

УДК: 519.6

## Весовой векторный метод конечных элементов и его приложения

В. А. Рукавишников<sup>а</sup>, А. О. Мосолапов<sup>б</sup>

Вычислительный центр ДВО РАН,  
Россия, 680011, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: <sup>а</sup> vark0102@mail.ru, <sup>б</sup> msandrew84@gmail.com

Получено 01.06.2018, после доработки — 19.06.2018.

Принято к публикации 27.12.2018.

Математические модели многих естественных процессов описываются дифференциальными уравнениями с особенностями решения. Классические численные методы для нахождения приближенного решения таких задач оказываются неэффективными. В настоящей работе рассмотрена краевая задача для векторного волнового уравнения в двумерной L-образной области. Наличие входящего угла величиной  $3\pi/2$  на границе расчетной области обуславливает сильную сингулярность задачи, то есть ее решение не принадлежит пространству Соболева  $H^1$ , в результате чего классические и специализированные численные методы имеют скорость сходимости ниже чем  $O(h)$ . Поэтому в работе введено специальное весовое множество вектор-функций. В этом множестве решение рассматриваемой краевой задачи определено как  $R_\nu$ -обобщенное.

Для численного нахождения  $R_\nu$ -обобщенного решения построен весовой векторный метод конечных элементов. Основным отличием этого метода является введение в базисные функции в качестве сомножителя специальной весовой функции в степени, определяемой свойствами решения исходной краевой задачи. Это позволило существенно повысить скорость сходимости приближенного решения к точному при измельчении конечноэлементной сетки. Кроме того, введенные базисные функции соленоидальны, что обеспечило точный учет условия соленоидальности искомого решения и предотвратило появление ложных численных решений.

Представлены результаты численного эксперимента для серии модельных задач различных типов: для задач, решение которых содержит только сингулярную составляющую, и для задач, решение которых содержит как сингулярную, так и регулярную составляющие. Результаты численного анализа показали, что при измельчении конечноэлементной сетки скорость сходимости построенного весового векторного метода конечных элементов составляет  $O(h)$ , что по порядку степени в полтора раза выше, чем в разработанных к настоящему времени специализированных методах решения рассматриваемой задачи: методе сингулярных дополнений и методе регуляризации. Другие особенности построенного метода — его алгоритмическая простота и естественность определения решения, что является преимуществом при проведении численных расчетов.

Ключевые слова: весовой векторный метод конечных элементов, весовые пространства,  $R_\nu$ -обобщенное решение, краевые задачи с сингулярностью

UDC: 519.6

## Weigthed vector finite element method and its applications

V. A. Rukavishnikov<sup>a</sup>, A. O. Mosolapov<sup>b</sup>

Computing center FEB RAS,  
65 Kim U Chen st., Khabarovsk, 680011, Russia

E-mail: <sup>a</sup> vark0102@mail.ru, <sup>b</sup> msandrew84@gmail.com

*Received 01.06.2018, after completion — 19.06.2018.*

*Accepted for publication 27.12.2018.*

Mathematical models of many natural processes are described by partial differential equations with singular solutions. Classical numerical methods for determination of approximate solution to such problems are inefficient. In the present paper a boundary value problem for vector wave equation in L-shaped domain is considered. The presence of reentrant corner of size  $3\pi/2$  on the boundary of computational domain leads to the strong singularity of the solution, i.e. it does not belong to the Sobolev space  $H^1$  so classical and special numerical methods have a convergence rate less than  $O(h)$ . Therefore in the present paper a special weighted set of vector-functions is introduced. In this set the solution of considered boundary value problem is defined as  $R_V$ -generalized one.

For numerical determination of the  $R_V$ -generalized solution a weighted vector finite element method is constructed. The basic difference of this method is that the basis functions contain as a factor a special weight function in a degree depending on the properties of the solution of initial problem. This allows to significantly raise a convergence speed of approximate solution to the exact one when the mesh is refined. Moreover, introduced basis functions are solenoidal, therefore the solenoidal condition for the solution is taken into account precisely, so the spurious numerical solutions are prevented.

Results of numerical experiments are presented for series of different type model problems: some of them have a solution containing only singular component and some of them have a solution containing a singular and regular components. Results of numerical experiment showed that when a finite element mesh is refined a convergence rate of the constructed weighted vector finite element method is  $O(h)$ , that is more than one and a half times better in comparison with special methods developed for described problem, namely singular complement method and regularization method. Another features of constructed method are algorithmic simplicity and naturalness of the solution determination that is beneficial for numerical computations.

**Keywords:** weighted vector FEM, weighted spaces,  $R_V$ -generalized solution, boundary value problems with singularity

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 71–86 (Russian).

## Введение

К настоящему времени для численного решения краевых задач математической физики предложены различные численные методы.

Одним из таких методов является векторный метод конечных элементов. Предложенный в 1980-х гг. J. C. Nedelec [Nédélec, 1980; Nédélec, 1986], в последующие годы векторный МКЭ получил дальнейшее развитие в работах A. Bossavit, R. Hiptmair, J. Webb, P. Monk и др. [Bossavit, 1998; Monk, 1992; Monk, 2003; Hiptmair, 2002; Jin, 2002; Webb, 1993; Webb, 1999] и нашел применение при решении различных задач электродинамики, теории упругости и других задач математической физики (см., например, [Pechstein, Schöberl, 2011; Rossi et al., 2013]).

Основным отличием векторного метода конечных элементов от узлового является то, что степени свободы ассоциированы со сторонами конечных элементов, а не с узлами конечноэлементной сетки. Это позволяет корректно моделировать поведение решения векторных краевых задач на границе раздела сред, а также легко учитывать краевые условия. Базисные функции данного метода соленоидальны, что позволяет точно выполнить условие соленоидальности решения и тем самым предотвратить появление ложных численных решений.

Однако при решении краевых задач с сингулярностью, вызванной наличием входящих углов на границе расчетной области, скорость сходимости векторного метода конечных элементов снижается, что требует построения специальных численных методов для решения подобных задач.

Будем говорить, что решение краевой задачи имеет сильную сингулярность, если интеграл Дирихле от функции решения расходится, поэтому оно не принадлежит пространству С. Л. Соболева  $W_2^1$ . Нами для краевых задач с сильной сингулярностью была разработана теория численных методов на основе введения понятия  $R_\nu$ -обобщенного решения (см., например, [Рукавишников, 1989; Рукавишников, 1996; Рукавишников, 2001; Рукавишников, Кузнецова, 2009а; Рукавишников, 2014]). Такой подход позволил в зависимости от особенностей исходных данных (коэффициентов и правых частей уравнения и граничных условий) и геометрии границы области определить весовое пространство или множество, которому принадлежит решение, а также строить регуляризатор, ограничивающий влияние сингулярности на точность численного нахождения приближенного решения. Для численного нахождения  $R_\nu$ -обобщенного решения краевых задач с сингулярностью построен метод конечных разностей и весовой узловой метод конечных элементов (см. [Рукавишников, Рукавишникова, 1994; Рукавишников, Кузнецова, 2009b; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2010; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2013; Rukavishnikov, Rukavishnikova, 2018; Rukavishnikov, Rukavishnikov, 2018a; Rukavishnikov, Rukavishnikov, 2018b]).

