УДК: 519.86

Математическое моделирование динамики человеческого капитала

К. В. Кетова^{1,a}, Ю. М. Романовский^{2,b}, И. Г. Русяк^{1,c}

¹ Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, ул. Ленинские горы, д. 1

E-mail: ^a ketova_k@mail.ru, ^b yuromanovsky@yandex.ru, ^c primat@istu.ru

Получено 30.11.2017, после доработки — 21.02.2019.

Принято к публикации 04.03.2019.

В условиях развития современной экономики человеческий капитал является одним из главных факторов экономического роста. Формирование человеческого капитала начинается с рождения человека и продолжается в течение всей жизни, поэтому величина человеческого капитала неотделима от его носителей, что, в свою очередь, затрудняет учет данного фактора. Это привело к тому, что в настоящее время нет общепринятых методик расчета величины человеческого капитала. Можно выделить лишь несколько подходов к измерению человеческого капитала: стоимостной подход (по доходам или инвестициям) и индексный подход, из которых наиболее известен подход, разработанный под эгидой ООН.

В данной работе поставленная задача рассматривается совместно с задачей демографической динамики, решаемой во временно-возрастной плоскости, что позволяет наиболее полно учесть влияние временных изменений демографической структуры на динамику человеческого капитала.

Задача демографической динамики ставится в рамках модели Мак-Кендрика – фон Ферстера на основе уравнения динамики возрастного состава. Вид функций распределения рождений, смертности и миграции населения определяется на основе имеющейся статистической информации. Приводится численное решение задачи. Представлены анализ и прогноз демографических показателей. На основе задачи демографической динамики формулируется экономико-математическая модель динамики человеческого капитала. В задаче моделирования динамики человеческого капитала рассматриваются три составляющие: образовательная, составляющая здоровья и культурная (духовная) составляющая. Для описания эволюции составляющих человеческого капитала используется двумерное уравнение типа уравнения переноса. Объемы инвестиций в составляющие человеческого капитала определяются на основе расходных статей бюджета и частных расходов с учетом характерного временного жизненного цикла демографических элементов. Для прогнозирования динамики суммарной величины человеческого капитала используется одномерное кинетическое уравнение. Приводится методика расчета динамики данного фактора как функции времени. Представлены расчетные данные по динамике человеческого капитала для Российской Федерации. Как показали исследования, величина человеческого капитала интенсивно нарастала до 2008 года, в дальнейшем наступил период стабилизации, но после 2014 года имеет место отрицательная динамика данной величины.

Ключевые слова: демографическая динамика, динамика человеческого капитала, математическое моделирование, уравнения переноса, разностная схема, составляющие человеческого капитала, инвестиции в человеческий капитал

UDC: 519.86

Mathematical modeling of the human capital dynamics

K. V. Ketova^{1,a}, Yu. M. Romanovsky^{2,b}, I. G. Rusyak^{1,c}

¹ Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia

² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory st., Moscow, 119991, Russia

E-mail: ^a ketova_k@mail.ru, ^b yuromanovsky@yandex.ru, ^c primat@istu.ru

Received 30.11.2017, after completion — 21.02.2019.

Accepted for publication 04.03.2019.

In the conditions of the development of modern economy, human capital is one of the main factors of economic growth. The formation of human capital begins with the birth of a person and continues throughout life, so the value of human capital is inseparable from its carriers, which in turn makes it difficult to account for this factor. This has led to the fact that currently there are no generally accepted methods of calculating the value of human capital. There are only a few approaches to the measurement of human capital: the cost approach (by income or investment) and the index approach, of which the most well-known approach developed under the auspices of the UN.

This paper presents the assigned task in conjunction with the task of demographic dynamics solved in the time-age plane, which allows to more fully take into account the temporary changes in the demographic structure on the dynamics of human capital.

The task of demographic dynamics is posed within the framework of the Mac-Kendrick – von Foerster model on the basis of the equation of age structure dynamics. The form of distribution functions for births, deaths and migration of the population is determined on the basis of the available statistical information. The numerical solution of the problem is given. The analysis and forecast of demographic indicators are presented. The economic and mathematical model of human capital dynamics is formulated on the basis of the demographic dynamics problem. The problem of modeling the human capital dynamics considers three components of capital: educational, health and cultural (spiritual). Description of the evolution of human capital components uses an equation of the transfer equation type. Investments in human capital components are determined on the basis of budget expenditures and private expenditures, taking into account the characteristic time life cycle of demographic elements. A one-dimensional kinetic equation is used to predict the dynamics of the total human capital. The method of calculating the dynamics of this factor is given as a time function. The calculated data on the human capital dynamics are presented for the Russian Federation. As studies have shown, the value of human capital increased rapidly until 2008, in the future there was a period of stabilization, but after 2014 there is a negative dynamics of this value.

Keywords: demographic dynamics, human capital dynamics, mathematical modeling, transfer equations, difference scheme, human capital components, investments in human capital

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 2, pp. 329–342 (Russian).

