КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 Т. 11 № 3 С. 367–377
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-367-377

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.5

Приближение аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена

О. Г. Ровенская

Донбасская государственная машиностроительная академия,
Украина, 84313, г. Краматорск, ул. Академическая, д. 72

E-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

Получено 10.02.2019, после доработки — 10.03.2019.
Принято к публикации 28.03.2019.

Работа посвящена вопросам приближения периодических функций высокой гладкости средними арифметическими суммами Фурье. Наиболее естественным и простым примером линейного процесса аппроксимации непрерывных периодических функций действительной переменной является приближение элементами последовательностей частичных сумм ряда Фурье. Известно, что последовательности частичных сумм ряда Фурье не являются равномерно сходящимися на всем пространстве C 2π-периодических непрерывных функций. Значительное число работ данного направления посвящено изучению аппроксимативных свойств методов приближения, которые для заданной функции f образуются с помощью преобразований частичных сумм ее ряда Фурье и позволяют построить последовательности тригонометрических полиномов, которые равномерно сходятся для каждой функции $f \in C$. На протяжении последних десятилетий широко изучаются суммы Валле Пуссена и их частные случаи суммы Фейера. Одним из наиболее важных направлений в этой области является изучение асимптотического поведения верхних граней уклонений средних арифметических сумм Фурье по различным классам периодических функций. Методы исследования интегральных представлений уклонений тригонометрических полиномов, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье, возникли и получили свое развитие в работах С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, Н. П. Корнейчука, В. К. Дзядыка и их учеников.

Целью работы является систематизация известных результатов, касающихся приближения классов периодических функций высокой гладкости средними арифметическими суммами Фурье, и представление новых фактов, полученных для их частных случаев. Изучены аппроксимативные свойства тригонометрических полиномов, порождаемых повторным применением метода суммирования Валле Пуссена, на классах периодических функций, которые можно регулярно продолжить в фиксированную полосу комплексной плоскости. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений в равномерной метрике r-повторных сумм Валле Пуссена на классах аналитических периодических функций. Указаны условия, при которых повторные суммы Валле Пуссена обеспечивают лучший порядок приближения, чем обычные.

Ключевые слова: ряд Фурье, интеграл Пуассона, асимптотическая формула

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2019 VOL. 11 NO. 3 P. 367–377
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-367-377

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 517.5

Approximation of analytic functions by repeated de la Vallee Poussin sums

O. G. Rovenska

Donbass State Engineering Academy,
72 Academychna st., Kramatorsk, 84313, Ukraine

E-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

Received 10.02.2019, after completion — 10.03.2019.
Accepted for publication 28.03.2019.

The paper deals with the problems of approximation of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums. The simplest and natural example of a linear process of approximation of continuous periodic functions of a real variable is the approximation of these functions by partial sums of the Fourier series. However, the sequences of partial Fourier sums are not uniformly convergent over the entire class of continuous 2π-periodic functions. In connection with this, a significant number of papers is devoted to the study of the approximative properties of other approximation methods, which are generated by certain transformations of the partial sums of Fourier series and allow us to construct sequences of trigonometrical polynomials that would be uniformly convergent for each function $f \in C$. In particular, over the past decades, de la Vallee Poussin sums and Fejer sums have been widely studied. One of the most important directions in this field is the study of the asymptotic behavior of upper bounds of deviations of arithmetic means of Fourier sums on different classes of periodic functions. Methods of investigation of integral representations of deviations of polynomials on the classes of periodic differentiable functions of real variable originated and received its development through the works of S. M. Nikol'sky, S. B. Stechkin, N. P. Korneichuk, V. K. Dzadyk, etc.

The aim of the work systematizes known results related to the approximation of classes of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums, and presents new facts obtained for particular cases. In the paper is studied the approximative properties of r-repeated de la Vallee Poussin sums on the classes of periodic functions that can be regularly extended into the fixed strip of the complex plane. We obtain asymptotic formulas for upper bounds of the deviations of repeated de la Vallee Poussin sums taken over classes of periodic analytic functions. In certain cases, these formulas give a solution of the corresponding Kolmogorov – Nikolsky problem. We indicate conditions under which the repeated de la Vallee Poussin sums guarantee a better order of approximation than ordinary de la Vallee Poussin sums.

Keywords: Fourier series, Poisson integral, asymptotic formula

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 367–377 (Russian).

