КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 Т. 11 № 1 С. 173–185
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-173-185

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.876

Борьба с экономической коррупцией при распределении ресурсов

М. Х. Мальсагов[1,a], Г. А. Угольницкий[2,b], А. Б. Усов[2,c]

[1] Ингушский государственный университет,
Россия, 386132, Ингушетия, г. Назрань, ул. Магистральная, д. 39

[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344002, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, д. 105/42

E-mail: [a] mmm1956@bk.ru, [b] ougoln@mail.ru, [c] tol151968@yandex.ru

Получено 16.09.2018, после доработки — 05.11.2018.
Принято к публикации 07.11.2018.

В теоретико-игровой постановке рассмотрена модель борьбы с коррупцией при распределении ресурсов. Система распределения ресурсов включает в свой состав одного принципала (субъект управления верхнего уровня), одного или нескольких супервайзеров (субъектов среднего уровня) и нескольких агентов (субъекты нижнего уровня). Отношения между субъектами разных уровней строятся на основе иерархии: субъект верхнего уровня воздействует (управляет) на субъектов среднего уровня, а те, в свою очередь, на субъектов нижнего уровня. Предполагается, что коррупции подвержен средний уровень управления. Агенты предлагают супервайзеру взятки, в обмен на которые он предоставляет им дополнительные доли ресурса. Предположим также, что принципал не подвержен коррупции и является бескорыстным, не преследующим частных целей. Исследование модели проведено с точки зрения как супервайзера, так и агентов. С точки зрения агентов, возникает некооперативная игра, в которой находится равновесие Нэша. При этом задачи оптимального управления для частного вида входных функций решаются аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина. С точки зрения супервайзера, возникает игра, которая ведется в соответствии с регламентом игры Гермейера Γ_{2t}. Указан алгоритм построения равновесия. Стратегия наказания находится аналитически. Стратегия поощрения в случае входных функций общего вида находится численно. Строится дискретный аналог непрерывной модели. Предполагается, что все субъекты управления могут изменять свои стратегии поведения в одни и те же моменты времени конечное число раз. В результате от задачи максимизации своего целевого функционала супервайзер переходит к задаче максимизации целевой функции многих переменных. Для нахождения ее наибольшего значения используется метод качественно репрезентативных сценариев. Идея этого метода состоит в том, что из множества потенциально возможных сценариев управления выбираются только сценарии, позволяющие представить качественно различные пути развития системы. В результате мощность этого множества не слишком велика и удается осуществить полный перебор качественно репрезентативных сценариев и найти стратегию поощрения агентов. После ее нахождения супервайзер предлагает агентам механизм управления с обратной связью по управлению, состоящий в наказании агентов при отклонении от выбранной супервайзером стратегии и поощрении в противном случае.

Ключевые слова: равновесие Нэша, равновесие Штакельберга, коррупция, игры Гермейера, супервайзер, принципал, агент, принцип максимума Понтрягина

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00053.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2019 VOL. 11 NO. 1 P. 173–185
DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-173-185

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.876

Struggle against economic corruption in resource allocation

M. H. Malsagov[1,a], G. A. Ugol'nitskii[2,b], A. B. Usov[2,c]

[1] Ingush State University,
39 Magistralnaya st., Nazran, Ingushetia, Russia, 386132

[2] Southern Federal University,
105/42 B. Sadovaya st., Rostov-on-Don, Russia, 344002

E-mail: [a] mmm1956@bk.ru, [b] ougoln@mail.ru, [c] tol151968@yandex.ru

Received 16.09.2018, after completion — 05.11.2018.
Accepted for publication 07.11.2018.

A dynamic game theoretic model of struggle against corruption in resource allocation is considered. It is supposed that the system of resource allocation includes one principal, one or several supervisors, and several agents. The relations between them are hierarchical: the principal influences to the supervisors, and they in turn exert influence on the agents. It is assumed that the supervisor can be corrupted. The agents propose bribes to the supervisor who in exchange allocates additional resources to them. It is also supposed that the principal is not corrupted and does not have her own purposes. The model is investigated from the point of view of the supervisor and the agents. From the point of view of agents a non-cooperative game arises with a set of Nash equilibria as a solution. The set is found analytically on the base of Pontryagin maximum principle for the specific class of model functions. From the point of view of the supervisor a hierarchical Germeyer game of the type Γ_{2t} is built, and the respective algorithm of its solution is proposed. The punishment strategy is found analytically, and the reward strategy is built numerically on the base of a discrete analogue of the initial continuous-time model. It is supposed that all agents can change their strategies in the same time instants only a finite number of times. Thus, the supervisor can maximize his objective function of many variables instead of maximization of the objective functional. A method of qualitatively representative scenarios is used for the solution. The idea of this method consists in that it is possible to choose a very small number of scenarios among all potential ones that represent all qualitatively different trajectories of the system dynamics. These scenarios differ in principle while all other scenarios yield no essentially new results. Then a complete enumeration of the qualitatively representative scenarios becomes possible. After that, the supervisor reports to the agents the reward-punishment control mechanism.

Keywords: Nash equilibrium, Stackelberg equilibrium, corruption, Germeier games, supervisor, principal, agent, Pontryagin maximum principle

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 173–185 (Russian).

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project No. 18-01-00053.