© 2019 Karolina V. Ketova, Yuri M. Romanovsky, Ivan G. Rusyak

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/>
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

1. Введение

Под человеческим капиталом (ЧК) в экономике понимается запас знаний, здоровья, навыков, опыта, культуры, которые используются индивидом для получения дохода [Дятлов, 1996]. Оценка человеческого капитала — чрезвычайно трудная задача. Его можно рассматривать как качество жизни [Айвазян, 2002], или как объем инвестиций [Ильинский, 1996], или как способность к инновационной деятельности [Агабеков, 2003], или как объем заработков (доходов) человека [Добрынин, Дятлов, 1999].

Выделяют следующие составляющие человеческого капитала: капитал образования, капитал здоровья и капитал культуры.

Инвестиции в образование способствуют формированию высококвалифицированных специалистов, труд которых оказывает наибольшее влияние на темпы экономического роста.

Капиталовложения в здоровье приводят к сокращению заболеваний и смертности, продлению трудоспособного периода жизни человека.

Капиталовложения в культуру снижают уровень криминализации общества, повышают творческий потенциал человеческой личности, формируют нравственные ценности человека, что в конечном счете сказывается на эффективности экономики.

Следует отметить, что изменение эффективности использования (амортизация) ЧК протекает иначе, чем этот процесс протекает в материально-вещественных ресурсах. В первые годы функционирования человеческого капитала за счет физического взросления работника, а также за счет накопления им производственного опыта экономическая ценность запаса его знаний и способностей отнюдь не уменьшается, как это происходит с физическим капиталом, а, напротив, возрастает. Обычно темпы износа физического состояния и износа запаса знаний и квалификации работника начинают перекрывать значения непрерывно продолжающегося накопления другого актива производственного опыта где-то к концу второго десятилетия трудового стажа. Лишь с этого момента начинается процесс «обесценивания» человеческого капитала. Таким образом, по мере накопления ЧК его эффективность повышается до определенного предела, ограниченного верхней границей периода активной трудовой деятельности (активного трудоспособного возраста), а затем начинает снижаться, при этом инвестиции, связанные с охраной здоровья, способны замедлить данный процесс.

В научной литературе понятие человеческого капитала появилось в публикациях начала второй половины XX века: в работах американских ученых-экономистов Джекоба Минсера [Mincer, 1958], Теодора Шульца [Schulz, 1961] и Гэри Беккера [Becker, 1962]. За создание основ теории человеческого капитала были присуждены Нобелевские премии по экономике — Т. Шульцу в 1979 г. и Г. Беккеру в 1992 г. Существенный вклад в создание теории ЧК внес выходец из России Саймон Кузнец, получивший Нобелевскую премию по экономике в 1971 г.

Толчком к созданию теории ЧК стали статистические данные роста экономик развитых стран мира, которые превышали расчеты, базирующиеся на учете классических факторов роста. Анализ реальных процессов развития и роста в современных условиях и привел к утверждению ЧК в качестве основного производительного и социального фактора развития современной экономики и общества.

С. Кузнец среди ограничителей на применение опыта передовых стран развивающимися странами поставил на первое место стартовые потенциалы физического капитала и человеческого капитала, поскольку, по его мнению, высокий уровень и качество накопленного ЧК необходимы для ускоренного осуществления институциональных реформ, трансформации государства, технологического обновления производств, рыночных преобразований экономики и т. д. В итоге именно достаточно высокие уровень и качество ЧК страны с догоняющей экономикой обеспечивают ее выход на стабильный рост, повышение уровня и качества жизни населения. Таким образом, человеческий капитал, по С. Кузнецу, является главной доминантой возможного стабильного роста экономик развивающихся стран.

Т. Шульц внес основополагающий вклад в становление теории ЧК на начальном этапе ее развития, в ее принятие научной общественностью и популяризацию. Он одним из первых ввел понятие человеческого капитала как производительного фактора. И сделал многое для понимания роли ЧК как главного двигателя и фундамента индустриальной и постиндустриальной экономик. Основными результатами инвестиций в человека Т. Шульц считал накопление способностей людей к труду, их эффективную созидательную деятельность в обществе, поддержание здоровья и т. д. Он полагал, что человеческий капитал обладает необходимыми признаками производительного характера, ЧК способен накапливаться и воспроизводиться.

Г. Беккер, пожалуй, первым перенес понятие ЧК на микроуровень. Человеческий капитал предприятия он определил как совокупность навыков, знаний и умений его работников. Он доказал на обширном статистическом материале, что образование является фундаментом увеличения доходов и наемных работников, и работодателей, и государства в целом. В результате политики, финансисты и предприниматели стали рассматривать вложения в образование как перспективные капиталовложения, приносящие доход.

К числу исследователей, внесших наибольший вклад в развитие теории человеческого капитала, относятся также М. Блауг, М. Гроссман, М. Перлмен, Л. Туроу, Ф. Уэлч, Б. Чизуик, Дж. Кендрик, Р. Солоу, Р. Лукас, Ц. Грилихес, С. Фабрикант, И. Фишер, Э. Денисон и др. экономисты, социологи и историки. Среди современных отечественных исследователей проблем человеческого капитала можно отметить С. А. Дятлова, Р. И. Капелюшникова, М. М. Критского, С. А. Курганского, О. И. Иванова и других.

