и смешанные, при которых разные режимы проявляются в разных участках расчетного пространства. В рассматриваемой параметрической области система является мультистабильной и проявляет высокую чувствительность к начальным шумовым условиям, что приводит к размытию границ между качественно разными режимами. При этом даже в зоне доминирования смешанных режимов с преобладанием структур Тьюринга значительную вероятность имеет установление чистого автоволнового режима. В случае установившихся смешанных режимов достаточно сильное локальное возмущение в участке расчетного пространства, где проявляется автоволновой режим, может инициировать локальное формирование новых стационарных диссипативных структур. Локальное возмущение стационарного однородного состояния в исследуемой области параметрического пространства приводит к качественно схожей карте устоявшихся режимов, при этом зона доминирования чистых автоволновых режимов расширяется с увеличением амплитуды локального возмущения. В двумерном случае в системе не устанавливаются смешанные режимы. При эволюции системы в случае появления локальных структур Тьюринга под воздействием автоволнового режима со временем они заполняют все расчетное пространство.

Ключевые слова: диффузионная неустойчивость, локализованные структуры, мультистабильность

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00411. Автор благодарит А. А. Полежаева и А. В. Колобова за плодотворные обсуждения.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2019 VOL. 11 NO. 3 P. 397–412
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-397-412

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.6

Investigation of Turing structures formation under the influence of wave instability

M. B. Kuznetsov

P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences,
53 Leninskiy Prospekt, Moscow, 119991, Russia

E-mail: kuznetsovmb@mail.ru

Received 02.04.2019, after completion — 24.04.2019.
Accepted for publication 30.04.2019.

A classical for nonlinear dynamics model, Brusselator, is considered, being augmented by addition of a third variable, which plays the role of a fast-diffusing inhibitor. The model is investigated in one-dimensional case in the parametric domain, where two types of diffusive instabilities of system's homogeneous stationary state are manifested: wave instability, which leads to spontaneous formation of autowaves, and Turing instability, which leads to spontaneous formation of stationary dissipative structures, or Turing structures. It is shown that, due to the subcritical nature of Turing bifurcation, the interaction of two instabilities in this system results in spontaneous formation of stationary dissipative structures already before the passage of Turing bifurcation. In response to different perturbations of spatially uniform stationary state, different stable regimes are manifested in the vicinity of the double bifurcation point in the parametric region under study: both pure regimes, which consist of either stationary or autowave dissipative structures; and mixed regimes, in which different modes dominate in different areas of the computational space. In the considered region of the parametric space, the system is multistable and exhibits high sensitivity to initial noise conditions, which leads to blurring of the boundaries between qualitatively different regimes in the parametric region. At that, even in the area of dominance of mixed modes with prevalence of Turing structures, the establishment of a pure autowave regime has significant probability. In the case of stable mixed regimes, a sufficiently strong local perturbation in the area of the computational space, where autowave mode is manifested, can initiate local formation of new stationary dissipative structures. Local perturbation of the stationary homogeneous state in the parametric region under investidation leads to a qualitatively similar map of established modes, the zone of dominance of pure autowave regimes being expanded with the increase of local perturbation amplitude. In two-dimensional case, mixed regimes turn out to be only transient — upon the appearance of localized Turing structures under the influence of wave regime, they eventually occupy all available space.

Keywords: diffusive instability, localized structures, multistability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 397–412 (Russian).

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 18-31-00411. The author thanks A. A. Polezhaev and A. V. Kolobov for fruitful discussions.

Введение

Явление самоорганизации заключается в возникновении в системе качественного перехода в результате согласованного взаимодействия множества ее элементов, приводящего к повышению ее сложности. Самоорганизация широко проявляется в системах живой и неживой природы, далеких от состояния термодинамического равновесия и обменивающихся веществом и энергией с окружающей средой. Ее классическими примерами являются химическая реакция Белоусова – Жаботинского, формирование узоров на шкурах животных и образование ячеек Бенара — конвективных шестигранных структур в слое вязкой жидкости при вертикальном градиенте температуры. В более широком смысле феномен самоорганизации определил все переходные моменты в истории нашего мира: формирование химических элементов, звезд, планет, жизни, человеческого общества. Всеобщность этого явления делает его крайне важным для научного исследования, так как закономерности, выявленные при изучении одной системы, могут быть применены к другим системам различной природы. Однако именно необходимость междисциплинарного подхода препятствовала систематическому изучению самоорганизации вплоть до середины прошлого века.

Одной из первых ключевых работ в этой области стало исследование Алана Тьюринга (1952 г.), в котором он, не имея специальных знаний по биологии, предположил, что ключом к многим явлениям морфогенеза, то есть формирования органов у живых организмов, является возникновение неустойчивости пространственно-однородного состояния в системе распределенных по ткани взаимодействующих химических веществ в некотором диапазоне длин волн [Turing, 1990]. Тьюринг сопроводил свою гипотезу демонстрацией структур, полученных в качестве решений математических моделей. Поначалу его исследование оставалось незамеченным, но впоследствии его гипотеза нашла широкое применение во множестве исследований систем различной природы — не только биологической [Koch, Meinhardt, 1994; Ouyang, Swinney, 2009; Гиричева, 2016], но и физической [Willebrand, 1992; Astrov et al., 1996; Nakamasu et al., 1996], химической [Mazin et al., 1990; Castets et al., 1991; Vanag, 2003], социологической [Mamaev, Saffman, 2010; Pelz, 2019], — в рассмотрении которых ключевыми процессами являются локальное взаимодействие элементов и их случайное блуждание в пространстве.

Тьюринг выделил два типа диффузионной неустойчивости, приводящих к формированию структур различного характера при возмущении пространственно-однородного состояния системы бесконечно малыми флуктуациями, что равносильно их самопроизвольному формированию, поскольку такие флуктуации всегда присутствуют в реальных системах. Первая из неустойчивостей, названная в честь Тьюринга, дает начало стационарным пространственно-неоднородным структурам, которые также принято называть структурами Тьюринга. Как правило, в двумерном пространстве они представляют собой гексагонально расположенные пятна или лабиринтные структуры [Shoji, 2003]. При достаточно большой закритичности, то есть при большом диапазоне длин неустойчивых волн, и при специфических начальных условиях могут быть получены более сложные стационарные структуры, являющиеся тем не менее вариациями их основных типов [Berenstein, 2003]. Вторая неустойчивость, которую обычно называют волновой неустойчивостью, приводит к образованию автоволн различного типа, нестационарных и неоднородных в пространстве. При малой закритичности для волновой неустойчивости характерны фазовые волны, связанные с колебаниями в каждой точке пространства, примерами которых являются стоячие и бегущие волны [Zhabotinsky, 1995]. При этом в двумерном пространстве уже при малой закритичности стоячие волны в результате своего взаимодействия демонстрируют широкое разнообразие структурных форм [Dolnik, 1999]. При большой закритичности волновая неустойчивость порождает триггерные волны, или волны переключения, расходящиеся по пространству от осциллирующих источников [Zhabotinsky, 1995; Vanag, 2002]. Конкретный вид установившегося режима зависит от начальных и граничных условий, при этом в двумерном пространстве характерными случаями как фазовых, так и триггерных волн являются концентрические и спиральные волны.