Введение

Пусть $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L_{[-\pi;\pi]}$ и числа p, p_1, p_2, ..., $p_r \in \mathbb{N}$, такие, что $p < n$, $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k < n$. Суммы Валле Пуссена для функции $f(x)$ обычные $V_{n,p}(f;x)$ и повторные $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ соответственно задаются соотношениями

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x).$$

Суммы $V_{n,p}(f;x)$ и $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ также могут быть представлены в виде полиномов $U_n(f;x;\Lambda)$, которые для заданной функции $f(x)$ порождаются бесконечными треугольными числовыми матрицами $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k = 0,1,2,\dots$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k \geq n$:

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 1,2,\dots,$$

где $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$, $k = 0,1,\dots,$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. В работе [Шарапудинов, 2017] можно найти обзор основных свойств повторных сумм Валле Пуссена, а также ознакомиться с некоторыми примерами их использования в вычислительной математике.

Пусть $\psi(k)$ — фиксированная последовательность действительных чисел и $\beta \in \mathbb{R}$. Множество непрерывных функций $f(x)$, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f_\beta^\psi(x) \in L_{[-\pi;\pi]}$, обозначается как C_β^ψ. Если $f \in C_\beta^\psi$ и, кроме того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, т. е. выполнены условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t)dt = 0, \quad \operatorname{ess} \sup_{t\in[-\pi;\pi]} |f_\beta^\psi(t)| \leq 1,$$

то множество таких функций обозначается как $C_{\beta,\infty}^\psi$. Кроме того, $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ в случае, если $f_\beta^\psi(x) \in H_\omega$, т. е. выполнено условие

$$|f_\beta^\psi(t') - f_\beta^\psi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|) \quad \forall t', t'' \in \mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности.

Через D_q обозначим множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0;1).$$

В этом случае множества $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$ содержат периодические функции $f(x)$, которые допускают аналитическое продолжение $f(z) = f(x+iy)$ в полосу комплексной плоскости $|\operatorname{Im} z| \leq \ln 1/q$

(например, [Степанец, 1987, с. 31]). Важным примером таких классов функций являются классы непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)P_\beta^q(t)dt,$$

где

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

— известное ядро Пуассона. В этом случае классы $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$ обозначаются как $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_\beta^q H_\omega$ соответственно и называются классами интегралов Пуассона.

Задача приближения классов интегралов Пуассона имеет свою историю. В 1946 году С. М. Никольский [Никольский, 1946] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C_{\beta,\infty}^q$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n\left(C_{\beta,\infty}^q; S_n\right) := \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^q} \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2}K(q) + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода, величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С. Б. Стечкин [Стечкин, 1980] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)\dfrac{q^{n+1}}{(1-q)n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и q.

Аналогичную задачу для классов $C_\beta^q H_\omega$ решил А. И. Степанец в работе [Степанец, 2001], где показал, что величина

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; S_n\right) := \sup_{f\in C_\beta^q H_\omega} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C$$

не зависит от точки x и при $n \to \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^q H_\omega; S_n\right) = \frac{4q^n}{\pi^2}K(q)\theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\theta_\omega \in [1/2;1]$, при этом $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q и β.

Асимптотические формулы для верхних граней уклонений сумм Фурьє на классах $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$, $\psi(k) \in D_q$ получены в работе [Степанец, Сердюк, 2000]:

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,\infty}^\psi; S_n\right) := \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q) + O(1)(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2})\right),$$

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^\psi H_\omega; S_n\right) := \sup_{f\in C_\beta^\psi H_\omega} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C = \psi(n)\left(\frac{4\theta_\omega}{\pi^2}K(q)\int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\, dt + O(1)\frac{\varepsilon_n + \frac{1}{n}}{(1-q)^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

$\theta_\omega \in [1/2; 1]$, при этом $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q, β и $\psi(k)$.

Вопросы приближения классов аналитических функций обычными и повторными суммами Валле Пуссена изучались многими авторами. В работе [Рукасов, Чайченко, 2002] для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) := \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V_{n,p}\right) := \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C = \frac{2\theta_\omega}{\pi(1-q^2)} \frac{q^{n-p+1}}{p} \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n-p}\right) \sin t\, dt +$$
$$+ O(1)\omega\left(\frac{1}{n-p}\right)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p} + \frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right].$$

В работе [Сердюк, 2004] также было показано, что имеет место более общий результат:

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{s(p)}}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}\,dt,\ \ s(1) = 1,\ \ s(p) = 3\ \ \forall p > 1.$$

Аналогичные формулы для классов периодических функций, допускающих аналитическое продолжение в фиксированную полосу комплексной плоскости, получены в работе [Рукасов, 2003]. Приближение многомерных аналогов классов аналитических функций суммами Валле Пуссена рассмотрено в работе [Ровенская, Новиков, 2012].