В настоящей работе вводится весовое пространство Соболева – Монка  $H_\nu(\text{rot}, \Omega)$ , в котором выделяется специальное весовое множество. Для рассматриваемой краевой задачи решение определяется как  $R_\nu$ -обобщенное в этом множестве. Для численного решения рассмотренной задачи строится весовой векторный метод конечных элементов. Особенностью данного метода является то, что в определение базисных функций вводится весовая функция в степени, зависящей от свойств решения исходной краевой задачи. Это позволяет лучше аппроксимировать поведение решения вблизи точки сингулярности и повысить скорость сходимости приближенного решения к точному в норме весового пространства  $L_{2,\nu}(\Omega)$ . Численный анализ серии модельных задач показал, что скорость сходимости построенного метода в полтора раза выше, чем в разработанных к настоящему времени методе сингулярных дополнений (см. [Assous et al., 2006]) и методе регуляризации (см. [Costabel, Dauge, 2002]).

## Основные обозначения

Пусть  $R^2$  — двумерное евклидово пространство с элементами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , скалярным произведением  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$  и нормой  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  — ортонормированный базис в  $R^2$ .

Вектор-функции будем обозначать жирными латинскими или греческими буквами:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$ . Произведение вектор-функций между собой и с векторами в смысле пространства  $R^2$  будем обозначать точкой  $\cdot$ .  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный касательный вектор к границе области в  $R^2$ .

Пусть  $\Omega = (-1, -1) \times (-1, -1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0] \subset R^2$  — L-образная область,  $\partial\Omega$  — ее граница. Область  $\Omega$  имеет особую точку на своей границе — вершину тупого внутреннего угла величины  $3\pi/2$ , совпадающую с началом координат  $O(0, 0)$ .

Через  $L_2(\Omega)$  будем обозначать пространство функций  $u$ , заданных на  $\Omega$ , со скалярным произведением  $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$  и нормой  $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 \, dx}$ .

Пространство вектор-функций  $\mathbf{u}$  с компонентами из  $L_2(\Omega)$  будем обозначать через  $L_2(\Omega)^2$ . Соответствующее скалярное произведение  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} u_1 v_1 + u_2 v_2 \, dx$ , и норма  $\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)^2} = \sqrt{\|u_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L_2(\Omega)}^2}$ .

Через  $H^1(\Omega)$  будем обозначать пространство Соболева с нормой  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\lambda| \leq 1} \int_{\Omega} |D^{\lambda} u|^2 \, dx}$ , где  $D^{\lambda} = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  — неотрицательные целые числа. Соответствующее пространство вектор-функций обозначим через  $H^1(\Omega)^2$  с нормой  $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^2} = \sqrt{\|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}^2}$ .

Для функций и вектор-функций введем следующие дифференциальные операторы:

- 1) дивергенция вектор-функции:  $\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ;
- 2) векторный ротор скалярной функции:  $\operatorname{rot} \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)$ ;
- 3) скалярный ротор вектор-функции:  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ .

Введем пространство  $H(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega)^2 \mid \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L_2(\Omega)\}$  со скалярным произведением  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})$  и нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)}^2 = \int_{\Omega} u_1^2 + u_2^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 \, dx$$

и его подпространство  $\dot{H}(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega\}$ .

Пусть  $B_{\delta}(O)$  — круг радиуса  $\delta$  с центром в особой точке  $O(0, 0)$ . Обозначим  $\Omega' = \overline{\Omega} \cap B_{\delta}(O)$ . Через  $\rho(\mathbf{x})$  обозначим весовую функцию, совпадающую с расстоянием до особой точки в  $\Omega'$  и равную  $\delta$  в  $\overline{\Omega} \setminus \Omega'$ .

Определим весовое пространство  $L_{2,\alpha}(\Omega)$ , где  $\alpha$  — вещественное неотрицательное число, как множество измеримых функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \rho^{2\alpha} u^2 \, dx.$$

Соответствующее пространство вектор-функций  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$  будем обозначать как  $L_{2,\alpha}(\Omega)^2$ .

Определим весовое пространство  $H_\alpha(\text{rot}, \Omega)$  вектор-функций с конечной нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{H_\alpha(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 + \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \rho^{2\alpha} (u_1^2 + u_2^2 + (\text{rot } \mathbf{u})^2) dx$$

и его подпространство  $\dot{H}_\alpha(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega\}$ . Здесь  $\alpha$  — вещественное неотрицательное число.

Определим весовое множество  $H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$  как множество функций из пространства  $H_\alpha(\text{rot}, \Omega)$ , удовлетворяющих свойствам:

$$(a) \quad |\text{rot } \mathbf{u}| \leq C_1 \left( \frac{\delta}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{\alpha+1},$$

$$|u_i| \leq C_1 \left( \frac{\delta}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{\alpha}, \quad i = 1, 2;$$

$$(b) \quad \|\mathbf{u}\|_{L_{2,\alpha}(\Omega \setminus \Omega')} \geq C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — константы, не зависящие от  $\mathbf{u}$ .

Определим следующие подмножества  $H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta)$ :

$$\dot{H}_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) = \{\mathbf{u} \in H_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) \mid \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega\},$$

$$V = \{\mathbf{u} \in \dot{H}_\alpha(\text{rot}, \Omega, \delta) \mid \text{div } \mathbf{u} = 0\}.$$

## Постановка задачи

Рассмотрим в области  $\Omega$  следующую краевую задачу для векторного волнового уравнения (см. [Collin, 1960, p. 20]):

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Решение задачи (1)–(3) принадлежит  $H(\text{rot}, \Omega)$  и не принадлежит пространству  $H^1(\Omega)^2$  (см., например, [Assous et al., 2005]). Поэтому задача (1)–(3) является задачей с сильной сингулярностью, и далее будем определять решение этой задачи как  $R_\nu$ -обобщенное в весовом множестве.