Существует несколько подходов к проблеме оценки человеческого капитала. Известны модели И. Бен-Порэта [Эренберг, Смит, 1996], Д. Хекмана [Корицкий, 2000], А. С. Акопяна, В. В. Бушуева и В. С. Голубева [Акопян и др., 2002], С. Ю. Малкова, К. А. Болоховой и О. И. Давыдовой [Малков и др., 2016]. Общепринятой количественной методики оценки величины человеческого капитала в настоящее время не существует. Наиболее известной методикой оценки уровня ЧК является индекс человеческого развития, разработанный в 1990 г. в рамках Программы развития ООН.

В данной работе поставленная задача впервые рассматривается совместно с задачей демографической динамики, решаемой во временно-возрастной плоскости, что позволяет наиболее полно учесть влияние временных изменений демографической структуры на динамику человеческого капитала.

2. Постановка задачи моделирования динамики человеческого капитала

Носителями человеческого капитала являются демографические элементы (здесь и далее под демографическим элементом понимается представитель народонаселения — отдельный человек, который в рассматриваемый момент времени t характеризуется возрастом τ). Поэтому расчет величины человеческого капитала необходимо проводить с учетом демографической структуры. Важное значение в данном случае имеет распределение демографических элементов по возрастам.

При анализе демографической динамики используются два основных подхода: первый подход основан на использовании балансовых матричных уравнений передвижки возрастных групп населения, впервые предложенных Лесли, где возраст τ и время (год) t рассматриваются как дискретные переменные; второй подход основан на использовании непрерывных моделей демографической динамики, впервые предложенных Мак-Кендриком и фон Ферстером. Оба подхода приводят к одинаковым результатам, несмотря на то что используют разные типы переменных. Согласование подходов осуществляется за счет построения непрерывных интерполяционных полиномов, на дискретном множестве значений функций, входящих в модель. Ниже будем использовать непрерывную модель.

Математическое моделирование распределения демографических элементов по возрастам производится на основе уравнения динамики возрастного состава [Гимельфарб и др., 1974; Староверов, 1977; Русяк, Кетова, 2007; Кетова, 2013]:

$$\frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, \tau)}{\partial \tau} = -\mu(t, \tau)\rho(t, \tau) + l(t, \tau)\rho(t, \tau), \quad (1)$$

где $\rho(t, \tau)$ — плотность распределения населения по возрасту τ в год t ; $\mu(t, \tau)$ — коэффициент распределения смертности населения по возрасту, задающий долю смертей в каждой группе возраста τ в год t ; $l(t, \tau)$ — коэффициент распределения миграции населения, связанной с изменением гражданства, по возрасту, задающий долю мигрантов в каждой группе возраста τ в год t .

Начальное и граничное условия:

$$\rho(t_0, \tau) = \rho_0(\tau), \quad \tau > 0, \quad (2a)$$

$$\rho(t, 0) = \int_0^{\infty} \gamma(t, \tau)\rho(t, \tau)d\tau, \quad t > t_0, \quad (2б)$$

где $\rho_0(\tau)$ — плотность распределения населения в начальный момент времени t_0 ; $\gamma(t, \tau)$ — коэффициент распределения рождений по возрасту, задающий долю рождений в каждой группе возраста τ в год t .

Коэффициент распределения рождений для каждого момента времени t и возраста τ определяется по формуле

$$\gamma(t, \tau) = \frac{\Delta L_{\gamma}(t, \tau)}{\rho(t, \tau)}, \quad (3)$$

где $\Delta L_{\gamma}(t, \tau)$ — количество рождений в год t , приходящихся на возраст τ .

Коэффициент распределения смертности $\mu(t, \tau)$ определяется по формуле

$$\mu(t, \tau) = \frac{\Delta L_{\mu}(t, \tau)}{\rho(t, \tau)}, \quad (4)$$

где $\Delta L_{\mu}(t, \tau)$ — количество смертей в год t , приходящихся на возраст τ .

Коэффициент распределения миграции $l(t, \tau)$ определяется по формуле

$$l(t, \tau) = \frac{\Delta L_l(t, \tau)}{\rho(t, \tau)}, \quad (5)$$

где $\Delta L_l(t, \tau)$ — миграционный прирост (убыль) в год t , приходящийся на возраст τ .

Особенности численного решения задачи (1)–(2) рассмотрены в работах [Русяк, Кетова, 2004; Кетова, 2013]. Были использованы явная схема Лакса и явно-неявная схема с односторонними разностями. Для первой схемы использование граничного условия (2б) не представляет труда, поскольку оно реализуется на предыдущем (известном) разностном слое. Для второй схемы, за счет выбора соотношения между шагами по возрасту и времени, алгоритм был построен так, что граничное условие для определения искомой сеточной функции на следующем временном слое не требовалось, а само граничное значение можно было определить апостериорно, учитывая, что для этого значения функции $\rho(t, \tau)$ на следующем разностном слое необходимо знать лишь в области фертильности женщин. В цитируемых работах было показано,

что обе схемы дают близкие результаты. При этом имело место более чем удовлетворительное совпадение с частным аналитическим решением. Так, погрешность численного метода не превышала 1 % по сравнению с аналитическим решением уравнения переноса на периоде прогноза 50 лет и 9 % — на периоде прогноза 90 лет.