Как показывает исследование математических моделей, в которых присутствуют диффузионные неустойчивости обоих типов, их одновременное проявление может приводить к различным более сложным пространственно-временным режимам. В работе [Nicola, 2002] в одномерном пространстве были продемонстрированы дрейфующие участки бегущих волн на фоне структур Тьюринга и, наоборот, дрейфующие участки структур Тьюринга на фоне бегущих волн. В работе [Yang, 2002] при относительно большой закритичности волновой бифуркации был получен режим, состоящий из осциллирующих с малой амплитудой локализованных структур Тьюринга, от которых расходятся триггерные волны. При этом был найден аналог такого режима в двумерном пространстве, в котором локализованные пятна являются центрами спиральных волн. Также в этой работе в одномерном пространстве были продемонстрированы модулированные структуры Тьюринга и модулированные стоячие волны, возникающие при кратных длинах нестабильных волн двух неустойчивостей. Данным режимам не были найдены аналоги в двумерном пространстве: было отмечено, что при соответствующих значениях параметров при возбуждении малым шумом система всегда эволюционирует к одному из «чистых» режимов. Однако в исследовании [Борина, Полежаев, 2013] было продемонстрировано получение модулированной бегущей волны в системе с двумя диффузионными неустойчивостями при подходящем начальном возбуждении.

В перечисленных работах рассматривались модельные системы с тремя переменными, что является необходимым минимумом для получения волновой неустойчивости в системах типа «реакция – диффузия». Использование более сложных систем позволяет получить более изощренные структуры. Например, в работе [Yang, 2003] была рассмотрена система из пяти уравнений, моделирующая взаимодействие двух связанных подсистем. В численных исследованиях модели были продемонстрированы сложные режимы, в которых волны различного типа распространяются по различным структурам Тьюринга. Кроме того, при отношении критической длины волны для волновой неустойчивости к критической длине волны для неустойчивости Тьюринга, близком к $\sqrt{3}$, был продемонстрирован режим, в котором соседние пятна в гексагональной решетке структур Тьюринга осциллируют с разностью фаз $2\pi/3$.

Особый интерес представляет тот факт, что режимы, свойственные любой из диффузионных неустойчивостей, могут проявляться и при устойчивом пространственно-однородном стационарном состоянии — при условии, что соответствующая ей бифуркация в пространстве параметров, приводящая к потере им устойчивости, является субкритической. В этом случае до прохождения бифуркации у системы, кроме тривиального устойчивого состояния, существуют и другие. При этом слабые возмущения тривиального состояния затухают, достаточно сильные пространственно-однородные возмущения приводят к формированию структур, соответствующих рассматриваемой неустойчивости, а достаточно сильные локальные возмущения приводят к формированию локализованных структур, таких как уединенные волновые пакеты, сохраняющие свою ширину при распространении [Vanag, 2004], «прыгающие» уединенные волны [Yang, 2006] и локализованные структуры Тьюринга [Кузнецов, Полежаев, 2015]. В работе [Kuznetsov, 2017] было продемонстрировано, что последние являются устойчивыми при достаточно большом расстоянии до бифуркационной линии в пространстве параметров, однако при относительно малой докритичности структуры Тьюринга они могут достраиваться, заполняя весь предоставленный объем, в ответ на малое возмущение локализованной структуры.

В работе [Vanag, 2006] были продемонстрированы формирование и эволюция осциллонов, уединенных колеблющихся структур, возникающих в ответ на жесткое локальное возбуждение системы при наличии в ее параметрическом пространстве субкритических бифуркаций для диффузионных неустойчивостей обоих типов. Тем не менее взаимодействие диффузионных неустойчивостей, где решающее значение имеет субкритичность одной или обеих бифуркаций, остается слабоизученной темой. В данной работе исследуется поведение модельной системы, проявляющей оба типа диффузионной неустойчивости, при субкритической бифуркации Тьюринга. Впервые демонстрируется, что взаимодействие данных неустойчивостей может приводить к самопроизвольному формированию стационарных диссипативных структур еще до прохождения бифуркации Тьюринга. Также проводится исследование пространственно-временных режимов, возникающих в окрестности точки двойной бифуркации.

Модель

В данной работе рассматривается расширение классической для нелинейной динамики модели «брюсселятор», которая была предложена в 1968 году Ильей Пригожиным и Рене Лефевром как минимальная математическая модель, воспроизводящая осцилляторное поведение в нераспределенной системе [Prigogine, 1968]. Эта модель была создана для теоретического исследования осцилляций в химических реакциях, впервые описанных десятью годами ранее Борисом Белоусовым [Белоусов, 1959]. Используемая здесь вариация брюсселятора выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu(a-(1+b)u+u^2v-cu+dw)+D_u\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= bu-u^2v+D_v\Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= cu-dw+D_w\Delta w. \end{aligned} \tag{1}$$

Оригинальная двухкомпонентная модель содержит два уравнения, для u и v, и является нераспределенной, то есть не включает члены диффузии, при этом для нее $\mu=1$, $c=d=0$. В пространственно-распределенной модели при соответствующих соотношениях коэффициентов диффузий проявляется неустойчивость Тьюринга. Как уже было указано выше, чистая волновая неусточивость, при которой стационарное состояние системы устойчиво в отсутствие диффузии, может возникнуть только в системе с тремя или более компонентами. Для возможности возникновения волновой неустойчивости в систему добавляется быстро диффундирующая переменная w, по смыслу представляющая собой нереактивную форму переменной u, единственные реакции для которой — это переходы между двумя состояниями. Такое расширение системы является классическим подходом, оно было использовано в некоторых из упомянутых выше статей [Yang, 2002; Vanag, 2003; Vanag, 2002].

Здесь и далее при численных расчетах следующие параметры остаются неизменными: фактор временного масштаба μ, постоянные концентрации имеющихся в избытке условных реагентов a и b, скорость перехода переменной u в нереактивное состояние, c, и коэффициенты диффузии переменных u и w. Базовый набор для этих параметров включает следующие их значения:

$$\mu=5, \quad a=1, \quad b=3.45, \quad c=2.3, \quad D_u=0.01, \quad D_w=10. \tag{2}$$

Значения параметров скорости перехода переменной w в активное состояние, d, и коэффициента диффузии переменной v, D_V, варьируются для получения различных динамических режимов. Положение бифуркационных линий для обеих неустойчивостей в пространстве параметров (d, D_V) было рассчитано по методике, представленной в статье [Борина, Полежаев, 2011]. Ее основой является линейный анализ системы, позволяющий установить наличие неустойчивых волн при различных значениях параметров модели и выявить диапазон их длин. Эта задача решается с помощью дисперсионного уравнения, которое для исследуемой системы имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} -\mu(1+b+c-2uv)-k^2D_u-\lambda & \mu u^2 & d\mu \\ b-2uv & -u^2-k^2D_v-\lambda & 0 \\ c & 0 & -d-k^2D_w-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

где $k = 2\pi/l$ — волновое число, обратно пропорциональное длине волны l. При определенном наборе параметров пространственно-однородное стационарное состояние системы устойчиво для всех длин волн, если $\forall i \in 1,2,3\ \forall k\ \mathrm{Re}(\lambda_i)(k) < 0$. Возможны два качественно различных варианта для потери его устойчивости, которые могут выполняться одновременно: появление для некоторой длины волны действительного положительного корня λ_i, что соответствует бифуркации Тьюринга, и появление для некоторой длины волны пары комплексно-сопряженных корней $\lambda_{i,j}$ с положительной действительной частью, что соответствует волновой бифуркации. На рис. 1 представлены графики зависимости действительной и мнимой частей двух значимых корней дисперсионного уравнения от волнового числа для двух наборов параметров, при которых проявляются разные типы неустойчивостей (третий корень всегда является отрицательным).