Введем билинейную и линейную формы соответственно:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\text{rot } \mathbf{u}, \text{rot}(\rho^{2\nu} \mathbf{v})) - k^2(\mathbf{u}, \rho^{2\nu} \mathbf{v}) =$$

$$= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \left[ \rho^{2\nu} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \left( \frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial x_1} v_2 \right) \right] dx - k^2 \int_{\Omega} \rho^{2\nu} (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx,$$

$$b(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \rho^{2\nu} \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho^{2\nu} (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx.$$

**Определение 1.**  $R_\nu$ -обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть вектор-функцию  $\mathbf{E}_\nu \in V$ , которая для любой вектор-функции  $\mathbf{v} \in V$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(\mathbf{E}_\nu, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}). \quad (4)$$

## Схема весового векторного метода конечных элементов

В данном разделе построена схема весового векторного метода конечных элементов для нахождения приближенного  $R_V$ -обобщенного решения задачи (1)–(3). Для этого осуществлена триангуляция области  $\Omega$  и введена система весовых базисных функций.

Выполним триангуляцию области  $\Omega$ . Для этого вертикальными и горизонтальными прямыми  $x_1 = -1 + jh$ ,  $x_2 = -1 + lh$ , где  $h = \frac{2}{N}$ ,  $N$  — положительное четное число,  $j, l = \overline{0, N}$ , разобьем  $\overline{\Omega}$  на совокупность  $\{K\} = \{K_i\}_{i=1}^{N_h}$  замкнутых квадратов  $K_i$ ,  $N_h = \frac{3N^2}{4}$ . Квадраты  $K_i$  будем называть конечными элементами, число  $h$  — шагом сетки.

Пусть  $S_1, \dots, S_{S_h}$  — множество тех сторон конечных элементов  $K_i$ , которые не принадлежат границе области  $\partial\Omega$ :  $S = \{S_i, i = \overline{1, N_S}\}$ ,  $N_S = \frac{3N^2}{2} - 2N$ . Обозначим через  $M_i$  середину стороны  $S_i$ ,  $i = \overline{1, S_h}$ . Правило глобальной нумерации изображено на рис. 1.

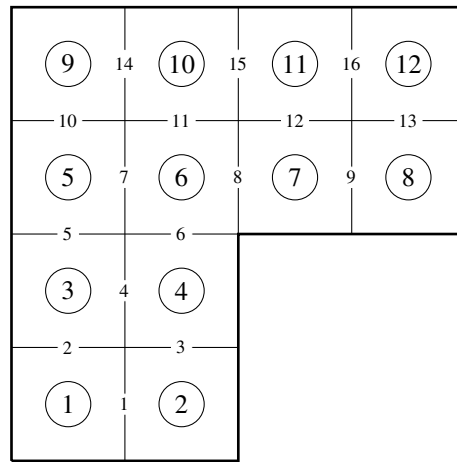


Рис. 1. Пример глобальной нумерации конечных элементов  $K_i$ ,  $i = \overline{1, N_h}$  (числа в кружочках) и их неграничных сторон  $S_j$ ,  $j = \overline{1, N_S}$ , в весовом векторном методе конечных элементов

Для каждого конечного элемента  $K_i$  обозначим через  $O^{K_i}(o_1^{K_i}, o_2^{K_i})$  его центр,  $S_j^{K_i}$  — стороны,  $M_j^{K_i}(m_{1j}^{K_i}, m_{2j}^{K_i})$  — их середины,  $j = \overline{1, 4}$ . Правило локальной нумерации приведено на рис. 2.

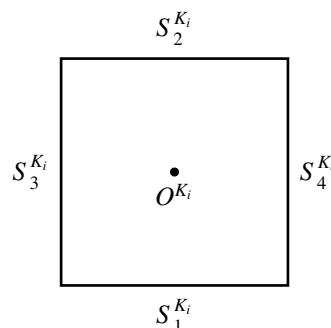


Рис. 2. Правило локальной нумерации сторон  $S_j^{K_i}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , конечного элемента  $K_i$ ,  $i = \overline{1, N_h}$ , весового векторного метода конечных элементов

Введем функции формы элемента  $K_i$ , ассоциированные с его сторонами:

$$\begin{aligned}\psi_1^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(m_{11}^{K_i}, x_2) \left( \frac{h}{2} + o_2^{K_i} - x_2 \right) \mathbf{i}, & \psi_2^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(m_{12}^{K_i}, x_2) \left( \frac{h}{2} + x_2 - o_2^{K_i} \right) \mathbf{i}, \\ \psi_3^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(x_1, m_{23}^{K_i}) \left( \frac{h}{2} + o_1^{K_i} - x_1 \right) \mathbf{j}, & \psi_4^{K_i} &= \frac{1}{h} \rho^{-\gamma}(x_1, m_{24}^{K_i}) \left( \frac{h}{2} + x_1 - o_1^{K_i} \right) \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  — некоторое неотрицательное действительное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Весовая функция введена в функции формы таким образом, чтобы сохранить свойство их соленоидальности.

С помощью функций формы конечных элементов введем базисные функции  $\psi_i$  пространства конечных элементов:

$$\psi_i = \begin{cases} \psi_j^{K_m}, & x \in K_m, \\ \psi_l^{K_n}, & x \in K_n, \\ 0, & x \in \bar{\Omega} \setminus (K_m \cup K_n). \end{cases}$$

Пример графика базисной функции приведен на рис. 3.

Линейную оболочку функций  $\psi_i$ ,  $i = \overline{1, S_h}$ , обозначим через  $\tilde{V}^h$ ,  $\tilde{V}^h \subset \mathring{H}_V(\text{rot}, \Omega)$ . В силу свойств базисных функций  $\forall \mathbf{v}_h \in \tilde{V}^h \text{ div } \mathbf{v}_h = 0$ . Также определим множество  $V_V^h = \tilde{V}^h \cap H_V(\text{rot}, \Omega, \delta)$ . В этом множестве будем искать приближенное  $R_V$ -обобщенное решение задачи (1)–(3).

**Определение 2.** Приближенным  $R_V$ -обобщенным решением задачи (1)–(3) по весовому векторному методу конечных элементов будем называть вектор-функцию  $\mathbf{E}_V^h \in V_V^h(\Omega, \delta)$ , которая для любой вектор-функции  $\mathbf{v}_h \in V_V^h(\Omega, \delta)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$a(\mathbf{E}_V^h, \mathbf{v}_h) = b(\mathbf{v}_h).$$

Приближенное  $R_V$ -обобщенное решение будем искать в виде

$$\mathbf{E}_V^h = \sum_{i=1}^{N_S} d_i \psi_i,$$

где  $d_i = \rho^v(M_i)g_i$ ,  $g_i = \text{const}$ .