Общая погрешность моделирования демографической динамики зависит от качества входных статистических данных и погрешностей их аппроксимации. На примере Удмуртской Республики погрешность численной реализации математической модели на периоде ретропрогноза 10 лет составила 2 %.

На основе модели демографической динамики можно рассчитать производные демографические характеристики, такие как общая численность населения региона, численность населения трудоспособного возраста, объем экономически активного населения, коэффициенты нагрузок и др.

Общая численность населения:

$$P(t) = \int_0^{\infty} \rho(t, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Объем экономически активного населения рассчитывается по формуле

$$L(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon_m(t, \tau) \rho_m(t, \tau) d\tau + \int_0^{\infty} \varepsilon_j(t, \tau) \rho_j(t, \tau) d\tau, \quad (7)$$

где $\rho_m(t, \tau)$ — плотность распределения по возрастам мужского населения; $\rho_j(t, \tau)$ — плотность распределения по возрастам женского населения; $\varepsilon_m(t, \tau)$ и $\varepsilon_j(t, \tau)$ — доли мужчин и женщин возраста τ , участвующих в экономической деятельности в год t .

При описании качественной составляющей человеческого капитала предполагается, что он состоит из трех компонентов: образования, здоровья и культуры [Капелюшников, 2012; Романовский, Романовский, 2012; Кетова, 2013; Малков и др., 2016; Соболев, Соболева, 2018; Кетова и др., 2018, Романовский, 2018]. Удельное среднее значение человеческого капитала в каждой группе возраста τ в год t рассчитывается по формуле

$$h(t, \tau) = \alpha_1 h_1(t, \tau) + \alpha_2 h_2(t, \tau) + \alpha_3 h_3(t, \tau), \quad (8)$$

$$\alpha_i \in (0, 1), \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1,$$

где α_i — весовые коэффициенты; индекс $i=1$ соответствует образовательной составляющей, $i=2$ — составляющей здоровья, $i=3$ — культурной или духовной составляющей человеческого капитала.

Изменение компонентов человеческого капитала $h_i(t, \tau)$ описывается уравнением вида [Кетова, 2013]

$$\frac{\partial h_i(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial h_i(t, \tau)}{\partial \tau} = -v_i h_i(t, \tau) + g_i(t, \tau) + q_i(t, \tau). \quad (9)$$

Здесь $g_i = g_i(t, \tau)$, $q_i = q_i(t, \tau)$ — удельные инвестиции бюджета и удельные частные инвестиции в i -й компонент человеческого капитала соответственно; $v_i = v_i(t, \tau)$ — коэффициент амортизации (выбытия) i -го компонента человеческого капитала.

При $t = t_0$ начальные условия имеют вид

$$h_i(t_0, \tau) = h_{i0}(\tau) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Граничные условия на левом конце демографической кривой:

$$h_i(t, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

на правом конце при $i = 1, 2$, очевидно, следует записать так:

$$h_i(t, \infty) \approx h_i(t, \tau_m) = 0, \quad (12)$$

где $\tau_m = \tau_m(t)$ — возраст дожития $m\%$ населения (в расчетах принималось $m = 5$).

В модели полагается [Кетова, 2013], что зависимость коэффициента амортизации ν_i от времени незначительна, а зависимость функций $\nu_i = \nu_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) от возраста имеет вид

$$\nu_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_{ai}, \\ b_i(e^{\varepsilon_i(\tau - \tau_{ai})} - 1), & \tau_{ai} \leq \tau \leq \tau_m, \end{cases} \quad (13)$$

где неизвестные (b_i, ε_i) определяются из условий

$$b_i(e^{\varepsilon_i(\tau - \tau_{ai})} - 1) = 1, \quad (14)$$

$$\int_0^{\tau_m} [g_i(t, \tau) + q_i(t, \tau)] d\tau = \int_{\tau_{ai}}^{\tau_m} b_i(e^{\varepsilon_i(\tau - \tau_{ai})} - 1) h_i(t, \tau) d\tau. \quad (15)$$

Здесь τ_{ai} — верхняя граница активного периода трудовой деятельности ($i = 1$) или физического состояния ($i = 2$). Предполагается, что культурный компонент человеческого капитала не подвержен износу, поэтому $\nu_3 \equiv 0$.