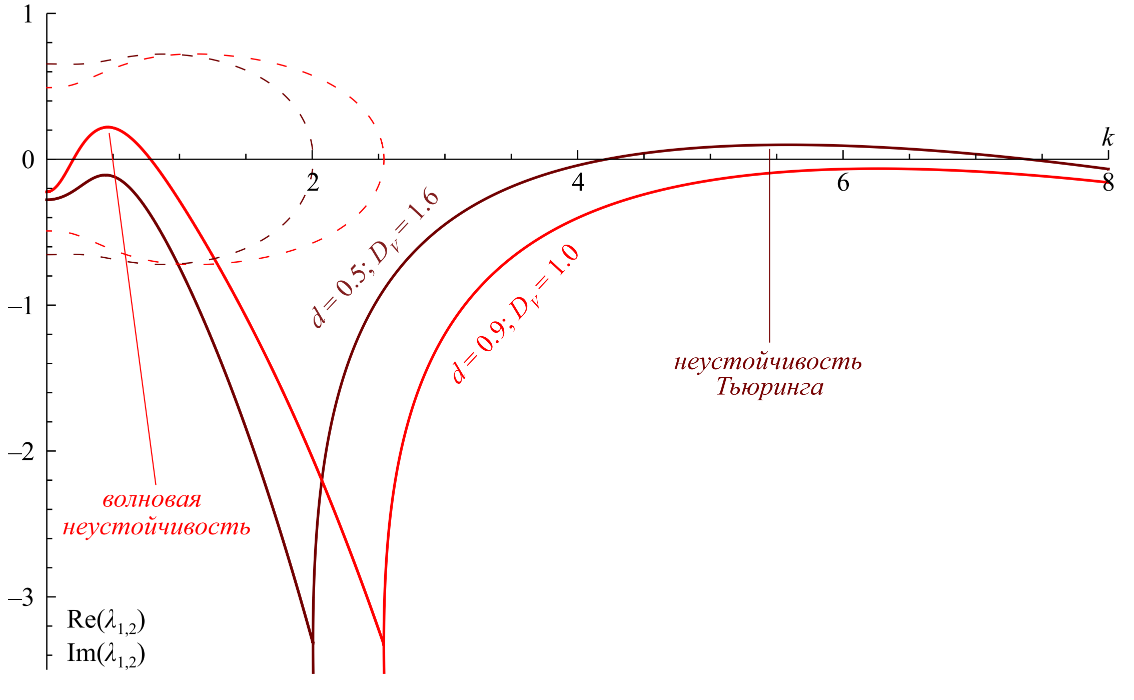

Рис. 1. Зависимость действительной части (сплошные линии) и мнимой части (пунктирные линии) корней дисперсионного уравнения (3) $\lambda_{1,2}$ от волнового числа k при базовом наборе параметров (2) и указанных значениях параметров d и D_V

Результаты

Поведение модели исследовалось в одномерной области размером $L = 60$, в которой при любом из используемых наборов параметров умещается несколько критических длин волн, возникающих в результате волновой неустойчивости. Уравнения решались с использованием метода расщепления по физическим процессам, то есть на каждом шаге по времени уравнения для реакции и диффузии рассчитывались последовательно. Шаг по пространству был подобран таким образом, чтобы корректно воспроизводить возникающие структуры Тьюринга; шаг по времени был подобран таким образом, чтобы максимально уменьшить время счета при сохранении работоспособности используемого для решения уравнения диффузии неявного метода Кранка–Николсон. Для решения уравнений реакции применялся метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Было проверено, что уменьшение шагов по пространству и времени не влияет качественно на результат. На границах использовались условия нулевого потока. Если не указано иное, в качестве начальных условий было использовано малое случайное возбуждение стационарного состояния ($u_0 = a = 1$; $v_0 = b/a = 3.45$, $w_0 = ac/d = 2.3/d$): в каждой расчетной ячейке переменной u задавалось значение в диапазоне от $1 - 5 \cdot 10^{-6}$ до $1 + 5 \cdot 10^{-6}$ с шагом $2 \cdot 10^{-7}$. Расчеты каждый раз производились вплоть до формирования установившегося режима.

На рис. 2 проиллюстрирована эволюция системы при двух наборах параметров, дисперсионные кривые для которых изображены на рис. 1. Установившиеся режимы, представляющие собой стационарные структуры Тьюринга, продемонстрированы в верхней части рисунка. На средних графиках показана динамика переменной u, при этом на обоих графиках белый цвет соответствует любому ее значению больше трех, что сделано для того, чтобы сделать начальную динамику системы различимой. На нижних графиках показана зависимость концентрации переменной u от времени в указанных точках пространства, соответствующих максимумам образовавшихся структур Тьюринга. Рис. 2, *а* относится к случаю тьюринговской неустойчивости при отсутствии волновой. Первоначальный шум приводит к формированию низкоамплитудной стоячей волны сложной формы с неравномерным расстоянием между максимумами, соответствующими волновым числам от 4.8 до 7.3, находящимися в диапазоне неустойчивых мод. Ее вид при $t = 80$ показан на верхнем графике пунктирной линией. Поначалу амплитуда волны в каждой точке нарастает экспоненциально с относительно медленной скоростью, но при достижении локальной концентрацией переменной u значения около 1.1 практически одновременно в двух точках возле правой границы, при $x = 58.9$ и $x = 60$, происходит резкий скачок увеличения концентрации u. Такое качественное изменение связано с возбуждением субкритических тьюринговских мод, которые находятся в диапазоне больших волновых чисел и приводят к формированию узких структур с резким градиентом переменных, что характерно для субкритической бифуркации Тьюринга. Последующие локальные возбуждения субкритических мод и взаимодействие формирующихся структур Тьюринга приводят к крайне сложной динамике системы, относительно которой можно сделать некоторые качественные замечания. Прежде всего близко зарождающиеся структуры ингибируют формирование друг друга, и в стационарном состоянии структуры в основном находятся на большем расстоянии друг от друга, чем расстояние между пиками инициирующей их стоячей волны. К примеру, первое возбуждение в положениях двух соседних пиков возле правой границы приводит к вымиранию обеих структур. Следующее возбуждение субкритических мод при $x = 57.8$ приводит к формированию первой устойчивой структуры Тьюринга. Дальнейшее возбуждение сразу трех структур левее нее также приводит к их вырождению. В целом, как хорошо видно из установившегося стационарного распределения, нахождение вблизи структуры других структур ингибирует ее амплитуду. На нижнем графике зависимости амплитуды структуры с максимумом при $x = 57.8$ от времени видно, как после первоначального выброса амплитуда уединенной структуры устанавливается на значении около 28, которое затем уменьшается под влиянием трех образовавшихся рядом структур, а после их вырождения плавно увеличивается до стационарного значения. Рассматриваемая структура в установившемся режиме оказывается наиболее удаленной от других и имеет максимальную амплитуду. Минимальную же амплитуду имеет структура из пары около середины расчетной области, расстояние между которыми соответствует расстоянию между пиками первоначальной стоячей волны. Справа от этой пары находится самый большой свободный от структур Тьюринга участок пространства. Тем не менее было проверено, что достаточно сильное локальное возбуждение может инициировать формирование в нем еще одной структуры. Стоит также отметить,