Неизвестные  $d_i$  найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\mathbf{E}_V^h, \psi_i) = b(\psi_i), \quad i = \overline{1, N_S}. \quad (5)$$

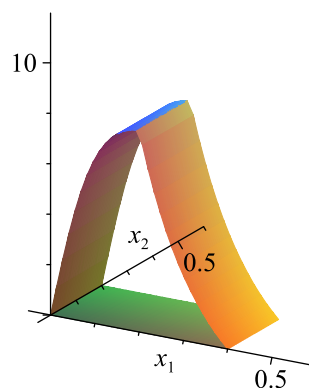


Рис. 3. График базисной функции  $\psi_i$  весового векторного метода конечных элементов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В отличие от невесового векторного МКЭ (см., например, [Jin, 2002; Monk, 2003]) базисные функции построенного метода содержат в качестве множителя весовую функцию в степени, определяемой асимптотикой решения краевой задачи. Это позволяет лучше аппроксимировать его поведение вблизи точки сингулярности и добиться сходимости приближенного решения к точному со скоростью  $O(h)$ .

## Численные эксперименты для модельных задач

Для проведения численного анализа серии модельных задач разработана программа «Проба-III» на основе весового векторного МКЭ и GMRES-метода для решения СЛАУ (5).

В данном разделе приведены результаты численного анализа для четырех модельных задач различных типов. Для этого для каждой задачи введем вспомогательную функцию  $\varphi$  и положим  $\mathbf{E} = \mathbf{rot} \varphi$ . Подставляя  $\mathbf{E}$  в уравнение (1), найдем правую часть  $\mathbf{f}$  для двух значений коэффициента:  $k_1 = 300$  и  $k_2 = 220$  (частота 14.314 и 10.497 ГГц соответственно). Решения модельных задач 1 и 3 содержат только сингулярную составляющую, решения модельных задач 2 и 4 содержат как сингулярную, так и регулярную составляющие, принадлежащую пространству  $H^2(\Omega)^2$ .

Вычисления проводились на сетках с различным числом разбиений  $N$ . Оптимальные значения параметров  $\nu$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  ( $\gamma = 0.3$ ) были определены с помощью программного комплекса [Рукавишников и др., 2015]. Для найденных приближенных  $R_\nu$ -обобщенных решений  $\mathbf{E}_\nu^h$ , величина относительной погрешности  $\eta$  вычислялась в норме пространства  $L_{2,\nu}(\Omega)^2$ :  $\eta = \frac{\|\mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}{\|\mathbf{E}_\nu\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}$ . В каждой точке  $M_j$  для найденных приближенных  $R_\nu$ -обобщенных решений вычислялась абсолютная погрешность  $\delta_{ij} = |E_{iv}(M_j) - E_{iv}^h(M_j)|$ ,  $i = 1, 2$ , а также определялись количество и координаты точек  $M_j$  с абсолютной погрешностью  $\delta_{ij}$ , меньшей заданной предельной  $\bar{\Delta} = 10^{-3}$ . Результаты численных экспериментов приведены в таблицах и на рисунках.

**Модельная задача 1.** Для модельной задачи 1

$$\varphi = (x_1 x_2 (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1))^2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В определении  $\varphi$  показатель степени выбран равным  $-3.3$ , чтобы асимптотика решения  $\mathbf{E}$  в окрестности точки сингулярности была близка к теоретической  $\rho^{-1/3}$ .

В таблице 1 представлена зависимость относительной погрешности  $\eta$  от количества отрезков разбиения  $N$ , эта зависимость также изображена графически на рис. 4. В таблице 2 для найденного приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения приведено количество точек  $M_j$  в процентах от их общего числа, в которых абсолютная погрешность  $\delta_{ij}$  меньше заданной предельной  $\Delta = 10^{-3}$ . График абсолютной погрешности  $\delta_{1j}$  компоненты  $E_{1\nu}^h$  приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения по весовому векторному методу конечных элементов на различных сетках для  $k = k_1$  приведен на рис. 5. Рисунки для компоненты  $E_{2\nu}^h$  и для  $k = k_2$  аналогичны.

Таблица 1. Зависимость относительной погрешности  $\eta$  от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 1,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ );  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$\eta, k = k_1$	0.464288	0.224401	0.087285	0.041733
$\eta, k = k_2$	0.470603	0.235163	0.093183	0.046544



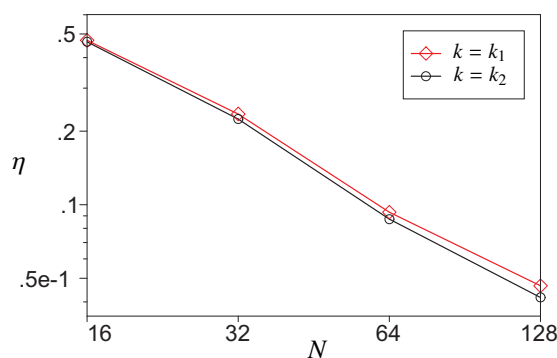
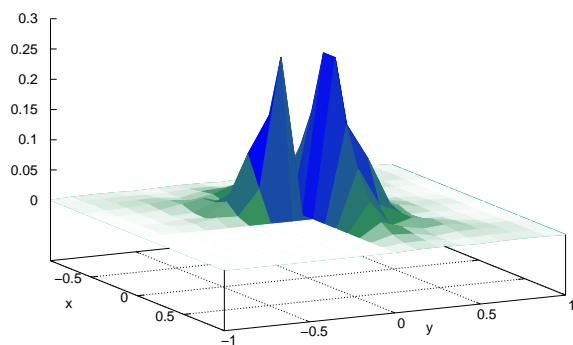


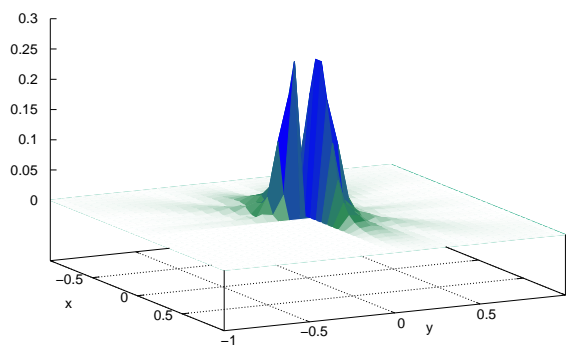
Рис. 4. Зависимость относительной погрешности  $\eta = \frac{\|E_v - E_v^h\|_{L_{2,v}(\Omega)^2}}{\|E_v\|_{L_{2,v}(\Omega)^2}}$  приближенного решения по весовому векторному методу конечных элементов от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 1 (решение содержит только сингулярную составляющую), при заданных параметрах  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  для  $k = k_1$ ;  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  для  $k = k_2$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 2. Количество точек  $M_j$  (в процентах от их общего числа), в которых абсолютная погрешность  $\delta_{ij}$  меньше заданной предельной  $\bar{\Delta} = 10^{-3}$ , модельная задача 1,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ ),  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