1. Введение

Коррупция оказывает значительное влияние не только на экономическую составляющую любого общества, но и на его социальную и политическую составляющие. Борьба с коррупцией и различными ее проявлениями является сложной задачей, решение которой невозможно без научно обоснованного, комплексного подхода к проблеме. Этот подход подразумевает построение и исследование математических моделей борьбы с коррупцией, анализ результатов моделирования для различных наборов входных данных.

В настоящее время имеется довольно значительное количество работ, посвященных разным аспектам борьбы с коррумпированным поведением субъектов управления разных уровней. В большинстве имеющихся работ строятся и исследуются статические модели борьбы с коррупцией [Blackburn et al., 2006; Blackburn, Forgues-Puccio, 2010; Lambsdorff, 2007; Levin, Satarov, 2013; Nikolaev, 2014; Rose-Ackerman, 1975; Антоненко и др., 2013; Васин и др., 2011]. В других работах исследуются динамические модели, но при достаточно жестких ограничениях на входные параметры используемых моделей или на выбранный информационный регламент [Bicchieri, Rovelli, 1995; Gorbaneva et al., 2016; Угольницкий, Усов, 2014a, 2014b, 2014c].

Авторская концепция моделирования методов борьбы с коррупцией [Gorbaneva et al., 2016] основана на теоретико-игровом и иерархическом подходах. Все современные системы управления являются многоуровневыми системами, отношения внутри которых строятся на основе иерархии. Имеется несколько субъектов управления нижнего уровня (ведомых или агентов), один или несколько субъектов среднего уровня (супервайзер) и один субъект верхнего уровня (ведущий или принципал). Предполагается, что именно принципал ведет борьбу с коррупцией. Остальные субъекты управления (агенты и супервайзер) стремятся только к получению максимально возможного выигрыша (максимизации своих целевых функционалов) в условиях коррупции. Агенты предлагают супервайзеру взятки, в обмен на которые он предоставляет им некоторые привилегии или льготы. Отношения между агентами и супервайзером, а также между супервайзером и принципалом строятся на основе иерархии в соответствии с некоторыми информационными регламентами. Чаще всего в качестве информационных регламентов на практике реализуются информационные регламенты игр Штакельберга или Гермейера [Basar, Olsder, 1999; Dockner et al., 2000; Горелик и др., 1991; Угольницкий, 2016].

Настоящая статья логически продолжает и обобщает ряд работ авторов [Gorbaneva et al., 2016; Угольницкий, Усов, 2013, 2014a, 2014b, 2014c; Угольницкий, 2016]. В [Gorbaneva et al., 2016] построена система динамических моделей административной коррупции и методов борьбы с ней для моделей оптимальной эксплуатации биоресурсов. В [Угольницкий, Усов, 2014a, 2014b] предложены и исследованы модели экономической коррупции в системах контроля качества поверхностных вод.

В данной статье строятся динамические модели борьбы с коррупцией в моделях распределения ресурсов. В отличие от [Gorbaneva et al., 2016; Угольницкий, Усов, 2014a, 2014b, 2014c], исследован случай нескольких агентов, что принципиально как для моделей согласования частных и общественных интересов, так и моделей распределения ресурсов и выражается в нахождении равновесия Нэша в игре агентов. В отличие от [Угольницкий, Усов, 2014a, 2014b, 2014c] ниже строятся модели борьбы с экономической коррупцией при распределении ресурсов и больше внимания уделено численной реализации алгоритмов построения равновесий в системах при наличии коррупции. Субъект среднего уровня (супервайзер) управляет долями ресурса, выделяемыми разным агентам. Используется информационный регламент игры Гермейера Γ_{2t} [Горелик и др., 1991]. Особое внимание уделено методу качественно репрезентативных сценариев (КРС) при определении стратегии поощрения агентов супервайзером [Ougolnitsky, Usov, 2018].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему распределения государственным органом (супервайзером) некоторого ресурса между несколькими агентами. Агенты используют выделенный им ресурс как на увеличение общественного блага, так и на личные цели. Имеется еще один государственный орган (принципал), который контролирует деятельность супервайзера. В системе принят следующий порядок действий: первым определяет свое управление принципал и сообщает его супервайзеру и агентам. Вторым объявляет свое управление супервайзер и сообщает его агентам. Агенты выбирают свои управления, когда выбор остальных субъектов уже известен. Субъекты управления всех уровней стремятся к получению максимального выигрыша (дохода), который определяется их целевыми функционалами. Предполагается, что в системе возможна коррупция. Агенты предлагают супервайзеру взятки, в обмен на которые он увеличивает выделяемые в их распоряжение доли ресурса. Супервайзер выступает в роли взяточника, а агенты — в роли взяткодателей.

Ниже будет рассмотрен случай бескорыстного принципала, который не преследует своих личных целей, а только наказывает супервайзера за взятки путем штрафа. Супервайзер и агенты стремятся к максимизации своего дохода, их целевые функционалы возьмем в следующем виде:

– супервайзера:

$$J_S(\{r_i(\cdot)\}_{i=1}^N, \{b_i(\cdot)\}_{i=1}^N, x(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t}\left\{p_0 x(t) + [1 - Mz(t)]\sum_{i=1}^N b_i(t) r_i(t)\right\} dt + g_S(x(T)) \to \max; \quad (1)$$

– агентов $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$J_i(r_i(\cdot), s_i(\cdot), b_i(\cdot), x(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t} k_i s_i(t)[1 - b_i(t)] r_i(t) dt + g_i(x(T)) \to \max. \quad (2)$$