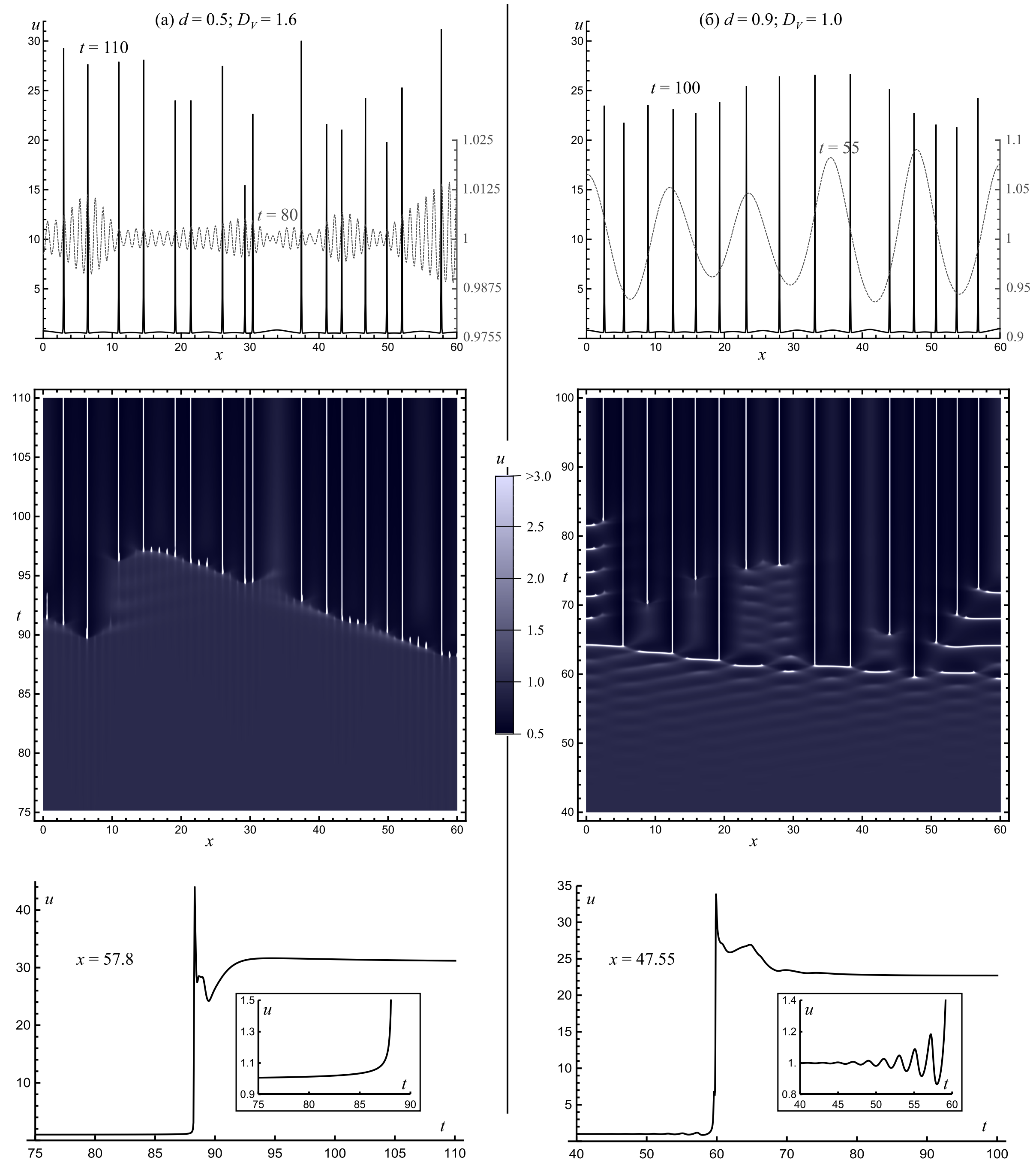

Рис. 2. Формирование структур Тьюринга в системе (1) при шумовом возмущении однородного стационарного состояния при базовом наборе параметров (2) и указанных значениях параметров d и D_V. Дисперсионные кривые для рассматриваемых случаев показаны на рис. 1. Верхние рисунки демонстрируют установившиеся стационарные структуры Тьюринга, а также промежуточные распределения переменной u в указанные моменты; средние — пространственно-временную развертку начальной эволюции системы; нижние — амплитуду переменной u в указанных координатах, вставки показывают увеличенные версии начальных частей графиков. Используются граничные условия нулевого потока

что при меньшей закритичности неустойчивости Тьюринга стационарное состояние является более равномерным из-за того, что первоначальная стоячая волна состоит из меньшего количества волновых мод и сама является более равномерной.

Рис. 2, *б* относится к случаю волновой неустойчивости в отсутствие неустойчивости Тьюринга, при этом тем не менее образование структур Тьюринга возможно при достаточно сильном возмущении системы. Первоначальный шум приводит к формированию низкоамплитудной стояче-бегущей волны с расстояниями между максимумами, соответствующими волновым числам $0.5 < k < 0.55$, находящимися в диапазоне неустойчивых мод (см. рис. 1). Со временем в системе начинает происходить смена режима от фазовых волн к триггерным, которая изначально визуально проявляется как смена формы волны около ее пучности с синусоидальной на более острую и последующий высокоамплитудный выброс с разделением на две бегущие в противоположном направлении волны с дальнейшим их гашением. При втором таком выбросе с пиком при $x = 47.55$ формируется первая структура Тьюринга с пиком в этой же точке пространства. Аналогично рассмотренному выше случаю формирование остальных структур влияет на ее амплитуду, зависимость которой от времени представлена на нижнем графике. Стоит отметить, что ко времени качественного перехода в волновом режиме максимальные значения концентрации переменной u составляют ≈ 1.3, что существенно превышает ее концентрацию, при которой возбуждались субкритические моды Тьюринга при неустойчивости Тьюринга. Интересно, что первый более высокоамплитудный выброс у правой границы не приводит к формированию структуры Тьюринга; как будет отмечено далее, возбуждение субкритичных мод неустойчивости Тьюринга не происходит при слишком сильном локальном возмущении. Последующие структуры Тьюринга также формируются не на позиции пиков источников триггерных волн, амплитуда которых значительно вырастает со временем. Вместо этого в системе возникают сложные структуры, состоящие из триггерной волны и возникающей на ее краю структуры Тьюринга, которая далее сохраняет свое положение. Кроме того, формирование некоторых из стационарных структур — например, с пиками при $x = 8.9$; 15.85; 44 — происходит без решающего влияния волновой неустойчивости, за счет явления достройки локализованных структур Тьюринга. На участке от $x = 22$ до $x = 31$ ко времени $t \approx 65$ формируется сложный режим, состоящий из стоячих волн весьма сложной формы, которые также уступают место структурам Тьюринга, как и далее единственный участок около левой границы, где волновой режим остается вплоть до $t \approx 82$.

На рис. 3 продемонстрирована начальная эволюция системы при других наборах параметров, соответствующих области волновой неустойчивости до прохождения бифуркации Тьюринга, приводящая к качественно разным установившимся режимам. Рис. 3, *а* соответствует случаю с большой докритичностью бифуркации Тьюринга (так что самодостройки образующихся уединенных структур не происходит) и малой закритичностью волновой бифуркации (так что волновой режим гаснет между стационарными структурами, не инициируя дальнейшее их образование). На рис. 3, *б*, *в* показаны смешанные режимы, при которых часть пространства занята структурами Тьюринга, а остальная часть — триггерными волнами большой амплитуды, не вызывающими образование новых структур Тьюринга и не позволяющими достроиться уже существующим. Наличие в системе волнового режима вызывает концентрационные колебания в структурах Тьюринга, причем амплитуда колебаний зависит от близости к триггерным волнам. В случае, которому соответствует рис. 3, *б*, значения концентраций переменной u в двух структурах возле правой границы меняются лишь во втором знаке после запятой, в то время как колебания центральных структур различимы гораздо более отчетливо; на вставке показана зависимость концентрации u при $x = 27.4$, что соответствует максимуму одной из центральных структур Тьюринга. Падение концентрации u при $t = 70$ связано с ингибирующим воздействием образовавшихся рядом структур, при этом амплитуда колебаний также уменьшается, так как новые структуры частично экранируют триггерные волны. На вставке к рис. 3, *в* показана аналогичная зависимость концентрации u при $x = 7.7$, что соответствует максимуму единственной в данном случае структуры Тьюринга, которая образуется при смене волнового режима от фазовых волн к триггерным. При установлении режима триггерных волн они имеют слишком большую амплитуду для инициации формирования новых структур Тьюринга. В обоих случаях,