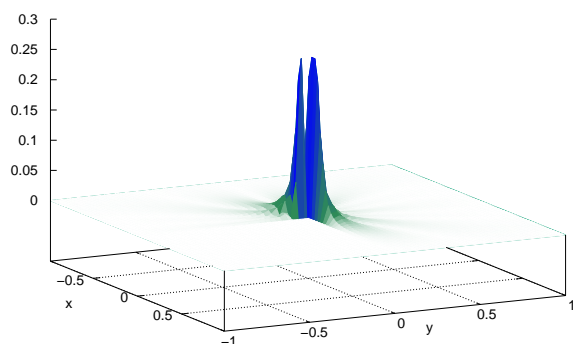
$N$	16	32	64	128
$n_1, k = k_1$	16.48 %	62.91 %	84.65 %	93.89 %
$n_2, k = k_2$	16.48 %	62.50 %	86.40 %	89.78 %



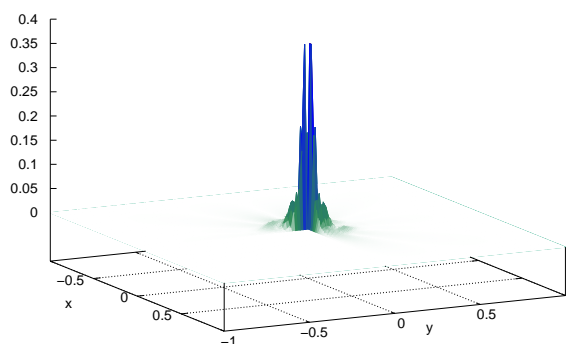
$N = 16$



$N = 32$



$N = 64$



$N = 128$

Рис. 5. График абсолютной погрешности  $\delta_{1j}$  для компоненты  $E_{1v}^h$  приближенного  $R_v$ -обобщенного решения по весовому векторному методу конечных элементов на сетках с количеством отрезков разбиения  $N$ , модельная задача 1 (решение содержит только сингулярную составляющую),  $k = k_1$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

**Модельная задача 2.** Для модельной задачи 2

$$\varphi = (x_1 x_2 (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1))^2 \left( \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3} + 15 \right).$$

Результаты для модельной задачи 2 приведены в таблицах 3, 4 и на рис. 6, 7.

Таблица 3. Зависимость относительной погрешности  $\eta$  от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 2,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ );  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$\eta, k = k_1$	0.190806	0.091037	0.040362	0.019817
$\eta, k = k_2$	0.192372	0.093446	0.041508	0.020749

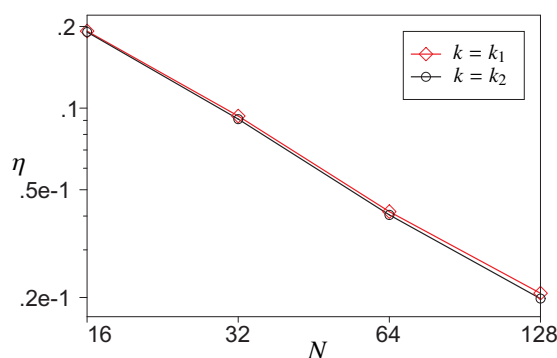


Рис. 6. Зависимость относительной погрешности  $\eta = \frac{\|E_\nu - E_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}{\|E_\nu\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}$  приближенного решения по весовому векторному методу конечных элементов от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 2 (решение содержит сингулярную и регулярную составляющие), при заданных параметрах  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ );  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  для  $k = k_2$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 4. Количество точек  $M_j$  (в процентах от их общего числа), в которых абсолютная погрешность  $\delta_{ij}$  меньше заданной предельной  $\Delta = 10^{-3}$ , модельная задача 2,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ ),  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$n_1, k = k_1$	7.11 %	11.14 %	44.70 %	82.56 %
$n_2, k = k_2$	6.25 %	11.76 %	42.51 %	77.85 %

**Модельная задача 3.** Для модельной задачи 3

$$\varphi = x_1 x_2 \sin(\pi x_1) \cos(0.5\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(0.5\pi x_2) \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3}.$$

Результаты для модельной задачи 3 приведены в таблицах 5, 6 и на рис. 8, 9.

**Модельная задача 4.** Для модельной задачи 4

$$\varphi = x_1 x_2 \sin(\pi x_1) \cos(0.5\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(0.5\pi x_2) \left( \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{-3.3} + 10 \right).$$

Результаты для модельной задачи 4 приведены в таблицах 7, 8 и на рис. 10, 11.