Здесь N — количество агентов; T — момент времени, до которого ведется рассмотрение; ρ — коэффициент дисконтирования; t — временная координата; x — величина общественного блага, производимого агентами; p_0 — установленная государством доля супервайзера в общественном благе; $r_i(t)$ — управление супервайзера — доля ресурса, выделяемая супервайзером i-му агенту с учетом полученной взятки; $b_i(t)$ (управление агента) — взятка («откат»), предлагаемая i-м агентом супервайзеру (доля от r_i); $s_i(t)$ (управление агента) — доля полученного ресурса $(1 - b_i(t) r_i(t)$, которая идет на личные цели агента; $z(t)$ — вероятность наказания супервайзера за взятку; M — коэффициент, характеризующий величину штрафа супервайзера при получении им взятки; $g_S(x(T))$ — терминальное слагаемое, характеризующее доход супервайзера в зависимости от величины общественного блага в заключительный момент времени; k_i — коэффициент, характеризующий доход i-го агента от личной деятельности; $g_i(x(T))$ — терминальное слагаемое, характеризующее доход i-го агента в зависимости от величины общественного блага в заключительный момент времени.

Целевые функционалы (1), (2) рассматриваются при следующих ограничениях на управления:

– супервайзера:

$$r_i(t) \ge 0, \quad \sum_{i=1}^N r_i(t) \le R; \quad (3)$$

– агентов:

$$0 \le b_i(t) \le 1, \quad 0 \le s_i(t) \le 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad (4)$$

Здесь R — величина ресурса, имеющегося в распоряжении супервайзера.

Функционалы (1), (2) выражают выигрыш супервайзера и агентов соответственно. При этом предполагается, что супервайзер получает в свое распоряжение долю общественного блага в виде вознаграждения в каждый момент времени, в том числе и в конечный момент, а агенты — только в конечный момент времени.

Уравнение, описывающее динамику общественного дохода (блага), возьмем в виде

$$\dot{x} = -qx + \sum_{i=1}^{N} a_i \sqrt{(1-s_i(t))(1-b_i(t))r_i(t)}, \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Здесь a_i — коэффициент, характеризующий производственную функцию i-го агента; q — коэффициент, связанный с амортизацией при производстве общественного блага; x_0 — величина общественного блага в начальный момент времени.

Итак, рассматривается система управления распределением ресурсов, описываемая уравнениями и соотношениями (1)–(5).

3. Построение равновесия Нэша

Если вести рассмотрение с точки зрения агентов, то в модели (1)–(5) необходимо задать управления супервайзера — функции взятки $r_i(t)$. Ниже исследуем случай функций $r_i(t)$ вида

$$r_i(t) = Rb_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6}$$

В этом случае удается найти в аналитическом виде стратегии агентов в равновесии Нэша. Итак, решается только задача агентов (2), (4), (5) с учетом (6). Эта задача представляет собой неантагонистическую игру N лиц, в которой строится равновесие Нэша. Для определения оптимальной стратегии каждого агента решается задача оптимального управления. При этом используем принцип максимума Понтрягина [Dockner et al., 2000]. Функция Гамильтона для i-го агента имеет вид

$$H_i(x(t), b_i(t), s_i(t), \lambda_i(t)) = e^{-\rho t} k_i R s_i(t) b_i(t)[1-b_i(t)] + \lambda_i \left(-qx + \sum_{k=1}^{N} a_k \sqrt{R(1-s_k) b_k(t)(1-b_k(t))} \right). \tag{7}$$

Перейдем от задачи (2), (4), (5) с учетом (6) к эквивалентной задаче поиска максимума функции Гамильтона (7) при известных ограничениях на управления [Dockner et al., 2000], которую можно записать в виде системы уравнений $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\frac{\partial H_i}{\partial b_i} = e^{-\rho t} k_i R s_i (1-2b_i(t)) + \lambda_i a_i \sqrt{R(1-s_i)} \frac{1-2b_i(t)}{2\sqrt{(1-b_i(t))b_i(t)}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial s_i} = e^{-\rho t} k_i R b_i(t)[1-b_i(t)] - \lambda_i \frac{a_i \sqrt{R b_i(t)(1-b_i(t))}}{2\sqrt{1-s_i}} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i} = -qx + \sum_{k=1}^{N} a_k \sqrt{R(1-s_k) b_k(t)(1-b_k(t))}, \quad x_i(0) = x_0, \tag{10}$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial x} = -q\lambda_i, \quad \lambda_i(T) = \frac{dg_i}{dx(T)}. \tag{11}$$

В (8)–(11) функции $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ играют роль сопряженных функций. Требуется найти систему функций $\left\{ \left(b_i, s_i, \lambda_i \right)_{i=1}^{N}, x \right\}$, удовлетворяющую системе уравнений (8)–(11) $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Эта система функций будет доставлять максимум функции Гамильтона (7).

Алгоритм решения задачи (8)–(11) состоит в следующем.

1. Решается задача для сопряженной функции (11). Отсюда, например, в случае

$$g_i(x(T)) = c_i x(T), \quad c_i = \text{const}, \tag{12}$$

получим, что

$$\lambda_i(t) = c_i e^{q(T-t)}.$$

2. Подставим найденные на первом шаге алгоритма сопряженные функции в (8), (9).
3. Решается система уравнений (8), (9). Найденные решения подставляются в (10).
4. Из обыкновенного дифференциального уравнения (10) находится переменная состояния системы $x(t)$.