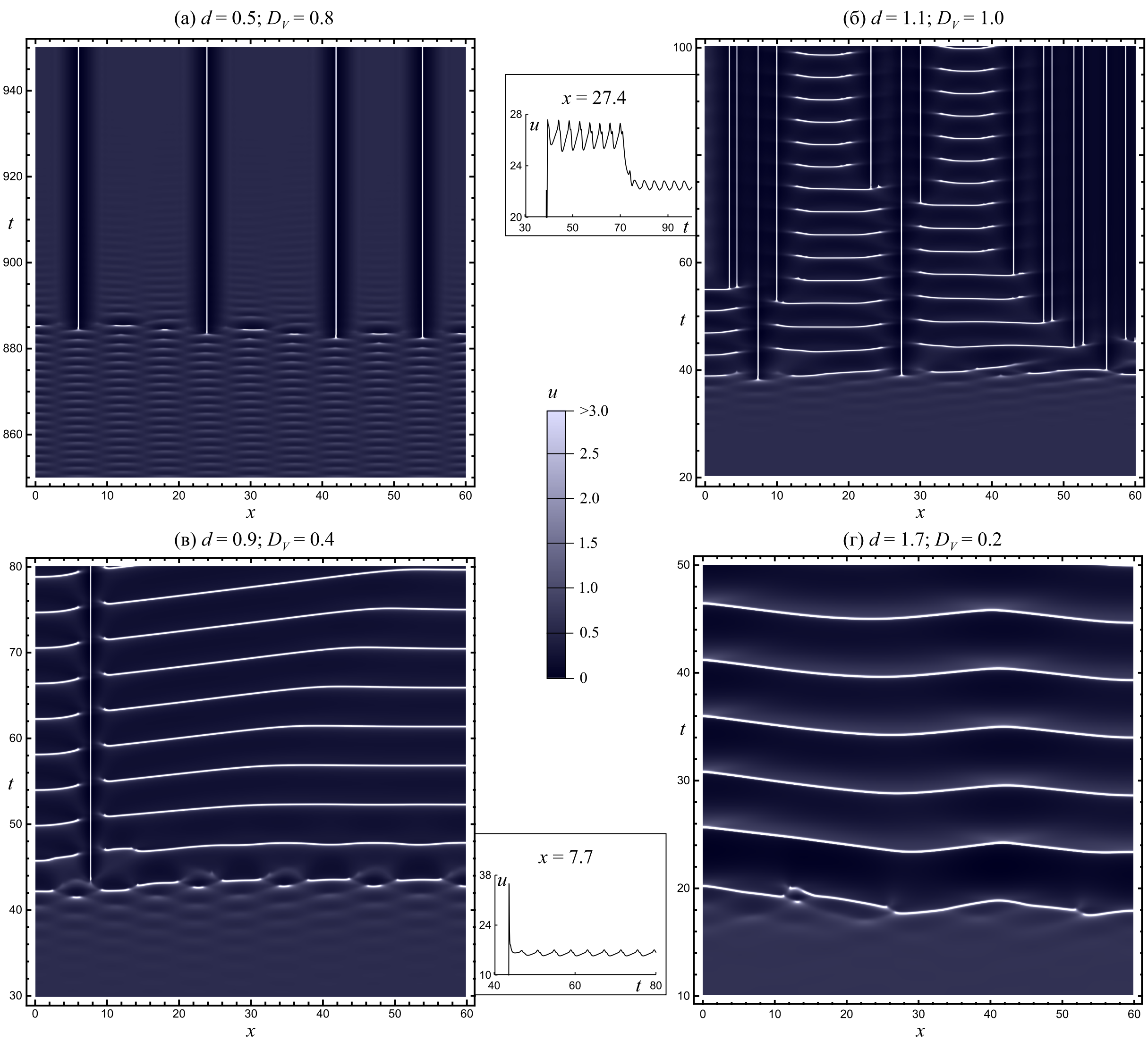

Рис. 3. Пространственно-временные развертки начальных этапов эволюции системы (1) при шумовом возмущении однородного стационарного состояния при базовом наборе параметров (2) и указанных значениях параметров d и D_V. Используются граничные условия нулевого потока

соответствующих смешанным режимам, достаточное, но не слишком сильное локальное возмущение системы приводит к образованию новых уединенных структур Тьюринга и их достройке, которая в случае, соответствующем рис. 3, *б*, приводит к чистому режиму стационарных структур, а в случае, соответствующем рис. 3, *в*, — к образованию локального скопления из нескольких структур Тьюринга, после чего достройка прекращается. На рис. 3, *г* представлена динамика системы при большей волновой закритичности и большей докритичности бифуркации Тьюринга, так что в системе устанавливается чистый режим триггерных волн, при этом он наступает значительно раньше и волны при нем имеют большую амплитуду по сравнению со случаем на рис. 3, *в*. В этом случае в установившемся режиме есть два синхронных источника волн, которые затухают при столкновении, однако итоговое количество источников зависит от начального шумового возбуждения, и при данном наборе параметров (как и при любом другом, приводящем к формированию режима триггерных волн) в системе при данном размере пространства чаще возникает режим с одним источником. Известно, что свойства триггерных волн в достаточно протяженных системах не зависят от их длины, что отличает их от фазовых волн, которые подстраиваются под длину системы [Zhabotinsky, 1995].

Стоит отметить, что в работе [Yang, 2002], посвященной изучению взаимодействия диффузионных неустойчивостей суперкритического типа, был описан аналогичный представленному здесь смешанный режим. Однако, как было отмечено в указанном исследовании, каждая осциллирующая структура Тьюринга в нем сама являлась источником триггерных волн. В расчетах, выполненных здесь, расположение источников в целом не коррелирует с расположением структур Тьюринга, как видно на примере рис. 3, *в*. При наличии группы из нескольких структур Тьюринга триггерные волны, расположенные по разные стороны от нее, гасятся при приближении к ней и не взаимодействуют друг с другом. В случаях с уединенной структурой Тьюринга триггерная волна затухает при приближении к ней, но стимулирует колебание вторичного источника с противоположной стороны от максимума структуры Тьюринга. Оно, в свою очередь, приводит к формированию волн, бегущих в противоположных направлениях, одна из которых сразу же затухает при сближением со структурой Тьюринга, а вторая продолжает движение в направлении первичной волны, сохраняя ее скорость. Это явление продемонстрировано на рис. 3, *в*, где триггерная волна распространяется от источника на левой границе. Тот факт, что в упомянутой работе исследовалась аналогичная система «брюсселятор», расширенная добавлением быстро диффундирующей переменной, позволяет предположить, что описанные здесь особенности являются следствием субкритичности бифуркации Тьюринга.