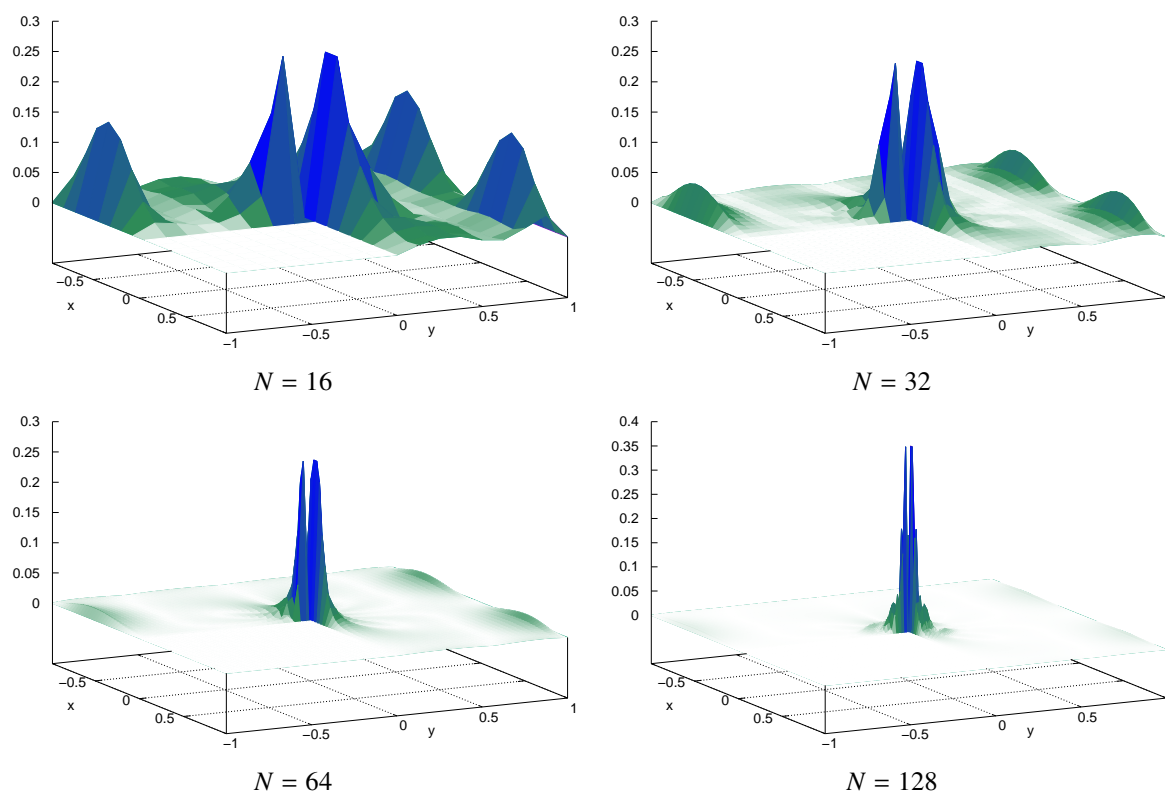


Рис. 7. График абсолютной погрешности  $\delta_{1j}$  для компоненты  $E_{1j}^h$  приближенного  $R_V$ -обобщенного решения по весовому векторному методу конечных элементов на сетках с количеством отрезков разбиения  $N$ , модельная задача 2 (решение содержит сингулярную и регулярную составляющие),  $k = k_1$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 5. Зависимость относительной погрешности  $\eta$  от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 3,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.063$ , ( $k = k_1$ );  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.055$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$\eta, k = k_1$	0.537303	0.291715	0.119754	0.053544
$\eta, k = k_2$	0.543997	0.307029	0.134271	0.064547

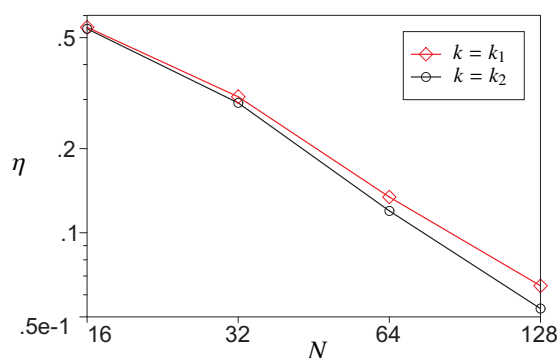
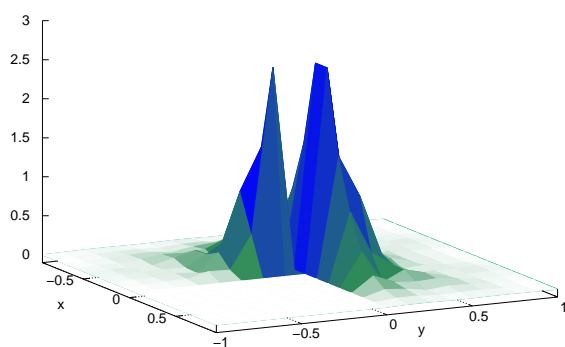


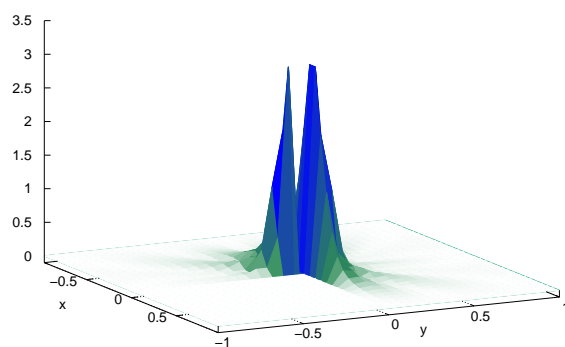
Рис. 8. Зависимость относительной погрешности  $\eta = \frac{\|E_\nu - E_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}{\|E_\nu\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}$  приближенного решения по весовому векторному методу конечных элементов от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 3 (решение содержит только сингулярную составляющую), при заданных параметрах  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.063$  для  $k = k_1$ ;  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.055$  для  $k = k_2$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 6. Количество точек  $M_j$  (в процентах от их общего числа), в которых абсолютная погрешность  $\delta_{ij}$  меньше заданной предельной  $\bar{\Delta} = 10^{-3}$ , модельная задача 3,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ ),  $\nu = 1.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

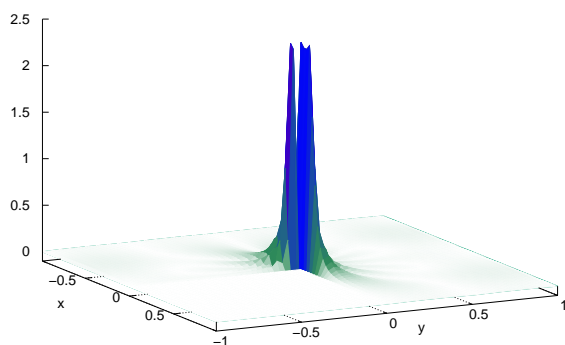
$N$	16	32	64	128
$n_1, k = k_1$	4.55 %	13.59 %	42.05 %	73.56 %
$n_2, k = k_2$	4.55 %	13.18 %	42.05 %	73.58 %



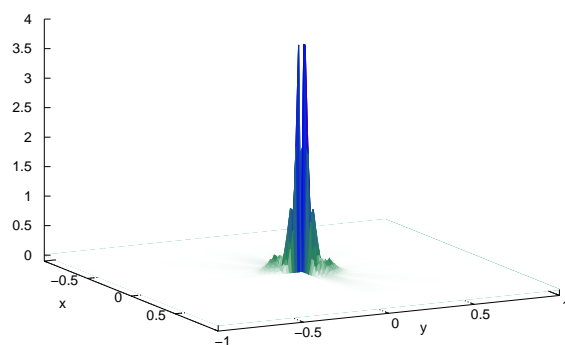
$N = 16$



$N = 32$



$N = 64$



$N = 128$

Рис. 9. График абсолютной погрешности  $\delta_{1j}$  для компоненты  $E_{1\nu}^h$  приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения по весовому векторному методу конечных элементов на сетках с количеством отрезков разбиения  $N$ , модельная задача 3 (решение содержит только сингулярную составляющую),  $k = k_1$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 7. Зависимость относительной погрешности  $\eta$  от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 4,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.063$ , ( $k = k_1$ );  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.055$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$\eta, k = k_1$	0.310778	0.165349	0.069088	0.031701
$\eta, k = k_2$	0.308519	0.160973	0.066790	0.030406

Таблица 8. Количество точек  $M_j$  (в процентах от их общего числа), в которых абсолютная погрешность  $\delta_{ij}$  меньше заданной предельной  $\bar{\Delta} = 10^{-3}$ , модельная задача 4,  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.084$  ( $k = k_1$ ),  $\nu = 1.9$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\delta = 0.078$  ( $k = k_2$ )

$N$	16	32	64	128
$n_1, k = k_1$	4.55 %	2.17 %	6.85 %	29.03 %
$n_2, k = k_2$	4.55 %	2.78 %	6.85 %	29.18 %