Из (9) получим, что в равновесии Нэша

$$s_i^{NE} = 1 - e^{2\rho t} \frac{\lambda_i^2 a_i^2}{4k_i^2 R b_i^{NE}(t)[1-b_i^{NE}(t)]}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{13}$$

Из (8) получим, что $b_i^{NE} = 0.5$, или определяется из решения уравнения

$$e^{-\rho t} k_i s_i \sqrt{R} + \lambda_i a_i \sqrt{1-s_i} \frac{1}{2\sqrt{(1-b_i(t))b_i(t)}} = 0.$$

Последнее уравнение, с учетом формулы (13) и содержательного смысла входных параметров модели, решений не имеет. Поэтому решение задачи (2), (4), (5), с учетом (6), имеет вид

$$b_i^{NE} = 0.5, \quad s_i^{NE} = 1 - e^{2(\rho-q)t+2qT} \frac{c_i^2 a_i^2}{k_i R}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

Переменная состояния системы определяется из уравнения

$$\frac{dx^{NE}}{dt} = -qx^{NE} + \frac{1}{2} e^{(\rho-q)t+qT} \sum_{l=1}^{N} \frac{c_i a_l^2}{\sqrt{k_l}}.$$

Отсюда, в случае $a_i, c_i, k_i = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, получим, что

$$x^{NE}(t) = \left(x_0 - \frac{B}{\rho} \right) e^{-qt} + \frac{B}{\rho} e^{(\rho-q)t}, \tag{15}$$

где $B = \frac{1}{2} e^{qT} \sum_{l=1}^{N} \frac{c_i a_l^2}{\sqrt{k_l}}$.

Итак, равновесие Нэша в игре агентов (2), (4), (5), с учетом (6) и (12), выражается формулами (14), (15).

Пример 1. В случае (сут — сутки, у. е. — условные единицы для выражения стоимости) $N = 3$, $\rho = 0.01$, $T = 1095$ сут, $k_1 = 20$, $k_2 = 50$, $k_3 = 100$, $x_0 = 100$ у. е., $R = 100$ у. е., $c_1 = 100$ сут, $a_1 = 0.1$ сут$^{-1}$, $a_2 = 0.05$ сут$^{-1}$, $a_3 = 0.02$ сут$^{-1}$, $c_2 = 150$ сут, $c_3 = 200$ сут, $q = 0.001$ сут$^{-1}$ равновесие Нэша и доходы субъектов определяются формулами

$$b_i^{NE}(t) \equiv 0.5 \quad (i = 1, 2, 3), \quad s_{1,2}^{NE}(T/10) = s_{1,2}^{NE}(T/2) = s_{1,2}^{NE}(T) = 0,$$

$$s_3^{NE}(T/10) = s_3^{NE}(T/2) = s_3^{NE}(T) = 0.84 \text{ и } J_1 = 10425 \text{ у. е.}, \ J_2 = 15633 \text{ у. е.}, \ J_3 = 20841 \text{ у. е.}$$

Величина общественного блага с течением времени незначительно растет ($x^{NE}(T) = 104$ у. е.).

Пример 2. В случае входных данных примера 1 и при уменьшении доли агентов в общественном благе в 10 раз ($c_1 = 10$ сут, $c_2 = 15$ сут, $c_3 = 20$ сут) стратегии всех субъектов управления меняются, а их доходы падают, в том числе уменьшается и доход супервайзера. В этом случае

$$b_i^{NE}(t) \equiv 0.5 \quad (i = 1,2,3), \quad s_1^{NE}(T/10) = s_1^{NE}(T/2) = s_1^{NE}(T) = 0.73,$$
$$s_2^{NE}(T/10) = s_2^{NE}(T/2) = s_2^{NE}(T) = 0.97, \quad s_3^{NE}(T/10) = s_3^{NE}(T/2) = s_3^{NE}(T) = 0.98$$
$$\text{и } J_1 = 926 \text{ у. е.}, \ J_2 = 1390 \text{ у. е.}, \ J_3 = 1853 \text{ у. е.}$$

Величина общественного блага незначительно уменьшается ($x^{NE}(T) = 92$ у. е.) по сравнению с примером 1.

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и при уменьшении доходов агентов от частной деятельности в 10 раз ($k_1 = 2$, $k_2 = 5$, $k_3 = 10$) выигрыши всех субъектов, в том числе и агентов, возрастают. Агенты все полученные ресурсы вкладывают в общественную деятельность, величина общественного блага при этом значительно растет (примерно на 30 %) ($x^{NE}(T) = 131$ у. е.). В этом случае $b_i^{NE}(t) \equiv 0.5$ $(i = 1,2,3)$, $s_i^{NE}(T/10) = s_i^{NE}(T/2) = s_i^{NE}(T) = 0$ $(i = 1,2,3)$ и $J_1 = 13194$ у. е., $J_2 = 19787$ у. е., $J_3 = 26380$ у. е.

Пример 4. В случае входных данных примера 3 при уменьшении производительности агентов при вкладе в общественное благо ($a_1 = 0.01$ сут$^{-1}$, $a_2 = 0.005$ сут$^{-1}$, $a_3 = 0.002$ сут$^{-1}$) их доходы по сравнению с примером 3 уменьшаются и

$$b_i^{NE} = 0.5, \quad s_{1,2}^{NE}(T/10) = s_{1,2}^{NE}(T/2) = s_{1,2}^{NE}(T) = 0,$$
$$s_3^{NE}(T/10) = s_3^{NE}(T/2) = s_3^{NE}(T) = 0.83, \quad J_1 = 9180 \text{ у. е.}, \quad J_2 = 13770 \text{ у. е.}, J_3 = 18360 \text{ у. е.}$$

Величина общественного блага по сравнению с примером 1 незначительно уменьшается (примерно на 10 %): $x^{NE}(T) = 92$ у. е.