На рис. 4 показана область параметров, в которой производились численные расчеты модели. Неустойчивость Тьюринга проявляется выше линии ее бифуркации, волновая неустойчи-

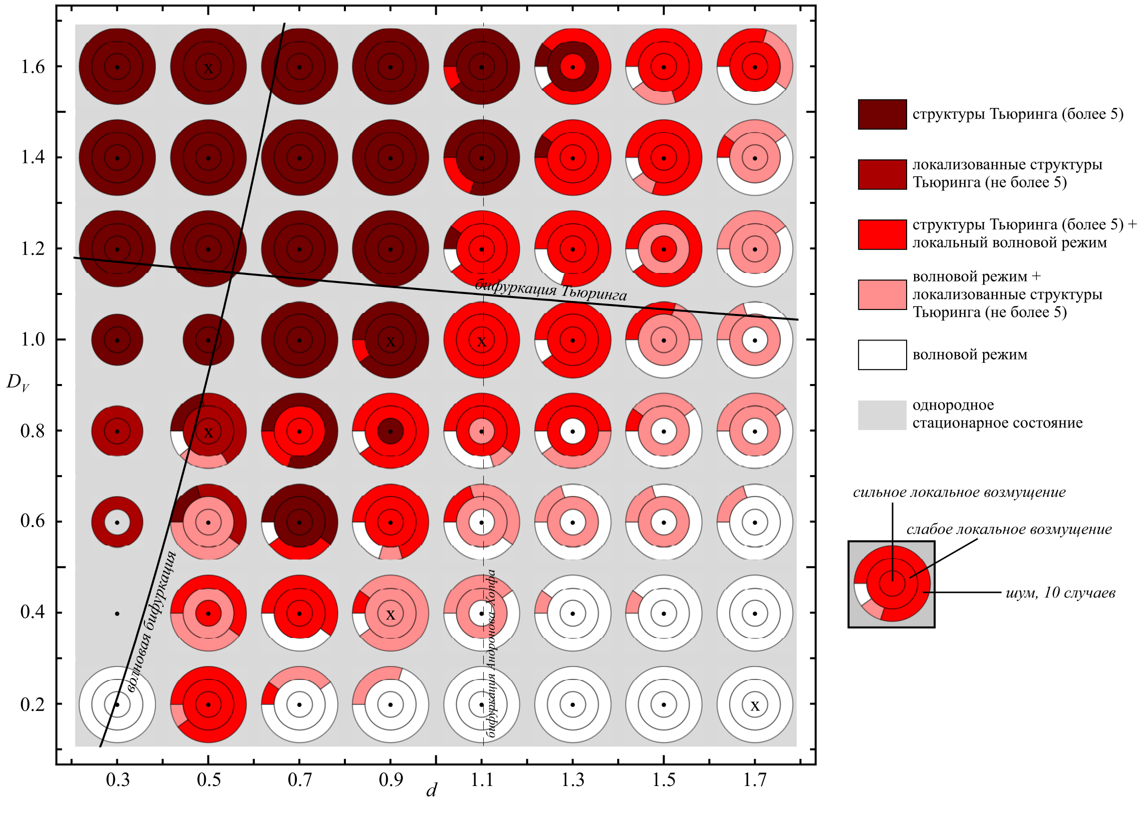

Рис. 4. Реакция системы (1) на различные возмущения однородного стационарного состояния при базовом наборе параметров (2) и вариации параметров d и D_V. Крестиками отмечены значения параметров, для которых примеры формирования структур в ответ на шумовое возмущение продемонстрированы на рис. 2 и 3

вость — правее линии ее бифуркации. Пунктирной линией отмечено положение бифуркации Хопфа, проявляющейся в пространственно-нераспределенной системе (и поэтому не зависящей от D_V), при которой стационарное состояние теряет свою устойчивость и образуется решение в виде устойчивого цикла, что в пространственно-распределенной системе эквивалентно неустойчивости волновой моды с $k = 0$. Точки и крестики обозначают значения параметров, для которых проводились численные счеты, при этом крестики соответствуют значениям параметров, примеры эволюции системы для которых обсуждались выше. Стоит отметить, что тип волновой бифуркации не должен играть существенной роли в качественном поведении системы после прохождения волновой бифуркации. Тем не менее было проверено, что волновая бифуркация является суперкритической, о чем свидетельствуют вырождения локальных возмущений системы до ее бифуркации при шагах по пространству, не позволяющих сформироваться структурам Тьюринга.

С помощью круговых диаграмм отмечены типы установившихся режимов в ответ на различные возмущения пространственно-однородного стационарного состояния системы. Два внутренних круга соответствуют локальным возмущениям системы вида

$$u(x,0) = a + A/[1 + (x - L/2/0.1)^2], \tag{4}$$

представляющим собой узкую колоколообразную кривую с серединой в центре расчетной области. Внутренний круг соответствует сильному возмущению с $A = 10$, средний — относительно слабому возмущению с $A = 1$. Внешняя круговая диаграмма соответствует реакции системы на десять случайных шумовых возмущений. Разными оттенками выделено пять типов установившихся режимов, примеры которых продемонстрированы выше. Граница между смешанными режимами условна, принадлежность к одному из типов определяется по количеству структур Тьюринга в расчетной области.

В рассматриваемом диапазоне параметров исследуемая система мультистабильна и проявляет высокую чувствительность к начальным условиям, что приводит к отсутствию в параметрической области четких границ между качественно различными режимами. Тем не менее выделяются области доминирования разных типов режимов. Чистый тьюринговский режим устанавливается после прохождения бифуркации Тьюринга при отсутствии волновой неустойчивости и при ее малой закритичности (см. рис. 2, *а*); а также при малой докритичности бифуркации Тьюринга и либо при малой закритичности волновой бифуркации (см. рис. 2, *б*), либо в ответ на локальное возбуждение до прохождения волновой бифуркации. При увеличении закритичности волновой неустойчивости и докритичности тьюринговской неустойчивости начинается доминирование смешанных режимов, и доля волновых режимов в них постепенно растет. В правом нижнем углу параметрической области находится зона режима триггерных волн, где вероятность формирования структуры Тьюринга близка к нулю. Кроме того, роль волновых режимов увеличивается при приближении к линии волновой бифуркации, в области со значительной докритичностью бифуркации Тьюринга, где структуры Тьюринга не могут самодостраиваться, в то время как запертые между ними волны либо затухают, либо имеют малую амплитуду для возбуждения субкритических тьюринговских мод. Как видно из результатов при $d = 0.3$, $D_V = 0.2$, при совсем малой закритичности волновой бифуркации амплитуда изначально формирующихся фазовых волн вовсе оказывается недостаточной для образования хотя бы одной структуры Тьюринга.

В целом образование структур Тьюринга при влиянии волновой неустойчивости является крайне сложным процессом, и причины формирования или неформирования структуры Тьюринга в ответ на конкретное волновое возмущение вряд ли могут быть детально объяснены теоретически ввиду сложности динамики рассматриваемой системы, особенно при значительном удалении от бифуркационных линий. Интересно, что даже в области доминирования смешанных режимов с преобладанием структур Тьюринга значительную вероятность имеет образование устойчивого режима триггерных волн. Ключевое наблюдение качественного характера, которое уже отмечалось выше, состоит в том, что структуры Тьюринга образуются при воздействии достаточной, но не слишком большой амплитуды (хорошим примером является реакция системы на локальное возбуждение при $d = 0.3$, $D_V = 0.6$) и не образуются при развитом волновом режиме. В связи с этим, в частности, на границе доминирования чистого волнового режима в правой части параметрической области, после прохождения бифуркации Хопфа, слабое локальное возмущение непосредственно приводит к формированию локализованных структур Тьюринга, в то время как сильное — ускоряет развитие волнового режима, который далее не инициирует их образование. Зачастую структуры Тьюринга формируются при качественном переходе волнового режима от фазовых к триггерным волнам. При $d = 0.5$, $D_V = 0.2$ при эволюции системы долгое время поддерживается сложный волновой режим, включающий волны обоих типов, и в результате зачастую устанавливается смешанный режим с преобладанием структур Тьюринга, несмотря на то, что при настолько сильной докритичности бифуркации Тьюринга в отсутствие волновой неустойчивости уже прекращается формирование структур Тьюринга в ответ на локальное возбуждение, описываемое уравнением (4).