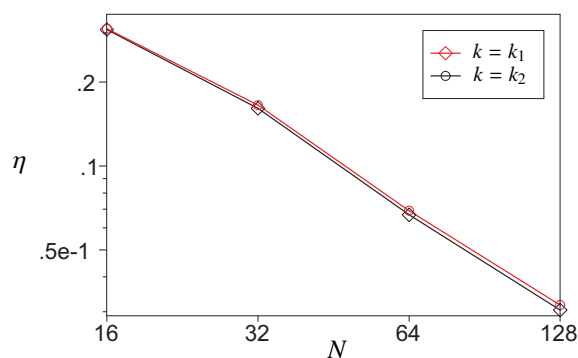


Рис. 10. Зависимость относительной погрешности  $\eta = \frac{\|E_\nu - E_\nu^h\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}{\|E_\nu\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}}$  приближенного решения по весовому векторному методу конечных элементов от количества отрезков разбиения  $N$  для модельной задачи 4 (решение содержит сингулярную и регулярную составляющие), при заданных параметрах  $\nu = 2.0$ ,  $\delta = 0.063$  для  $k = k_1$ ;  $\nu = 1.9$ ,  $\delta = 0.055$  для  $k = k_2$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

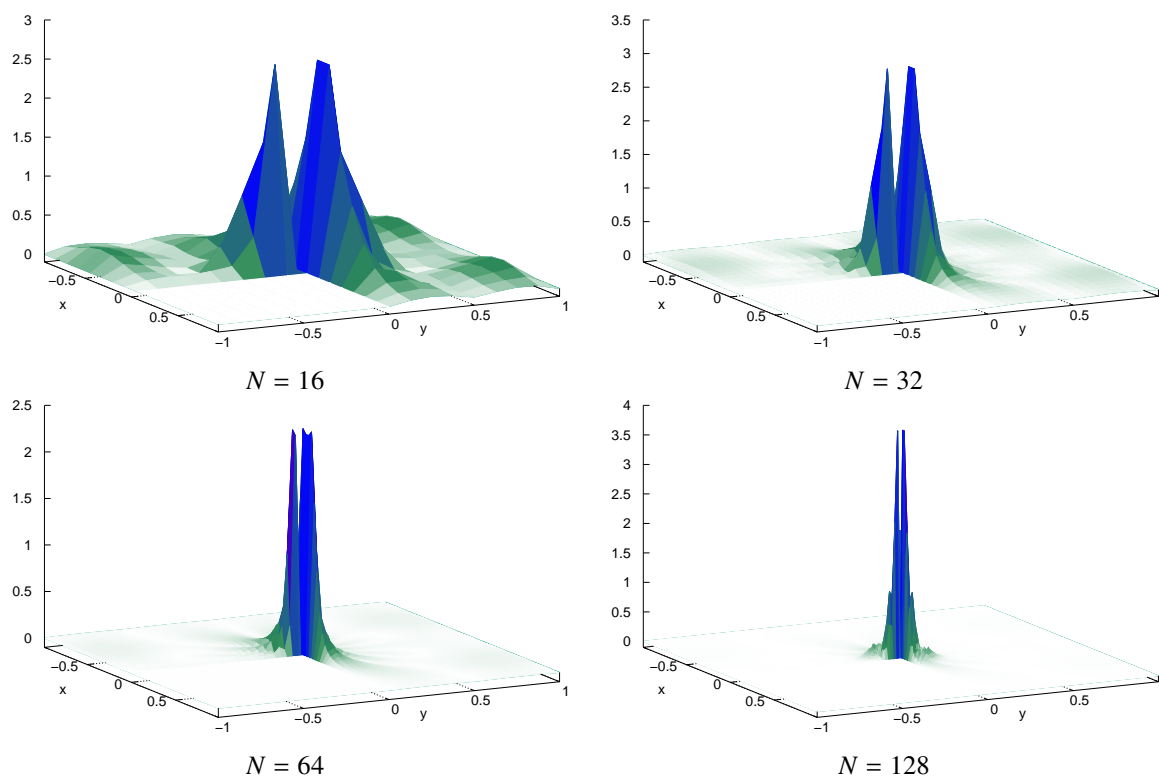


Рис. 11. График абсолютной погрешности  $\delta_{1j}$  для компоненты  $E_{1\nu}^h$  приближенного  $R_\nu$ -обобщенного решения по весовому векторному методу конечных элементов на сетках с количеством отрезков разбиения  $N$ , модельная задача 4 (решение содержит сингулярную и регулярную составляющие),  $k = k_1$ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

## Заключение

В данной работе построен весовой векторный метод конечных элементов для решения векторных волновых краевых задач с сильной сингулярностью. Решение предложено определять как  $R_\nu$ -обобщенное в специальном весовом множестве  $H(\text{rot}, \Omega, \delta)$ . Базисные функции построенного метода включают весовую функцию в степени, зависящей от асимптотики решения вблизи точки сингулярности.

Проведен численный анализ модельных задач двух типов: с решением, содержащим только сингулярную составляющую, и с решением, содержащим как сингулярную, так и регулярную составляющие. Результаты серии расчетов показали, что при измельчении сетки:

- 1) приближенное  $R_\nu$ -обобщенное решение сходится к точному решению в норме  $\|\cdot\|_{L_{2,\nu}(\Omega)^2}$  со скоростью  $O(h)$ , что более чем в полтора раза по порядку степени  $h$  выше, чем в разработанных к настоящему времени методе сингулярных дополнений и методе регуляризации;
- 2) количество точек  $M_j$ , в которых величина абсолютной погрешности превосходит заданную предельную  $\Delta$ , и радиус содержащей их окрестности уменьшаются.

Таким образом, при решении краевых задач для векторного волнового уравнения в области с границей, содержащей угол  $3\pi/2$ , разработанный весовой векторный метод конечных элементов, например, при заданной точности вычислений  $10^{-3}$  позволяет находить приближенное решение в миллион раз быстрее других используемых в настоящее время численных методов. При этом для его реализации потребуется в  $10^6$  раз меньше вычислительных ресурсов и энергетических затрат. Также следует отметить алгоритмическую простоту разработанного метода и естественность определения решения.

Численные эксперименты были проведены на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН».