4. Построение равновесия Штакельберга

С точки зрения супервайзера, (1)–(5) представляет собой динамическую иерархическую игру N ведомых (агентов) и одного ведущего (супервайзера). Ниже рассматривается случай, когда игра ведется в соответствии с информационным регламентом игры Гермейера Γ_{2t} (игры Штакельберга с обратной связью по управлению). Алгоритм построения равновесия в этом случае состоит в следующем.

1. Находится стратегия наказания супервайзером агентов, когда последние не хотят с ним сотрудничать:

$$r^P(t) = \left\{ r_i^P(t) \right\}_{i=1}^N : \ r_i^P(t) = \arg \min_{r_i \geq 0; \sum_{i=1}^N r_i \leq R} J_i(b_i^{NE}(t), s_i^{NE}(t), r_i(t), x(t)).$$

Ясно, что при наказании

$$r_i^P(t) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Набор управлений агентов $\left\{ b_i^{NE}(t), s_i^{NE}(t) \right\}_{i=1}^N$ есть равновесие Нэша в игре N агентов при заданной стратегии супервайзера $\left\{ r_i^P(t) = 0 \right\}_{i=1}^N$. Причем

$$b_i^{NE}(t) = 0, \quad s_i^{NE}(t) = 1, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Находятся гарантированные выигрыши агентов, если они отказываются сотрудничать с супервайзером, и он применяет стратегию наказания. В случае (12) имеем

$$L_i = \min_{r_i \ge 0; \sum_{i=1}^{N} r_i \le R} J_i(b_i^{NE}(t), s_i^{NE}(t), r_i^P(t), x(t)) = x_0 c_i e^{-qT}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

2. Решается задача оптимального управления (1), (3)–(5) с дополнительными условиями

$$L_i = x_0 c_i e^{-qT} < J_i(b_i(t), s_i(t), r_i(t), x(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Эти условия делают для агентов стратегию поощрения со стороны супервайзера более выгодной по сравнению со стратегией наказания.

При этом максимум в (1) ищется одновременно по ($3N$) функциям $(r_i(t), s_i(t), b_i(t))$, $i = 1, \ldots, N$. Решение указанной задачи оптимального управления обозначим как $\left\{r_i^R(t),\ b_i^R(t), s_i^R(t)\right\}_{i=1}^{N}$, где $r_i^R(t)$ — стратегия поощрения i-го агента супервайзером при выборе им в качестве своих управлений $b_i^R(t)$ и $s_i^R(t)$.

3. Супервайзер предъявляет каждому агенту стратегию с обратной связью по его управлению:

$$r_i(t) = \begin{cases} r_i^R(t), & \text{если } b_i(t) = b_i^R(t) \text{ и } s_i(t) = s_i^R(t) \qquad \forall\, t \in [0, \infty), \\ r_i^P(t), & \text{иначе}. \end{cases}$$

При экономически разумных агентах равновесие имеет вид

$$\left\{r_i^R(t),\ b_i^R(t), s_i^R(t)\right\}_{i=1}^{N}.$$

Решение задачи из пункта 3 для входных функций общего вида ищется численно путем дискретизации [Угольницкий, Усов, 2013] и методом качественно репрезентативных сценариев (КРС) [Ougolnitsky, Usov, 2018].

Субъекты управления не могут часто менять свои стратегии в силу объективной инерции процессов в системах управления. Управляющие воздействия всех субъектов остаются постоянными в течение некоторых промежутков времени, т. е. можно считать, что

$$A(t) = \begin{cases} a_1, & \text{если } 0 \le t < t_1, \\ a_2, & \text{если } t_1 \le t < t_2, \\ \quad \ldots & \\ a_N, & \text{если } t_{N-1} \le t < T, \end{cases} \tag{16}$$

где под функцией $A(t)$ понимаются управления как агентов (функции $b_i(t)$, $s_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$), так и супервайзера (функции $r_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$); $a_j = \text{const}$, $t_j = j\,\Delta t$; $\Delta t = T / K$, $j = 1, 2, \ldots, K$, K — число интервалов постоянства управлений субъектов. С учетом (16) получим, что

– функционал (1) превратится в целевую функцию вида

$$J_S(\{r_{ij}\}_{i,j=1}^{N(K)}, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{N(K)}, x(\cdot)) = \sum_{j=1}^{K} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\rho t} p_0 x(t) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{K} \left(\sum_{i=1}^{N} b_{ij} r_{ij} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\rho t} [1 - M z(t)] dt \right) + g_S(x(T)) \ \to \max; \tag{17}$$

– функционалы (2) — в целевые функции $(i=1,2,\ldots,N)$:

$$J_i(\{r_{ij}\}_{j=1}^K, \{b_{ij}\}_{j=1}^K, \{s_{ij}\}_{j=1}^K, x(\cdot)) = \sum_{j=1}^K [1-b_{ij}] r_{ij} s_{ij} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\rho t} k_i dt + g_i(x(T)) \to \max; \tag{18}$$

– ограничения на управления супервайзера (3) примут вид

$$r_{ij} \ge 0, \quad \sum_{i=1}^N r_{ij} \le R, \quad j=1,2,\ldots,K; \tag{19}$$

– ограничения на управления агентов (4) $(i=1,2,\ldots,N)$ примут вид

$$0 \le b_{ij} \le 1, \quad 0 \le s_{ij} \le 1, \quad j=1,2,\ldots,K. \tag{20}$$

Уравнение динамики (5) останется без изменения.