Решение задачи (9)–(12) рассматривается как решение задачи Коши при известных функциях $h_{i0}(\tau)$, которые определяются из уравнений

$$\frac{dh_{i0}(\tau)}{d\tau} = -\nu_i(\tau) h_{i0}(\tau) + g_{i0}(\tau) + q_{i0}(\tau) \quad (16)$$

с начальными условиями

$$h_{i0}(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (17)$$

где по-прежнему $\nu_3 \equiv 0$, а коэффициенты амортизации ν_1 и ν_2 находятся по формулам вида (13)–(15). При этом выражение (15) необходимо записать в виде

$$\int_0^{\tau_m} [g_{i0}(\tau) + q_{i0}(\tau)] d\tau = \int_{\tau_{ai}}^{\tau_m} b_i(e^{\varepsilon_i(\tau - \tau_{ai})} - 1) h_{i0}(\tau) d\tau.$$

Для построения кривых распределения по возрастам удельных составляющих расходов на развитие человеческого капитала $g_i(t, \tau)$ и $q_i(t, \tau)$, направленных на приращение ЧК, необходимо определить численность населения в каждой возрастной группе в любой момент времени, для чего используется решение задачи демографической динамики.

Суммы $B_{Ni}(t)$, инвестируемые бюджетом на статьи N_i (N_i — упорядоченная нумерация статей бюджета, расходуемых на образование ($i = 1$), здравоохранение ($i = 2$) и развитие культурной или духовной компонент человеческого капитала ($i = 3$)), будем распределять равномерно на соответствующие характерные периоды жизни человека $[\tau_{1, N_i}, \tau_{2, N_i}]$, связанные с со-

ответствующими статьями расхода, например дошкольное воспитание и образование (дошкольный период жизни), школьное образование (школьный период жизни) и т. д., и на количество демографических элементов в этих периодах. В результате получим распределение удельных составляющих инвестиций, направленных на развитие ЧК, по возрастам $g_i(t, \tau)$:

$$g_i(t, \tau) = \sum_{Ni} \frac{B_{Ni}(t, \tau)}{\int_{\tau_{1, Ni}}^{\tau_{2, Ni}} \rho(t, \tau) d\tau}, \quad (18)$$

где

$$B_{Ni}(t, \tau) = \begin{cases} B_{Ni}(t), & \tau \in [\tau_{1, Ni}, \tau_{2, Ni}], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{1, Ni}, \tau_{2, Ni}]. \end{cases} \quad (19)$$

Распределение удельных составляющих частных инвестиций, направленных на приращение человеческого капитала $q_i(t, \tau)$, определялось по формуле

$$q_i(t, \tau) = R(t) \beta_i(t, \tau), \quad (20)$$

где $R(t)$ — расходы населения, $\beta_i(t, \tau)$ — доля составляющих человеческого капитала в общей структуре потребительских расходов населения.

Суммарная величина человеческого капитала экономически активного населения определится из выражения

$$H(t) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \alpha_i h_i(t, \tau) \varepsilon(t, \tau) \rho(t, \tau) d\tau, \quad (21)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t, \tau)$ — доля экономически активного населения возраста τ в год t .

Для прогнозирования динамики суммарной величины человеческого капитала используется одномерное кинетическое уравнение, полученное в [Кетова, 2013]:

$$\frac{dH}{dt} = \bar{\varepsilon} J(t) - \bar{\chi} H(t) \quad (22)$$

при начальном условии

$$H_0 = H(t_0), \quad (23)$$

где $\bar{\chi} = \bar{\chi}(t)$ — коэффициент выбытия (амортизации) человеческого капитала, $J(t)$ — сумма бюджетных и частных инвестиций в человеческий капитал.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t) = \frac{\int_0^\infty \sum_{i=1}^3 (g_i + q_i) \alpha_i \varepsilon(t, \tau) \rho(t, \tau) d\tau}{\int_0^\infty \sum_{i=1}^3 (g_i + q_i) \alpha_i \rho(t, \tau) d\tau}. \quad (24)$$

2. Решение задачи моделирования динамики человеческого капитала на примере Российской Федерации

Оценка человеческого капитала основана на решении задачи моделирования количественной составляющей ЧК (1)–(7) (задача моделирования демографических характеристик) и задачи моделирования качественных составляющих человеческого капитала (8)–(24).

Для реализации рассмотренных моделей был разработан программно-вычислительный комплекс [Кетова и др., 2013] (рис. 1), включающий базу данных демографических и экономических показателей Российской Федерации и методику численного решения уравнений (1) и (9) с помощью конечно-разностной явно-неявной схемы с односторонними разностями.

Решение задачи демографической динамики рассмотрено на основе статистических данных демографической структуры России за период 2003–2016 гг. На рис. 2, а представлены плотности распределения населения по возрастам $\rho_0(\tau)$, построенные по статистическим данным [Информационный сайт..., 2018] для 2003 года, 2016 года, а также расчетное прогнозное значение на 2021 год. На рис. 2, б представлена динамика общей численности населения Российской Федерации в период с 1960 года по 2021 год.

Рис. 1. Главное окно программно-вычислительного комплекса

Рис. 2. Функция плотности распределения населения по возрастам (а) и динамика общей численности населения (б) Российской Федерации

Для коэффициентов распределения рождений $\gamma(t, \tau)$, смертности $\mu(t, \tau)$ и миграции $l(t, \tau)$, на основе статистических данных за рассматриваемый период [Информационный сайт..., 2018], построены степенные функции в зависимости от времени и возраста вида

$$f(t, \tau) = a_0(t) + a_1(t)\tau + a_2(t)\tau^2 + a_3(t)\tau^3 + a_4(t)\tau^4 + a_5(t)\tau^5 + a_6(t)\tau^6, \quad (25)$$

где $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $a_3(t)$, $a_4(t)$, $a_5(t)$, $a_6(t)$ — линейные функции времени t . Погрешности аппроксимации зависимостей (25) не превосходят 7 %, при этом среднеквадратическая погрешность составляет 2.3 %. Вид полученных зависимостей представлен на рис. 3–5.