## Список литературы (References)

- Рукавишников В. А. О дифференциальных свойствах  $R_\nu$ -обобщенного решения задачи Дирихле // ДАН. — 1989. — Т. 309, № 6. — С. 1318–1320.  
*Rukavishnikov V. A. Differential properties of an  $R_\nu$ -generalized solution of the Dirichlet problem // Soviet Math. Dokl. — 1990. — Vol. 40. — P. 653–655. (Original Russian paper: Rukavishnikov V. A. O differentsial'nykh svoystvakh  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya zadachi Dirikhle // DAN. — 1989. — Vol. 309, No. 6. — P. 1318–1320.)*
- Рукавишников В. А. О существовании и единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. — 2014. — Т. 458, № 3. — С. 261–263.  
*Rukavishnikov V. A. On the existence and uniqueness of an  $R_\nu$ -generalized solution of a boundary value problem with uncoordinated degeneration of the input data // Dokl. Math. — 2014. — Vol. 90, Issue 2. — P. 562–564. (Original Russian paper: Rukavishnikov V. A. O sushchestvovanii i yedinstvennosti  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya dlya krayevoy zadachi s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // DAN. — 2014. — Vol. 458, No 3. — P. 261–263.)*
- Рукавишников В. А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 402–408.  
*Rukavishnikov V. A. On the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation with noncoordinated degeneration of the initial data // Differ. Equ. — 1996. — Vol. 32, Issue 3. — P. 406–412. (Original Russian paper: Rukavishnikov V. A. O zadache Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poriyadka s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Differentsial'nyye uravneniya. — 1996. — Vol. 32, No 3. — P. 402–408.)*
- Рукавишников В. А. О единственности  $R_\nu$ -обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // ДАН. — 2001. — Т. 376, № 4. — С. 451–453.  
*Rukavishnikov V. A. On the uniqueness of the  $R_\nu$ -generalized solution of boundary value problems with noncoordinated degeneration of the initial data // Dokl. Math. — 2001. — Vol. 63, Issue 1. — P. 68–70. (Original Russian paper: Rukavishnikov V. A. O yedinstvennosti  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya dlya krayevykh zadach s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // DAN. — 2001. — Vol. 376, No 4. — P. 451–453.)*
- Рукавишников В. А., Кузнецова Е. В. О принадлежности  $R_\nu$ -обобщенного решения краевой задачи с сингулярностью пространству  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Дифференциальные уравнения. — 2009(a). — Т. 45, № 6. — С. 894–898.  
*Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V. The  $R_\nu$ -generalized solution with a singularity of a boundary value problem belongs to the space  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Differ. Equ. — 2009. — Vol. 45, Issue 6. — P. 913–917. (Original Russian paper: Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V. O prinadlezhnosti  $R_\nu$ -obobshchennogo resheniya krayevoy zadachi s singulyarnost'yu yu prostranstvu  $W_{2,\nu+\beta/2+k+1}^{k+2}(\Omega, \delta)$  // Differentsial'nyye uravneniya. — 2009. — Vol. 45, No. 6. — P. 894–898.)*

- Рукавишников В. А., Кузнецова Е. В.* Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сиб. журн. вычисл. матем. — 2009(b). — Т. 12, № 3. — С. 313–324.
- Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* A scheme of a finite element method for boundary value problems with non-coordinated degeneration of input data // Num. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 2, Issue 3. — P. 250–259. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Kuznetsova E. V.* Skhema metoda konechnykh elementov dlya krayevoy zadachi s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Sib. zhurn. vychisl. matem. — 2009. — Vol. 12, No. 3. — P. 313–324.)
- Рукавишников В. А., Маслов О. В., Мосолапов А. О., Николаев С. Г.* Автоматизированный программный комплекс для поиска оптимального набора параметров весового метода конечных элементов на вычислительном кластере // Computational nanotechnology. — 2015. — № 1. — С. 9–19.
- Rukavishnikov V. A., Maslov O. V., Mosolapov A. O., Nikolayev S. G.* Avtomatizirovanny programmyy kompleks dlya poiska optimal'nogo nabora parametrov vesovogo metoda konechnykh elementov na vychislitel'nom klustere [Automated software package for finding the optimal parameters set of the weighted finite element method on a computational cluster] // Computational nanotechnology. — 2015. — No. 1. — P. 9–19 (in Russian).
- Рукавишников В. А., Рукавишникова Е. И.* Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // ДАН. — 1994. — Т. 338, № 6. — С. 731–733.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* The finite element method for the first boundary value problem with coordinated degeneration of the initial data // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. — 1995. — Vol. 50, Issue 2. — P. 335–339. (Original Russian paper: *Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Metod konechnykh elementov dlya pervoy krayevoy zadachi s soglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // DAN. — 1994. — Vol. 338, No. 6. — P. 731–733.)
- Assous F., Ciarlet P., Garcia E., Segré J.* Time-dependent Maxwell's equations with charges in singular geometries // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2006. — Vol. 196. — P. 665–681.
- Assous F., Ciarlet P., Jr., Garcia E.* Singular electromagnetic fields: inductive approach // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. — 2005. — Vol. 341, No. 10. — P. 605–610.
- Bossavit A.* Computational electromagnetism, 2nd Edition. — Boston: Academic Press, 1998. — 352 p.
- Collin R. E.* Field theory of guided waves. — New York: McGraw Hill Book Company, 1960. — 606 p.
- Costabel M., Dauge M.* Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains // Numer. Math. — 2002. — Vol. 93. — P. 239–277.
- Hiptmair R.* Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numerica. — 2002. — Vol. 11. — P. 237–339.
- Jin J. M.* The Finite Element Method in Electromagnetics (2nd Edition). — New York: John Wiley & Sons, 2002. — 755 p.
- Monk P.* A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations // Numer. Math. — 1992. — Vol. 63. — P. 243–261.
- Monk P.* Finite element methods for Maxwell's equations. — Oxford: Clarendon Press, 2003. — 450 p.
- Nédélec J. C.* Mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Math. — 1980. — Vol. 35. — P. 315–341.
- Nédélec J. C.* A new family of mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Math. — 1986. — Vol. 50. — P. 57–81.
- Pechstein A., Schöberl J.* Tangential-displacement and normal-normal-stress continuous mixed finite elements for elasticity // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2011. — Vol. 21. — P. 1761–1782.
- Rossi R., Larese A., Dadvand P., Oñate E.* An efficient edge-based level set finite element method for free surface flow problems // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2013. — Vol. 71. — P. 687–716.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova H. I.* The Finite Element Method For Boundary Value Problem With Strong Singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2010. — Vol. 234, No. 9. — P. 2870–2882.

- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova H. I.* On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 2013. — Vol. 34, No. 12. — P. 1328–1347.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikova E. I.* Weighted Finite-Element Method for Elasticity Problems with Singularity // Finite Element Method. Simulation, Numerical Analysis and Solution Techniques, eds. Păcurar Răzvan. — London: IntechOpen Limited, 2018. — P. 295–311.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V.* Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2018(a). — Vol. 341. — P. 144–156.
- Rukavishnikov V. A., Rukavishnikov A. V.* New approximate method for solving the Stokes problem in a domain with corner singularity // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. — 2018(b). — Vol. 11, No. 1. — P. 95–108.
- Webb J. P.* Hierarchal Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. — 1999. — Vol. 47. — P. 1244–1253.
- Webb J. P.* Edge elements and what they can do for you // IEEE Transaction on magnetics. — 1993. — Vol. 29, No. 2. — P. 1460–1465.