В работах [Ровенская, Новиков, 2010, 2016; Новиков, Ровенская, 2014, 2017] исследованы вопросы приближения классов интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами, которые порождаются повторным применением метода суммирования Валле Пуссена, и установлены условия, при которых повторные суммы Валле Пуссена $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на классах интегралов Пуассона обеспечивают лучший порядок приближения, чем обычные суммы $V_{n,p}(f;x)$. Некоторые смежные вопросы рассмотрены в работе [Novikov, Rovenska, 2017]. Следует отметить, что в работе [Шарапудинов, 2017] указаны преимущества аппроксимативных свойств повторных сумм Валле Пуссена при решении ряда весьма важных прикладных задач, таких как конструирование цифровых фильтров, обработка и сжатие речи и т. д. (например, [Dedus et al., 2002; Pankratov et al., 2009; Florinsky, Pankratov, 2016]).

Целью данной работы является получение асимптотических формул для верхних граней уклонений повторных сумм Валле Пуссена $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на классах периодических аналитических функций $C^\psi_{\beta,\infty}$ и $C^\psi_\beta H_\omega$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$.

Результат

Обозначим

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) := \sup_{f\in C^\psi_{\beta,\infty}} \|f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C,$$
$$\mathcal{E}\left(C^\psi_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) := \sup_{f\in C^\psi_\beta H_\omega} \|f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0;1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности. Тогда при $n - \Sigma_{\overline{p}} \to \infty$, $\Sigma_{\overline{p}} = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i$ справедливы асимптотические формулы*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{4\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi^2 \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx +$$
$$+ O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^r \prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\frac{(n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}}\right) + O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{(1-q)^2}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{2\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi^2 \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) \int\limits_0^{\pi} Z_q^{r+1}(x)dx +$$
$$+ O(1)\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\left(\frac{\omega\left([n-\Sigma_{\overline{p}}]^{-1}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i (n-\Sigma_{\overline{p}})}\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}} + \frac{1}{(1-q)^{2r}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} q^{p_i}\omega([n-\Sigma_{\overline{p}}+p_i]^{-1})}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i (1-q)^{r+1}} + \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}\omega([n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1]^{-1})}{(1-q)^2}\right), \quad (2)$$

где

$$Z_q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x + q^2}}, \quad e_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\omega) = \theta_n(\omega) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}) \sin\tau d\tau,$$
$$\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}} = \sup_{k \geq n-\Sigma_{\overline{p}}} \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, $\theta_n(\omega) = 1$, *если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q, β, p_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\psi(k)$.*

Доказательство. Используем схему доказательства, примененную в работах [Степанец, Сердюк, 2000; Рукасов, 2003]. Основная идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что уклонения

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) := f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$$

на классах C^{ψ}_{β} ведут себя подобно уклонениям $\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на классах интегралов Пуассона C^{q}_{β}. Это позволяет свести задачу о получении асимптотических формул для величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ и $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ к аналогичной задаче для величин $\mathcal{E}\left(C^{q}_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ и $\mathcal{E}\left(C^{q}_{\beta}H_{\omega}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$. Таким образом можем выписать асимптотические формулы для величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ и $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$, отталкиваясь от известных результатов.

Преобразуем интегральное представление величины $\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ к виду, более удобному для дальнейшего изложения:

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\psi(k)\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt=$$

$$=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt=$$

$$=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r+1}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\Big[\frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}-\frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\Big]\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt+ \tag{3}$$

$$+\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt=$$

$$=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)q^k\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big)dt+$$

$$+\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\psi}_{\beta}(x+t)r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)dt,$$

где

$$r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)=r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(\psi;\beta;t):=\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r+1}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)\Big[\frac{\psi(k)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}-\frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\Big]\cos\Big(kt+\frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

Рассмотрим величину $r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)$. Так как

$$\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+r)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+r-1)}=\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)},$$

то

$$r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)=\sum_{i=2}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i})\Big[\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}-\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i}}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\Big]\cos\Big((n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i)t+\frac{\beta\pi}{2}\Big)=$$

$$=\sum_{i=2}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i})\Big(\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+r)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+l)}-q^{i-1}\Big)\cos\Big((n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+i)t+\frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