Рис. 3. Коэффициент распределения рождений (а) и динамика общей рождаемости (б) населения Российской Федерации

Рис. 4. Коэффициент распределения смертности (а) и динамика общей смертности (б) населения Российской Федерации

Рис. 5. Коэффициент распределения миграции (а) и динамика общей миграции (б) населения Российской Федерации

Расчеты показали, что к 2021 году, по сравнению с 2016 годом, общая численность населения России вырастет на 4 % (см. рис. 2, б). Однако дальнейшее прогнозирование на основе инерционного сценария показывает, что начиная уже с 2023 года общая численность населения начнет сокращаться. Также следует отметить, что в 2014–2015 годах численность населения значительно выросла, это связано с вхождением Республики Крым в состав Российской Федерации.

Рассмотрим решение задачи моделирования качественной составляющей ЧК на примере статистических данных по России [Кетова и др., 2013]. В расчетах принималось: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$.

Рис. 6. Расходные статьи, направленные на развитие человеческого капитала РФ, за период 2003–2016 гг. (в ценах 2017 года): а) федеральный и региональный бюджеты; б) частные инвестиции

Расходные статьи бюджетов федерального и регионального уровней и частные инвестиции, направленные на развитие человеческого капитала Российской Федерации за период 2003–2016 гг. [Отчетность..., 2018], представлены на рис. 6. Анализ данных показывает, что основная часть государственных расходов в человеческий капитал направлена в здравоохранительную и образовательную составляющие, а частные расходы — в культурную составляющую человеческого капитала.

Решение задачи Коши (16)–(17), полученное для начального момента $t_0 = 2003$ год, представлено на рис. 7, а. Текущие распределения удельных составляющих человеческого капитала $h_i(t, \tau)$ для любого момента времени находятся из решения задачи (8)–(15). На рис. 7, б представлены графики составляющих человеческого капитала для момента времени $t = 2016$ год.

Рис. 7. Распределение составляющих удельного человеческого капитала: 1 — образование, 2 — здравоохранение, 3 — культура; а) для момента времени $t_0 = 2003$ год; б) для момента времени $t = 2016$ год

Рис. 8. Динамика человеческого капитала за период с 2003 года по 2016 год и прогноз до 2021 года (в ценах 2017 года)

По статистическим данным Российской Федерации [Информационный сайт..., 2018; Отчетность..., 2018], за период 2003–2016 гг. на основе решения уравнений (9) и (21) получена динамика изменения человеческого капитала с учетом государственных и частных инвестиций (рис. 8).

Было проведено также прогнозирование динамики человеческого капитала до 2021 года на основе уравнения (22), параметры $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\chi}$ которого принимались постоянными и идентифицировались на основе статистических данных Российской Федерации за период 2003–2016 гг. Было получено: $\bar{\varepsilon} = 0.64$, $\bar{\chi} = 0.032$. Соответствующее решение задачи на рис. 8 обозначено точками.

Идентификация и верификация разработанной модели динамики человеческого капитала выходят за рамки данной статьи. Эта работа может быть проведена по мере накопления соответствующих данных, объем которых в настоящее время недостаточен. Здесь лишь отметим, что полученные результаты качественно коррелируют с динамикой изменения индекса человеческого развития России, определяемого специалистами ООН, который в период с 2000 года по 2012 год возрастал от значения 0.71 до 0.79 и в дальнейшем, вплоть до 2017 года, оставался практически постоянным, близким к значению 0.80.

3. Заключение

1. Разработана математическая модель динамики человеческого капитала, учитывающая демографическую структуру и включающая три компонента: образование, здоровье и культуру. Модель позволяет проводить анализ динамики человеческого капитала и его составляющих как по времени, так и по возрасту.
2. Расчеты показали, что величина человеческого капитала Российской Федерации возрастала в период 2003–2011 гг., в дальнейшем наступил период стабилизации, но после 2014 года имела место отрицательная динамика данной величины вплоть до 2017 года, затем опять прогнозируется период стабилизации.

Список литературы (References)

- Агабеков С. И. Инновационный человеческий капитал и эволюция социально-инновационной структуры России. — М.: Наука, 2003.
- Agabekov S. I. Innovacionnyj chelovecheskij kapital i evolyuciya social'no-innovacionnoj struktury Rossii [Innovative human capital and the evolution of the social innovation structure of Russia]. — Moscow: Nauka, 2003 (in Russian).
- Айвазян С. А. Анализ синтетических категорий качества жизни населения субъектов РФ: их измерение, динамика, основные тенденции // Уровень жизни населения регионов России. — 2002. — № 11.
- Ajvazyayn S. A. Analiz sinteticheskix kategorij kachestva zhizni naseleniya sub'ektov RF: ix izmerenie, dinamika, osnovny'e tendencii [Analysis of synthetic categories of population life quality of the Russian Federation subjects: their measurement, dynamics, main trends] // Uroven' zhizni naseleniya regionov Rossii. — 2002. — No. 11 (in Russian).