Таким образом, задача, решаемая в пункте 3 алгоритма, сводится к задаче максимизации целевой функции (17) сразу по $3 \cdot K \cdot N$ переменным $\{r_{ij}\}_{i,j=1}^{N(K)}, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{N(K)}, \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{N(K)}$ с условиями (19), (20) и дополнительным условием

$$x_0 c_i e^{-qT} < \sum_{j=1}^K [1-b_{ij}] r_{ij} \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\rho t} k_i s_i(t) dt + g_i(x(T)). \tag{21}$$

Аналитически решить эту задачу в случае входных функций общего вида не удается, поэтому задача решается методом КРС имитационного моделирования. Идея метода КРС состоит в том, что из множества потенциально возможных сценариев управления выбираются только сценарии, позволяющие представить качественно различные пути развития системы [Ougolnitsky, Usov 2018].

Множество КРС в данном случае есть декартово произведение $N \times K$ множеств:

$$QRS = QRS_{11} \times QRS_{12} \times \ldots \times QRS_{1K} \times QRS_{21} \times \ldots \times QRS_{NK}. \tag{22}$$

Множество QRS_{ij} есть множество КРС в момент времени $j=1,2,\ldots,K$ (на j-й год) для супервайзера и i-го агента. Это множество содержит тройки элементов $\left(r_{ij}^{QRS}, b_{ij}^{QRS}, s_{ij}^{QRS}\right)$.

Построим множество КРС следующим образом: перенумеруем всех агентов от 1 до N и примем, что множество QRS_{ij} в каждый момент времени j по отношению к каждому агенту i содержит 27 элементов:

$$QRS_{ij} == \left\{ \left(r_{ij}^{QRS}, b_{ij}^{QRS}, s_{ij}^{QRS}\right) : r_{ij}^{QRS} = \left\{0; \frac{1}{2}(R - \sum_{k=1}^{i-1} r_{kj}); R - \sum_{k=1}^{i-1} r_{kj}\right\}; \right. \tag{23}$$

$$\left. b_{ij}^{QRS} = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\};\ s_{ij}^{QRS} = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\} \right\} \quad (j=1,2,\ldots,K; \quad i=1,2,\ldots,N).$$

Построенное таким образом множество QRS после задания всех входных параметров модели проверяется на достаточность и избыточность [Ougolnitsky, Usov, 2018] и при необходимости пополняется или сужается. Изначально множество КРС содержит $m = \prod_{i,j=1}^{N(K)} \left|QRS_{ik}\right| = 27^{K \cdot N}$

элементов. Мощность множества КРС велика, но оно конечно и, как показали численные эксперименты, допускает полный перебор.

Численный алгоритм решения задачи пункта 3 алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются вид и значения всех входных функций и параметров задачи (величины $N, K, R, T, x_0,\ q,\ \rho, M,\ z, p_0, g_S, c_i, g_i, k_i\ \ (i = 1, 2, \ldots, N)$).

2. Начальное множество КРС вида (22), (23) проверяется на достаточность и избыточность и при необходимости пополняется или сужается.

3. Фиксируется очередная (l-я) стратегия из QRS: $\left(\left\{r_{ij}^{QRS}, b_{ij}^{QRS}, s_{ij}^{QRS}\right\}_{i,j=1}^{N(K)}\right)^{(l)}$.

Вначале выполнения алгоритма $l = 1$.

4. Определенная в пункте 3 стратегия из QRS подставляется в (5). Численно, например, методом конечных разностей находятся значения функции $x(t)$. Затем вычисляется значение целевой функции супервайзера (17). При условии выполнения (21) большее значение целевой функции (17), а также набор управлений, его доставляющих, сохраняются.

5. Если просмотрены не все КРС-стратегии, то необходимо перейти к следующей стратегии $(l := l + 1)$ и вернуться на пункт 3 алгоритма.

6. После просмотра всех КРС-стратегий (всего их $27^{N \cdot K}$) определяется стратегия, доставляющая наибольшее значение целевой функции (17) при выполнении (21), то есть

$$\left(\left\{r_{ij}^{QRS}, b_{ij}^{QRS}, s_{ij}^{QRS}\right\}_{i,j=1}^{N(K)}\right)^{(*)} = \arg \max_{\left\{r_{ij}^{QRS}, b_{ij}^{QRS}, s_{ij}^{QRS}\right\}_{i,j=1}^{N(K)} \in QRS} J_S\left(\left\{r_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N(K)}, \left\{b_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N(K)}, x(\cdot)\right).$$

Найденная в пункте 6 алгоритма стратегия и будет стратегией поощрения супервайзером агентов.

5. Результаты счета

В иерархической постановке также были проведены численные эксперименты для нескольких наборов входных данных. Имитационные эксперименты проводились на компьютере с микропроцессором A10 серии Intel Pentium G4620 с оперативной памятью 4 Гб на объектно-ориентированном языке программирования C# согласно приведенному в предыдущем пункте алгоритму. Среднее время одного имитационного эксперимента для указанных ниже входных данных составило 7 часов. Основную часть этого времени занимает численное решение уравнения динамики (5) по явной схеме метода конечных разностей для каждой КРС-стратегии.