Численные расчеты модели также проводились в двумерном пространстве, однако из-за значительно возрастающих при этом вычислительных затрат на данный момент не было проведено аналогичного полноценного исследования реакции системы на различные виды возбуждений в широкой области параметров. Рис. 5 демонстрирует характерную эволюцию системы в двумерном пространстве. Предварительные результаты позволяют предположить, что в двумерном случае система не демонстрирует устоявшихся смешанных режимов. Если волновая неустойчивость инициирует формирование структур Тьюринга, что также в основном происходит при переходе волнового режима от фазовых к триггерным волнам (см. рис. 5, *а*), то под влиянием взаимодействия имеющихся структур Тьюринга с волнами, а также — при небольшой докритичности — под влиянием явления самодостройки формирующиеся структуры Тьюринга со временем заполняют все расчетное пространство.

Заключение

В данной работе было проведено систематическое исследование нелинейной системы, демонстрирующей два типа диффузионной неустойчивости, в окрестности точки пересечения линий субкритической бифуркации Тьюринга и суперкритической волновой бифуркации. Было показано, что еще до прохождения бифуркации Тьюринга в такой системе становится возможным самопроизвольное образование уединенных структур Тьюринга. Численные расчеты системы показали, что в одномерном случае установившиеся режимы при эволюции системы включают как чистые режимы (волновой и тьюринговский), так и смешанные. При этом система мультистабильна и имеет крайне высокую чувствительность к начальным условиям, что приводит к отсутствию в параметрической области четких границ между качественно разными режимами. Предварительные расчеты в двумерном случае позволяют предположить, что смешанные режимы в рассматриваемой системе могут возникнуть только как переходные от чистого автоволнового к чистому тьюринговскому режиму. Несмотря на то что данные результаты получены с использованием одной конкретной модели, универсальность, свойственная аналогичным явлениям, позволяет предположить, что качественно результаты сохранятся при взаимодействии рассматриваемых типов неустойчивостей и в других моделях, что будет проверено в дальнейшем.

Одним из ключевых условий для реализации неустойчивости Тьюринга является значительное различие в коэффициентах диффузии реагирующих веществ. Гипотеза Тьюринга о химической основе морфогенеза (образования частей тела организмов) долгое время подвергалась критике на том основании, что большинство морфогенов являются крупными белками, для которых при равных условиях различия в скорости диффузии на порядок и более сами по себе маловероятны ввиду близости их размеров [Nesterenko, 2017]. Результаты, полученные в данной

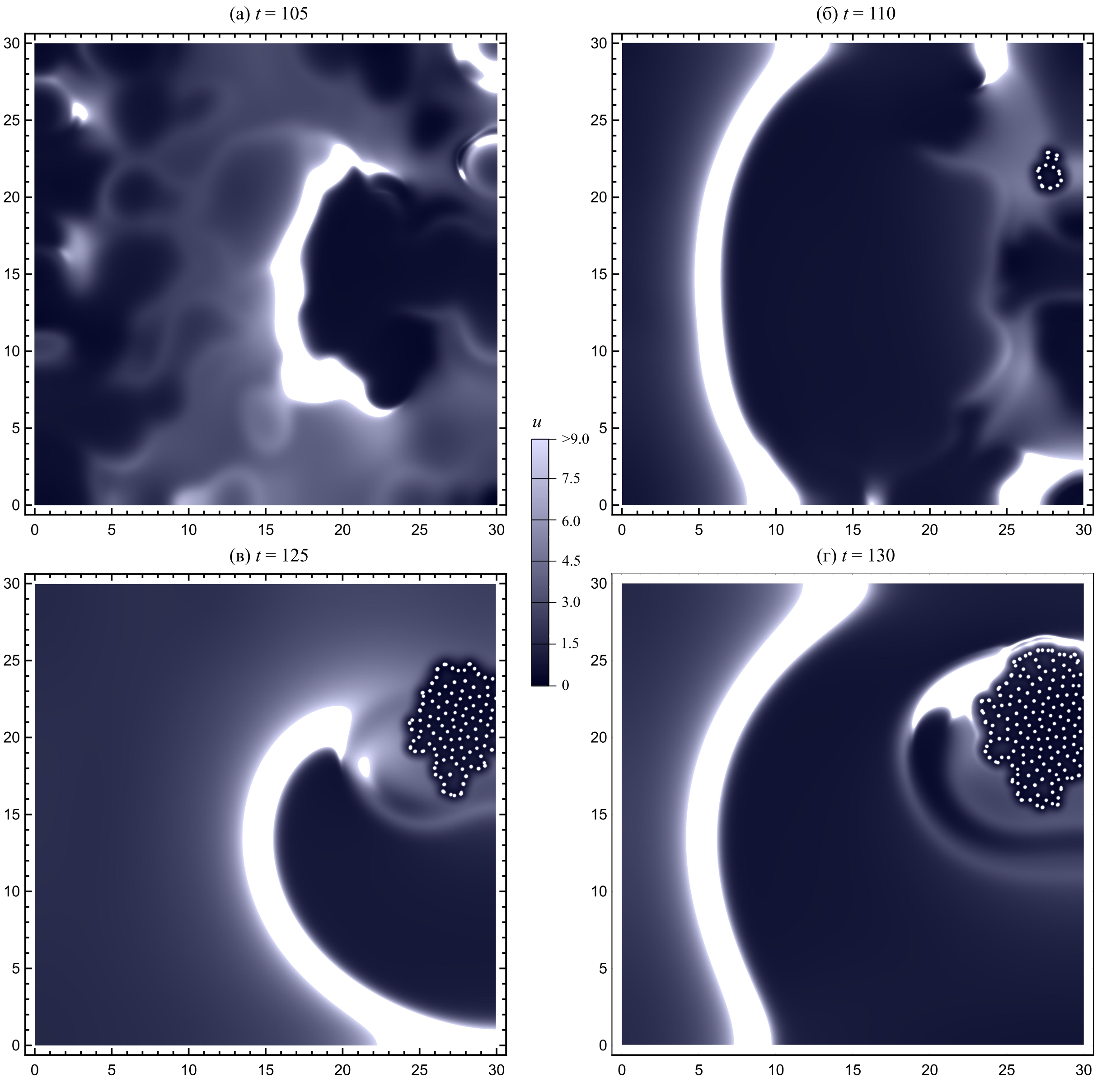

Рис. 5. Распределение переменной u системы (1) в четыре указанных момента времени при реакции системы на шумовое возмущение однородного стационарного состояния при базовом наборе параметров (2), $d = 0.6$ и $D_V = 0.1$ в двумерном пространстве. Используются граничные условия нулевого потока

работе, демонстрируют, что даже в теории для самопроизвольного образования структур Тьюринга выполнение условий неустойчивости Тьюринга не является обязательным, это может произойти опосредованно при инициации субкритических мод неустойчивости Тьюринга за счет другого механизма. В данной работе в качестве такого механизма выступает волновая неустойчивость. Ранее в работе [Mazin, 1996] обсуждался аналогичный механизм, в котором такую роль играла бифуркация Хопфа в двухкомпонентой системе. Интересно, что для рассматриваемой модельной системы влияние волновой неустойчивости в одномерном случае позволяет уменьшить на порядок отношение коэффициентов диффузии переменных, при которых возможно самопроизвольное формирование структур Тьюринга. Как показано в работе [Kuznetsov, 2017], для рассмотренной в той работе системы в двумерном случае зона в докритической для субкритической бифуркации Тьюринга области, где возможно образование уединенных структур Тьюринга в ответ на достаточное локальное возмущение, увеличивается по сравнению с одномерным случаем. На основании этого факта можно предположить, что для рассматриваемой здесь системы в двумерном случае зона, где возможно инициирование субкритических мод Тьюринга автоволновым режимом, также расширится, что позволит еще сильнее уменьшить отношение коэффициентов диффузии переменных, при которых возможно самопроизвольное формирование структур Тьюринга. В частности, для проверки этого предположения в дальнейшем планируется осуществить подробное исследование рассматриваемой системы в двумерном случае.