- Акопян А. С., Бушнев В. В., Голубев В. С. Эргодинамическая модель человека и человеческий капитал // *Общественные науки и современность*. — 2002. — № 6. — С. 98–106.
Akopyan A. S., Bushnev V. V., Golubev V. S. Ergodinamicheskaya model' cheloveka i chelovecheskij kapital [Ergodynamic model of man and human capital] // Obshchestvenny'e nauki i sovremennost'. — 2002. — No. 6. — P. 98–106 (in Russian).
- Гимельфарб А. А., Гинзбург Л. Р., Полуэктов Р. А., Пых Ю. А., Ратнер В. А. Динамическая теория популяций. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
Gimelfarb A. A., Ginzburg L. R., Poluektov R. A., Pyh Yu. A., Ratner V. A. Dinamicheskaya teoriya populyacij [Dynamic theory of populations]. — Moscow: Nauka, 1974. — 456 p. (in Russian).
- Добрынин А. И., Дятлов С. А. Человеческий капитал в транзитивной экономике. — СПб.: Наука, 1999. — 309 с.
Dobrynin A. I., Dyatlov S. A. Chelovecheskij kapital v tranzitivnoj e'konomike [Human capital in a transitive economy]. — St. Petersburg: Nauka, 1999. — 309 p. (in Russian).
- Дятлов С. А. Инвестиции в человеческий капитал: критерии эффективности // *Известия СПбУЭФ*. — 1996. — № 4. — С. 32–51.
Dyatlov S. A. Investicii v chelovecheskij kapital: kriterij e'ffektivnosti [Investment in human capital: a measure of effectiveness] // Izvestiya SPbUEF. — 1996. — No. 4. — P. 32–51 (in Russian).
- Ильинский И. В. Инвестиции в будущее: образование в инвестиционном воспроизводстве. — СПб.: Изд-во СПбУЭФ, 1996. — 250 с.
Ilnskij I. V. Investicii v budushhee: obrazovanie v investicionnom vosproizvodstve [Investing in the future: education in investment reproduction]. — St. Petersburg: Publishing House SPbUEF, 1996. — 250 p. (in Russian).
- Информационный сайт Госкомстата России [Электронный ресурс] / Официальный сайт федеральной службы государственной статистики Российской Федерации. URL: <http://www.gks.ru> (дата обращения: 22.11.2018).
Information site of the State Statistics Committee of Russia [Electronic resource] / Official site of the Federal State Statistics Service of the Russian Federation. Available at: http://www.gks.ru (accessed 22.11.2018) (in Russian).
- Капелюшников Р. И. Сколько стоит человеческий капитал России? НИУ «Высшая школа экономики». — М.: Изд. Дом Высшей школы экономики, 2012. — 76 с.
Kapelyushnikov R. I. Skol'ko stoit chelovecheskij kapital Rossii? NIU «Vy'sshaya shkola e'konomiki» [How much is the human capital of Russia? National Research University Higher School of Economics]. — Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. — 76 p. (in Russian).
- Кетова К. В. Математические модели экономической динамики: монография. — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2013. — 284 с.
Ketova K. V. Matematicheskie modeli e'konomicheskoy dinamiki [Mathematical models of economic dynamics]. — Izhevsk: Publishing House of ISTU, 2013. — 284 p. (in Russian).
- Кетова К. В., Русяк И. Г., Дерендяева Е. А. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2013615414. Программно-вычислительный комплекс «Решение задачи оптимального управления региональной экономической системой» // Заявка № 2013612795. Зарегистрирован в Реестре программ для ЭВМ 06.06.2013.
Ketova K. V., Rusyak I. G., Derendyaeva E. A. Certificate of official registration of computer programs No. 2013615414. Programmno-vychislitel'nyj kompleks "Reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya regional'noj ekonomicheskoy sistemoy" [Software and computer complex "Solving the problem of optimal control of a regional economic system"] // Application No. 2013612795. Registered in Computer Program Register on 06.06.2013 (in Russian).
- Кетова К. В., Русяк И. Г., Романовский Ю. М. Анализ динамики человеческого капитала России и его математическое моделирование // Труды Второй всерос. междисциплинар. конф. «Социофизика и социоинженерия' 2018», 23–25 мая 2018 г., Москва. — Ин-т проблем упр. Им. В. А. Трапезникова; МГУ, 2018. — С. 161–162. — URL: <http://soc-physics.ipu.ru/sites/default/files/Труды%20конференции%20%283%29.pdf> (дата обращения: 22.11.2018).
Ketova K. V., Rusyak I. G., Romanovskij Yu. M. Analiz dinamiki chelovecheskogo kapitala Rossii i ego matematicheskoe modelirovanie [Analysis of the human capital dynamics in Russia and its mathematical modeling] // Trudy Vtoroj vseros. mezhdisciplinar. konf. "Sociofizika i socioinzheneriya' 2018", May 23–25, 2018, Moscow. — Moscow: MSU, 2018. — P. 161–162. Available at: http://soc-physics.ipu.ru/sites/default/files/Труды%20конференции%20%283%29.pdf (accessed 22.11.2018) (in Russian).