Пример 5. В случае $N = K = 2$, $\rho = 0.01$, $T = 1095$ сут, $k_1 = 20$, $k_2 = 50$, $R = 0.01$ у. е., $x_0 = 100$ у. е., $M = 1$, $C_0 = 20$ сут, $a_1 = 0.1$ сут$^{-1}$, $a_2 = 0.05$ сут$^{-1}$, $c_1 = 100$ сут, $c_2 = 150$ сут, $z = 0.05$, $p_0 = 0.2$, $q = 0.001$ сут$^{-1}$ получим, что

$$r_{1,2}(T/10) = r_{1,2}(T/2) = r_{1,2}(T) = 50 \text{ у. е.}, \quad s_{1,2}^{NE}(T/10) = s_{1,2}^{NE}(T/2) = s_{1,2}^{NE}(T) = 0,$$

$$b_{1,2}^{NE}(T/10) = b_{1,2}^{NE}(T/2) = b_{1,2}^{NE}(T) = 1 \text{ и } J_0 = 11877 \text{ у. е.}, \ J_1 = 10\,514 \text{ у. е.}, \ J_2 = 15\,775 \text{ у. е.}$$

Размер общественного блага с течением времени незначительно растет $(x^{NE}(T) = 104$ у. е.).

Супервайзер, используя информационный регламент игры Гермейера Γ_{2t}, заставляет агентов давать взятки и тратить все полученные от него ресурсы только на общественные цели. Отметим, что в этом случае производственная функция первого агента более эффективна, он приносит обществу больше пользы, чем второй агент. Поэтому супервайзер со второго агента получает максимальную взятку, а к первому агенту относится «бережно», требуя «только» половину полученного ресурса в качестве отката. Супервайзеру выгодно оставить первому агенту половину ресурса, чтобы он потратил оставленный ему ресурс на общественные цели. Коррупция крайне невыгодна для агентов, потому что носит характер вымогательства.

Пример 6. В случае входных данных примера 5 и при увеличении в 10 раз доходов агентов от частной деятельности $(k_1 = 200, k_2 = 500)$ стратегии субъектов, их выигрыши и размер общественного блага в равновесии не меняются по сравнению с примером 5. Для агентов в этом случае становится выгоднее использовать выделенный им ресурс на частные цели, но это невыгодно супервайзеру. В силу используемого информационного регламента, угрожая применением стратегии наказания, супервайзер вынуждает агентов не менять свои стратегии по сравнению с примером 5.

Пример 7. В случае входных данных примера 5 и при уменьшении дохода агентов в зависимости от величины общественного блага в 10 раз $(c_1 = 10\,\text{сут},\ c_2 = 15\,\text{сут})$ или их производительности $(a_1 = 0.01\,\text{сут}^{-1},\ a_2 = 0.005\,\text{сут}^{-1})$ оптимальные стратегии субъектов и размер общественного блага в равновесии не меняются. Выигрыш супервайзера в первом случае не меняется, во втором — уменьшается, выигрыши агентов резко падают и задаются формулами $J_1 = 1051$ у. е., $J_2 = 1577$ у. е. и $J_0 = 11\,435$ у. е., $J_1 = 9276$ у. е., $J_2 = 13\,915$ у. е. соответственно.

Пример 8. В случае входных данных примера 5 и при увеличении вероятности поимки взяточника до 65 % $(z = 0.65)$ при незначительном наказании за нее $M = 1$ коррупция в системе остается. Оптимальные стратегии супервайзера, агентов и размер общественного блага в равновесии не меняются по сравнению с примером 5, выигрыши агентов тоже не меняются. Выигрыш супервайзера задается формулой $J_0 = 7167$ у. е.

Пример 9. Дальнейшее по сравнению с примером 8 ужесточение борьбы с коррупцией (увеличение коэффициента, характеризующего величину штрафа супервайзера при получении им взятки, до значения $M = 1.3$) приводит к отсутствию коррупции в системе. Брать взятки супервайзеру становится невыгодным. Размер общественного блага в равновесии не меняется по сравнению с примером 5, а оптимальные стратегии субъектов управления и их выигрыши задаются формулами

$$r_{1,2}(T/10) = r_{1,2}(T/2) = r_{1,2}(T) = 50\,\text{у. е.},\quad b_{1,2}^{NE}(T/10) = b_{1,2}^{NE}(T/2) = b_{1,2}^{NE}(T) = 0,$$

$$s_{1,2}^{NE}(T/10) = s_{1,2}^{NE}(T/2) = s_{1,2}^{NE}(T) = 0 \text{ и } J_0 = 6213\,\text{у. е.},\ J_1 = 13\,324\,\text{у. е.},\ J_2 = 18\,127\,\text{у. е.}$$

6. Заключение

Информационный регламент игры Гермейера Γ_{2t} делает интересы супервайзера приоритетными при построении равновесия. Интересы агентов фактически не учитываются. Моральные издержки от наличия коррупции в системе распределения ресурсов в рассмотренной модели также не учитываются. Поэтому успех борьбы с коррупцией в рамках предложенной модели целиком зависит от того, выгодно супервайзеру (в смысле его целевого функционала) брать взятки от агентов или нет. Для искоренения коррупции в системе необходимо увеличить размер наказания за взятки и вероятность поимки взяточника (примеры 8, 9). При отсутствии коррупции в системе выигрыш супервайзера падает (примерно на 20 % для используемых выше входных данных), а выигрыши агентов увеличиваются. Как показывают рассмотренные примеры, наличие коррупции может не наносить обществу экономического вреда, но моральные издержки от коррупции огромны. Борьба с коррупцией необходима и при соответствующих усилиях успешна.