Список литературы (References)

Белоусов Б. П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 год. — М.: Медгиз, 1959. — С. 145–147.

Belousov B. P. Periodicheski dejstvuyushchaya reakciya i ee mekhanizm [Periodically operating reaction and its mechanism] // Collection of essays on radiation medicine for 1958. — Moscow: Medgiz, 1959. — P. 145–147 (in Russian).

Борина М. Ю., Полежаев А. А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа «реакция – диффузия» // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 135–146.

Borina M. Yu. Diffuzionnaya neustojchivost' v trekhkomponentnoj modeli tipa "reakciya – diffuziya" [Diffusion instability in a three-component model of the reaction-diffusion type] // Computer research and modeling. — 2011. — Vol. 3, No. 2. — P. 135–146 (in Russian).

Борина М. Ю., Полежаев А. А. Исследование механизмов формирования сегментированных волн в активных средах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 533–542.

Borina M. Yu., Polezhaev A. A. Issledovanie mekhanizmov formirovaniya segmentirovannyh voln v aktivnyh sredah [Study of the formation mechanisms of segmented waves in active media] // Computer research and modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 4. — P. 533–542 (in Russian).

Гиричева Е. Е. Моделирование состояния планктонного сообщества с учетом плотностнозависимой смертности и пространственной активности зоопланктона // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 549–560.

Giricheva E. E. Modelirovanie sostoyaniya planktonnogo soobshchestva s uchetom plotnostnozavisimoj smertnosti i prostranstvennoj aktivnosti zooplanktona [Modeling the state of plankton community with account of density-dependent mortality and spatial activity of zooplankton] // Computer research and modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 549–560 (in Russian).

Кузнецов М. Б., Полежаев А. А. Механизм образования осциллонов — уединенных колебательных структур // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1177–1184.

Kuznetsov M. B., Polezhaev A. A. Mekhanizm obrazovaniya oscillonov — uedinennyh kolebatel'nyh struktur [The mechanism of formation of oscillons — localized oscillatory structures] // Computer research and modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1177–1184 (in Russian).

Nakamasu A., Takahashi G., Teperick S., Kondo S. Hexagon and stripe Turing structures in a gas discharge system // Physics Letters A. — 1996. — Vol. 211, No. 3. — P. 184–190.

Berenstein I. A. Superlattice Turing structures in a photosensitive reaction-diffusion system // Physical review letters. —2003. — Vol. 91, No. 5. — P. 058302.

Mazin W., Rasmussen K., Mosekilde E., Borckmans P. Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern // Physical Review Letters. — 1990. — Vol. 64, No. 24. — P. 2953.

Dolnik M. A. Standing Waves in a Two-Dimensional Reaction- Diffusion Model with the Short-Wave Instability // The Journal of Physical Chemistry A. — 1999. — Vol. 103, No. 1. — P. 38–45.

Koch A., Meinhardt H. Biological pattern formation: from basic mechanisms to complex structures // Reviews of modern physics. — 1994. — Vol. 66, No. 4. — P. 1481.

Kuznetsov M. A. Pattern formation in a reaction-diffusion system of Fitzhugh-Nagumo type before the onset of subcritical Turing bifurcation // Physical Review E. — 2017. — Vol. 95, No. 5. — P. 052208.

Mamaev A., Saffman M. Pattern formation in a linear photorefractive oscillator // Optics communications. — 1996. — Vol. 128, No. 4-6. — P. 281–286.

Mazin W. A. Pattern formation in the bistable Gray – Scott model // Mathematics and Computers in Simulation. — 1996. — Vol. 40, No. 3-4. — P. 371–396.

Meixner M. A. Generic spatiotemporal dynamics near codimension-two Turing-Hopf bifurcations // Physical Review E. — 1997. — Vol. 55, No. 6. — P. 6690.

Ouyang Q., Swinney H. L. Interactions between zebrafish pigment cells responsible for the generation of Turing patterns // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2009. — Vol. 106, No. 21. — P. 8429–8434.

Nesterenko A. M. Morphogene adsorption as a Turing instability regulator: Theoretical analysis and possible applications in multicellular embryonic systems // PloS one. — 2017. — Vol. 12, No. 2. — P. e0171212.

Nicola E. M. Drifting pattern domains in a reaction-diffusion system with nonlocal coupling // Physical Review E. — 2002. — Vol. 65, No. 5. — P. 055101.

Castets V., Dulos E., Boissonade J., De Kepper P. P. Transition from a uniform state to hexagonal and striped Turing patterns // Nature. — 1991. — Vol. 352, No. 6336. — P. 610.

Pelz P. F. Similar size of slums caused by a Turing instability of migration behavior // Physical Review E. —2019. — Vol. 99, No. 2. — P. 022302.

Prigogine I. A. Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. II // The Journal of Chemical Physics. — 1968. — Vol. 48, No. 4. — P. 1695–1700.

Shoji H. A. Stripe // Journal of theoretical biology. — 2003. — Vol. 224, No. 3. — P. 339–350.

Mamaev A., Saffman M. Dissipation and displacement of hotspots in reaction-diffusion models of crime // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2010. — Vol. 107, No. 9. — P. 3961–3965.

Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis // Bulletin of mathematical biology. — 1990. — Vol. 52, No. 1-2. — P. 153–197.

Vanag V. K. Comparative analysis of packet and trigger waves originating from a finite wavelength instability // The Journal of Physical Chemistry A. — 2002. — Vol. 106, No. 46. — P. 11394–11399.

Vanag V. K. Diffusive instabilities in heterogeneous systems // The Journal of chemical physics. — 2003. — Vol. 119, No. 14. — P. 7297–7307.

Vanag V. K. Subcritical wave instability in reaction-diffusion systems // The Journal of chemical physics. — 2004. — Vol. 121, No. 2. — P. 890–894.

Vanag V. K. Resonance-induced oscillons in a reaction-diffusion system // Physical Review E. — 2006. — Vol. 73, No. 1. — P. 016201.

Willebrand H. A. Experimental Observation of Simultaneously Existing Moving and Standing Patterns in a Gas-Discharge System // Contributions to Plasma Physics. — 1992. — Vol. 32, No. 2. — P. 57–68.

Yang L. A. Pattern formation arising from interactions between Turing and wave instabilities // The Journal of chemical physics. — 2002. — Vol. 117, No. 15. — P. 7259–7265.

Yang L. A. Oscillatory Turing patterns in reaction-diffusion systems with two coupled layers // Physical review letters. — 2003. — Vol. 90, No. 17. — P. 178303.

Yang L. A. Jumping solitary waves in an autonomous reaction-diffusion system with subcritical wave instability // Physical Chemistry Chemical Physics. — 2006. — Vol. 8, No. 40. — P. 4647–4651.

Zhabotinsky A. M. Pattern formation arising from wave instability in a simple reaction-diffusion system // The Journal of chemical physics. — 1995. — Vol. 103, No. 23. — P. 10306–10314.