Учитывая оценку из [Степанец, Сердюк, 2000]:

$$\Big|\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(m+l+1)}{\psi(m+l)}-q^{i-1}\Big|\le(q+\varepsilon_m)^{i-1}-q^{i-1},\quad \varepsilon_m=\sup_{k\ge m}\Big|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\Big|,$$

и условие $0\le 1-\lambda^{(n)}_k\le 1$, имеем

$$|r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)|\le\sum_{i=2}^{\infty}\Big|\prod_{l=1}^{i-1}\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+l+r)}{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1+l)}-q^{i-1}\Big|\le\sum_{i=2}^{\infty}((q+\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1})^{i-1}-q^{i-1})=$$

$$=\frac{q+\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{1-q-\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}-\frac{q}{1-q}=\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{(1-q-\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1})(1-q)}.$$

Обозначим

$$R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^{\psi}_{\beta};x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t)r_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(t)dt.$$

Имеет место оценка [Степанец, Сердюк, 2000]

$$\|R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f^{\psi}_{\beta};x)\|_C = O(1)\frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}E_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}(f^{\psi}_{\beta})_C}{(1-q)^2},$$

где

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}}\|f-t_{n-1}\|_C$$

— наилучшее приближение функции f в метрике C тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

Пусть $J^{\psi}_{\beta}(\varphi)$ — функция, для которой $(J^{\psi}_{\beta}(\varphi))^{\psi}_{\beta} = \varphi$, $\varphi \in S^0_M$ или $\varphi \in H_{\omega}$. В случае $\psi(k) = q^k$, $q \in (0;1)$ обозначим $J^{\psi}_{\beta}(\varphi) = J^{q}_{\beta}(\varphi)$. Тогда $\forall f \in C^{\psi}_{\beta}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\sum_{k=n-\Sigma_{\overline{p}}+r}^{\infty}(1-\lambda^{(n)}_k)q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt.$$

На основании (3) имеем

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x) + \psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)R_{n-\Sigma_{\overline{p}}}(f;x).$$

Используя рассуждения работ [Степанец, Сердюк, 2000; Рукасов, 2003], можно показать, что для $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ имеет место

$$\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x)\|_C + O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{(1-q)^2},$$

а для $f \in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ —

$$\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta});x)\|_C + O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}E_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}(f^{\psi}_{\beta})_C}{(1-q)^2}$$

и, кроме того,

$$E_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}(f^{\psi}_{\beta})_C = O(1)\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}\right).$$

Учитывая, что

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta}),\cdot)\|_C = \sup_{\varphi\in S^0_M}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(\varphi),\cdot)\|_C,$$

$$\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(f^{\psi}_{\beta}),\cdot)\|_C = \sup_{\varphi\in H_{\omega}}\|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(J^q_{\beta}(\varphi),\cdot)\|_C,$$

имеем

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty},V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\mathcal{E}\left(C^{q}_{\beta,\infty},V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) + O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{(1-q)^2}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega},V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)}{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}\mathcal{E}\left(C^{q}_{\beta}H_{\omega},V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) + O(1)\frac{\psi(n-\Sigma_{\overline{p}}+r)\varepsilon_{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}}{(1-q)^2}\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_{\overline{p}}+r-1}\right), \tag{5}$$

где

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}, V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C, \quad \mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega, V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} \|\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)\|_C.$$

В работах [Новиков, Ровенская, 2014, 2017] получены асимптотические формулы

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{4q^{n-\Sigma_{\overline{p}}+r}}{\pi^2 \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx + O(1)\frac{q^{n-\Sigma_{\overline{p}}}}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\frac{(n-\Sigma_{\overline{p}})^{-1}}{(1-q)^{r+2}} + \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} q^{p_j}}{(1-q)^{r+1}}\right), \tag{6}$$

$$\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \frac{2q^{n-\Sigma_p+r}}{\pi^2 \prod\limits_{i=1}^{r} p_i} e_{n-\Sigma_p}(\omega) \int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx + O(1)\frac{q^{n-\Sigma_p+r}}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i} \frac{\omega\left([n-\Sigma_p]^{-1}\right)}{(n-\Sigma_p)} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{(1-q)^{r+3}} + \frac{1}{(1-q)^{2r}}\right] + O(1)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} p_i}\left(\sum_{\alpha(r-1)\subset\overline{r}} \frac{q^{n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}+r}}{(1-q)^{r+1}}\,\omega\left(\frac{1}{n-\Sigma_p^{\alpha(r-1)}}\right)\right), \tag{7}$$