Список литературы (References)

Антоненко А. В., Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Статические модели борьбы с коррупцией в иерархических системах управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 4. — С. 165–176.

Antonenko A. V., Ugol'nitskii G. A., Usov A. B. Static models of struggle against corruption in hierarchical management systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2013. — Vol. 52, Issue 4. — P. 664–675. (Original Russian paper: *Antonenko A. V., Ugolnickii G. A., Usov A. B.* Staticheskie modeli borbi s korrupciei v ierarhicheskih sistemah upravleniya // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemi upravleniya. — 2013. — No. 4. — P. 165–176.)

Васин А. А., Николаев П. В., Уразов А. С. Механизмы подавления коррупции // Журнал новой экономической ассоциации. — 2011. — № 10. — С. 10–30.

Vasin A. A., Nikolaev P. V., Urazov A. S. Mexanizmy podavleniya korrupcii [Mechanisms of suppression of corruptions] // Journal of the New Economic Association. — 2011. — No. 10. — P. 10–30 (in Russian).

Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991.

Gorelik V. A., Gorelov M. A., Kononenko A. F. Analiz konfliktnykh situacij v sistemakh upravleniya. — Moscow: Radio i svyaz, 1991 (in Russian).

Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Исследование дифференциальных моделей иерархических систем управления путем их дискретизации // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 2. — С. 109–122.

Ugol'Nitski G. A., Usov A. B. A study of differential models for hierarchical control systems via their discretization // Automation and Remote Control. — 2013. — Vol. 74, Issue 2. — P. 252–263. (Original Russian paper: *Ugolnickii G. A., Usov A. B.* Issledovanie differencialnykh modelej ierarxicheskikh sistem upravleniya putem ikh diskretizacii // Avtomatika i telemkhanika. — 2013. — No. 2. — P. 109–122.)

Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Моделирование коррупции в трехуровневых системах управления // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 53–62.

Ougolnitsky G. A., Usov A. B. Modeling Of Corruption In Three-Level Control Systems // Control Sciences. — 2014. — No. 1. — P. 53–62. (Original Russian paper: *Ugolnickii G. A., Usov A. B.* Modelirovanie korrupcii v trexurovnevykh sistemakh upravleniya // Problemy upravleniya. — 2014. — No. 1. — P. 53–62.)

Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Динамические модели коррупции в иерархических системах управления при эксплуатации биоресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 6. — С. 168–176.

Ugol'nitskii G. A., Usov A. B. Dynamic models of struggle against corruption in hierarchical management systems of exploitation of biological resources // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2014. — Vol. 53, Issue 6. — P. 939–947. (Original Russian paper: *Ugolnickii G. A., Usov A. B.* Dinamicheskie modeli korrupcii v ierarhicheskih sistemah upravleniya pri ehkspluatacii bioresursov // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemi upravleniya. — 2014. — No. 6. — P. 168–176.)

Угольницкий Г. А., Усов А. Б. Модели борьбы с административной коррупцией в иерархических системах управления // Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, вып. 1. — С. 73–90.

Ugolnickii G. A., Usov A. B. Modeli bor'by s administrativnoj korrupciej v ierarhicheskih sistemah upravleniya [Models of struggle against administrative corruptions in hierarchical management systems] // Mathematical theory of games and its applications. — 2014. — Vol. 6, Issue 1. — P. 73–90 (in Russian).

Угольницкий Г. А. Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2016.

Ugolnickij G. A. Upravlenie ustojchivym razvitiem aktivnyx sistem. — Rostov-na-donu: Izdatelstvo yuzhnogo federalnogo universiteta, 2016 (in Russian).

Basar T., Olsder G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. — Philadelphia, 1999.

Bicchieri C., Rovelli C. Evolution and revolution: The dynamic of corruption // Rationality and Society. — 1995. — No. 7 (2). — P. 201–224.

Blackburn K., Bose N., Hague M. E. The incidence and persistence of corruption in economic development // J. of Economic Dynamic and Control. — 2006. — No. 30. — P. 2447–2467.

Blackburn K., Forgues-Puccio G. F. Financial liberalization, bureaucratic corruption and economic development // J. of International Money and Finance. — 2010. — No. 29. — P. 1321–1339.

Gorbaneva O. I., Ougolnitsky G. A., Usov A. B. Modeling of Corruption in Hierarchical Organizations. — Nova Science Publishers, 2016.

Dockner E., Jorgensen S., Long N. V., Sorger G. Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge University Press, 2000.

Lambsdorff J. G. The Institutional Economics of Corruption and Reform. — Cambridge University Press, 2007.

Levin M. I., Satarov G. A. Russian Corruption // The Oxford Handbook of Russian Economy. — Oxford University Press, 2013. — P. 286–309.

Nikolaev P. V. Corruption suppression models: the role of inspectors' moral level // Computer Mathemetical Modelling. — 2014. — No. 25 (1). — P. 87–102.

Ougolnitsky G. A., Usov A. B. Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. — NY: Nova Science Publishers, 2018. — P. 63–106.

Rose-Ackerman S. The economics of corruption // J. of Public Economics. — 1975. — No. 4. — P. 187–203.