- Корицкий А. В. Введение в теорию человеческого капитала. — Новосибирск: Изд-во СибУПК, 2000. — 112 с.
Koriczkij A. V. Vvedenie v teoriyu chelovecheskogo kapitala [Introduction to the theory of human capital]. — Novosibirsk: SibUPK publishing house, 2000. — 112 p. (in Russian).
- Малков С. Ю., Болохова К. А., Давыдова О. И. Модель оценки и прогноза развития человеческого капитала // Экономика и управление: проблемы, решения. — 2016. — № 7. — С. 7–16.
Malkov S. Yu., Bolohova K. A., Davydova O. I. Model' ocenki i prognoza razvitiya chelovecheskogo kapitala [Evaluation and prediction model of human capital development] // *Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya*. — 2016. — No. 7. — P. 7–16 (in Russian).
- Отчетность об исполнении консолидированного бюджета РФ. Министерство финансов Российской Федерации [Электронный ресурс] / Официальный сайт Федерального казначейства (Казначейство России). — URL: <http://www.roskazna.ru/> (дата обращения: 22.11.2018).
Reporting on the performance of the consolidated budget of the Russian Federation. Ministry of Finance of the Russian Federation [Electronic resource] / Official site of the Federal Treasury (Treasury of Russia). — Available at: <http://www.roskazna.ru/> (accessed: 22.11.2018) (in Russian).
- Романовский М. Ю. Человеческий потенциал и человеческий капитал России // Мир человека: неопределенность как вызов. — М.: Леонард, 2018. — С. 198–223.
Romanovskij M. Yu. Chelovecheskij potencial i chelovecheskij kapital Rossii [Human potential and human capital of Russia] // *Mir cheloveka: neopredelennost' kak vyzov* [In the book “The human world: uncertainty as a challenge”]. — Moscow: Leonard, 2018. — P. 198–223 (in Russian).
- Романовский М. Ю., Романовский Ю. М. Введение в эконофизику: статистические и динамические модели. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012.
Romanovskij M. Yu., Romanovskij Yu. M. Vvedenie v e'konofiziku: statisticheskie i dinamicheskie modeli [Introduction to Econophysics: Statistical and Dynamic Models]. — Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuterny'x issledovanij, 2012 (in Russian).
- Русяк И. Г., Кетова К. В. Анализ погрешностей прогнозирования демографических показателей // Вестник ИжГТУ имени М. Т. Калашникова. — 2004. — № 3. — С. 43–45.
Rusyak I. G., Ketova K. V. Analiz pogreshnostej prognozirovaniya demograficheskikh pokazatelej [Analysis of errors in forecasting demographic indicators] // *Bulletin of Kalashnikov Izhevsk State Technical University*. — 2004. — No. 3. — P. 43–45 (in Russian).
- Русяк И. Г., Кетова К. В. Экономико-математическая модель анализа и прогноза фактора человеческого капитала // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. — 2007. — № 2. — С. 56–61.
Rusyak I. G., Ketova K. V. E'konomiko-matematicheskaya model' analiza i prognoza faktora chelovecheskogo kapitala [Economic-mathematical model of analysis and forecast of human capital factor] // *Economics, statistics and informatics. Vestnik UMO*. — 2007. — No. 2. — P. 56–61 (in Russian).
- Соболев Э. Н., Соболева И. В. Человеческий капитал в системе трудовых отношений: социальное инвестирование и вызовы глобализации // Экономика и управление: проблемы, решения. — 2018. — № 1. — С. 7–17.
Sobolev E. N., Soboleva I. V. Chelovecheskij kapital v sisteme trudovy'x otnoshenij: social'noe investirovanie i vy'zovy' globalizacii [Human capital in the labor relations system: social investment and the challenges of globalization] // *Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya*. — 2018. — No. 1. — P. 7–17 (in Russian).
- Староверов О. В. Азы математической демографии. — М.: Наука, 1977. — 160 с.
Staroverov O. V. Azy matematicheskoy demografii [The basics of mathematical demography]. — Moscow: Nauka, 1977. — 160 p. (in Russian).
- Эренберг Р. Д., Смит Р. С. Современная экономика труда. Теория и государственная политика. — М.: Изд-во МГУ, 1996. — 198 с.
Erenberg R. D., Smit R. S. Sovremennaya e'konomika truda. Teoriya i gosudarstvennaya politika [Modern labor economics. Theory and public policy]. — Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1996. — 198 p. (in Russian).
- Becker G. S. Investment in Human Capital: Theoretical Analysis // *Journal of Political Economy*. Supplement. — Oct., 1962.
- Mincer J. Investments in Human Capital and Personal Income Distribution // *Journal of Political Economy*. — Aug., 1958.
- Schulz T. Investment in Human Capital // *American Economic Review*. — 1961. — No. 1.