где $\overline{r} = \{1;2;\ldots;r\}$, $\alpha(i)$ — подмножество из $\overline{r}$, содержащее i элементов, $\Sigma_p^{\alpha(i)} = \sum\limits_{j\in\alpha(i)} p_j$, $\theta_n(\omega) \in \in [1/2;1]$, $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q, β, p_i, $i = 1,2,\ldots,r$. В случае $r = 2\nu - 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, интегралы в правых частях формул (6) и (7) можно вычислить с помощью формулы

$$\int\limits_0^\pi Z_q^{r+1}(x)dx = \frac{\pi}{(1-q^2)^{2\nu-1}} \sum_{k=0}^{\nu-1}\left(C^k_{\nu-1}\right)^2 q^{2k}, \quad C^k_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Объединяя (4)–(7), получаем утверждение теоремы.

Заключение

Приведем примеры, когда повторные суммы Валле Пуссена $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ имеют преимущество над обычными суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$. Если сравнивать обычные и повторные суммы Валле Пуссена, у которых задействовано одинаковое количество гармоник, т. е. $p = \sum\limits_{i=1}^{r} p_i$, то несложно убедиться, что повторные суммы Валле Пуссена на классах аналитических функций обеспечивают лучший (с точностью до постоянного множителя) порядок приближения, чем суммы $V_{n,p}(f;x)$.

Условиям теоремы 1 удовлетворяют ядра Пуассона бигармонического уравнения

$$B^q_\beta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(1 + \frac{1-q^2}{2}k)q^k\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad 0 < q < 1, \quad \beta\in\mathbb{R},$$

а также ядра Неймана

$$N^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad 0 < q < 1, \quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Это позволяет использовать формулы для величин $\mathcal{E}\left(C^\psi_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ и $\mathcal{E}\left(C^\psi_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ для более широкого круга задач, чем соответствующие формулы для величин $\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$ и $\mathcal{E}\left(C^q_\beta H_\omega; V^{(r)}_{n,\overline{p}}\right)$.

Список литературы (References)

Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.

Nikolskyi S. M. Priblizhenie funkcyi trigonometricheskimi polinomami v srednem [Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean] // Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat. — 1946. — Vol. 10, No. 3. — P. 207–256 (in Russian).

Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вестн. Одесского нац. ун-та. Матем. Мех. — 2014. — Т. 19, вып. 3 (23). — С. 14–26.

Novikov O. A., Rovenskaya O. G. Priblizhenie klassov integralov Puassona r-povtornumi summami Valle Pussena [Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums] // Vestn. Odessk. Nac. Un. Mat. Meh. — 2014. — Vol. 19, No. 3 (23). — P. 14–26 (in Russian).

Новиков О. А., Ровенская О. Г., Козаченко Ю. В. Приближение интегралов Пуассона линейными методами // Тр. ИПММ НАН Украины. — 2017. — Т. 31. — С. 92–108.

Novikov O. A., Rovenskaya O. G., Kozachenko Yu. V. Priblizhenie integralov Puassona linejnumi metodami [Approximation of Poisson integrals by linear methods] // Proc. of IAMM NASU. — 2017. — Vol. 31. — P. 92–108 (in Russian).

Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.

Rovenskaya O. G., Novikov O. A. Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums // Nonlinear Oscillations. — 2010. — Vol. 13, Issue 1. — P. 108–111. (Original Russian paper: *Rovenskaya O. G., Novikov O. A.* Priblizhenie integralov Puassona povtornumi summami Valle Pussena // Neliniyni Koluvannya. — 2010. — Vol. 13, No. 1. — P. 96–99.)

Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными средними рядов Фурье // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 3. — С. 521—529.

Rovenskaya O. G., Novikov O. A. Priblizhenie periodicheskih funkcyi vusokoj gladkosti pryamougolnumi linejnumi srednimi ryadov Fur'ye [Approximation of periodic functions of high smoothness by rectangle linear means of Fourier series] // Computer Research and Modeling. — 2012. — Vol. 4, No. 3. — P. 521–529 (in Russian).

Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье // Чебышёвский сб. — 2016. — Т. 17, вып. 2. — С. 170–183.

Rovenskaya O. G., Novikov O. A. Priblizhenie analiticheskih periodicheskih funkcyi linejnumi srednimi ryadov Fur'ye [Approximation of analytic periodic functions by linear means of Fourier series] // Chebyshevskii Sb. — 2016. — Vol. 17, No. 2. — P. 170–183 (in Russian).

Рукасов В. И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 6. — С. 806–816.

Rukasov V. I. Approximation of classes of analytic functions by de la Vallee Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2003. — Vol. 55, Issue 6. — P. 974–986. (Original Russian paper: *Rukasov V. I.* Priblizhenie summami Valle Pussena klassov analiticheskih funkcyi // Ukr. Mat. Zh. — 2003. — Vol. 55, No. 6. — P. 806–816.)

Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.

Rukasov V. I., Chaichenko S. O. Approximation of analytic periodic functions by de la Vallee Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2002. — Vol. 54, Issue 12. — P. 2006–2024. (Original Russian paper: *Rukasov V. I., Chaichenko S. O.* Priblizhenie analiticheskih periodicheskih funkcyi summami Valle Pussena // Ukr. Mat. Zh. — 2002. — Vol. 54, No. 12. — P. 1653–1668.)

Сердюк А. С. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.

Serduk A. S. Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums // Ukr. Math. J. — 2004. — Vol. 56, Issue 1. — P. 122–134. (Original Russian paper: *Serdyuk A. S.* Priblizhenie integralov Puassona summami Valle Pussena // Ukr. Mat. Zh. — 2004. — Vol. 56, No. 1. — P. 97–107.)

Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

Stepanets A. I. Klassifikaciya i priblizhenie periodicheskih funkcyi [Classification and approximation of periodic functions]. — Kiev: Naukova dumka, 1987 (in Russian).

Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова – Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.
Stepanets A. I. Solution of the Kolmogorov – Nikol'skii problem for the Poisson integrals of continuous functions // Sb.: Math. — 2001. — Vol. 192, Issue 1. — P. 113–140. (Original Russian paper: *Stepanec A. I.* Reshenie zhadachi Kolmogorova – Nikol'skogo dlya integralov Puassona nepreruvnuh funkcyi // Mat. Sb. — 2001. — Vol. 192, No. 1. — P. 113–138.)

Степанец А. И., Сердюк А. С. Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 3. — С. 375–395.
Stepanets A. I., Serduk A. S. Approximation by Fourier sums and best approximations on classes of analytic functions // Ukr. Math. J. — 2000. — Vol. 52, Issue 3. — P. 433–456. (Original Russian paper: *Stepanec A. I., Serdyuk A. S.* Priblizhenie summami Fur'ye i nailuchue pribligeniya na klassah analiticheskih funkcyi // Ukr. Mat. Zh. — 2000. — Vol. 52, No. 3. — P. 375–395.)

Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.
Stechkin S. B. An estimate of the remainder of the Fourier series for differentiable functions // Proc. Steklov Inst. Math. — 1981. — Vol. 145. — P. 139–166. (Original Russian paper: *Stechkin S. B.* Ocenka ostatka ryada Fur'ye dlya differenciruemuh funkcyi // Tr. Mat. Inst. Steklova. — 1980. — Vol. 145. — P. 126–151.)

Шарапудинов И. И. Перекрывающие преобразования для приближения непрерывных функций посредством повторных средних Валле Пуссена // Дагестанские электронные математические известия. — 2017. — Вып. 8. — С. 70–92.
Sharapudinov I. I. Perekruvayushiye preobrazhovaniya dlya priblizheniya nepreruvnuh funkcyi posredstvom povtornuh srednih Valle Pussena [Overlapping transforms for approximation of continuous functions by repeated means Valle Poussin] // Daghestan electronic mathematical reports. — 2017. — Issue 8. — P. 70–92 (in Russian).

Dedus F. F., Makhortykh S. A., Ustinin M. N. Application of the Generalized Spectral-Analytic Method in Information Problems // Pattern Recogn. Image Anal. — 2002. — Vol. 12. — P. 429–437.

Florinsky I. V., Pankratov A. N. A universal spectral analytical method for digital terrain modeling // International Journal of Geographical Information Science. — 2016. — Vol. 30, No. 12. — P. 2506–2528.

Novikov O., Rovenska O. Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, No. 3. — P. 502–509.

Pankratov A. N., Gorchakov M. A., Dedus F. F. et al. Spectral analysis for identification and visualization of repeats in genetic sequences // Pattern Recogn. Image Anal. — 2009. — Vol. 19, No. 4. — 687.