

УДК: 517.956.4

Исследование состояний равновесия второго рода уравнения Курамото – Сивашинского с однородными условиями Неймана

А. В. Секацкая

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14

E-mail: alinastart@mail.ru

Получено 25.07.2018, после доработки — 05.10.2018.

Принято к публикации 07.12.2018.

Рассматривается известное эволюционное уравнение математической физики, которое в современной математической литературе принято называть уравнением Курамото – Сивашинского. В данной работе это уравнение изучается в первоначальной редакции авторов работ, где оно было предложено, вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Изучен вопрос о существовании и устойчивости локальных аттракторов, сформированных пространственно-неоднородными решениями изучаемой краевой задачи. Данный вопрос стал особенно актуален в последнее время в связи с моделированием процесса формирования наноструктур на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов или лазерного излучения.

Изучен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода двумя различными способами. В первом из них использован метод Галёркина. Второй подход основан на использовании строго обоснованных методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством: метод интегральных многообразий, теория нормальных форм, асимптотические методы.

В работе в целом повторен подход из известной работы Д. Армбрустера, Д. Гукенхеймера, Ф. Холмса, где использован подход, основанный на применении метода Галёркина. Результаты такого анализа расширены и развиты. Использование возможностей современных компьютеров помогло существенно дополнить анализ этой задачи. В частности, найти все решения в четырех- и пятичленных аппроксимациях Галёркина, которые для изучаемой краевой задачи следует интерпретировать как состояния равновесия второго рода. Также дан анализ их устойчивости в смысле определения А. М. Ляпунова.

В данной работе проведено сравнение результатов, полученных с использованием метода Галёркина с результатами бифуркационного анализа краевой задачи на базе применения методов качественного анализа бесконечномерных динамических систем. Сравнение двух вариантов результатов показало некоторую ограниченность возможностей использования метода Галёркина.

Ключевые слова: уравнение Курамото – Сивашинского, краевая задача, состояния равновесия, устойчивость, метод Галёркина, компьютерный анализ

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672, проекта № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

UDC: 517.956.4

Equilibrium states of the second kind of the Kuramoto – Sivashinsky equation with the homogeneous Neumann boundary conditions

A. V. Sekatskaya

P. G. Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya st., Yaroslavl, 150003, Russia

E-mail: alinastart@mail.ru

Received 25.07.2018, after completion – 05.10.2018.

Accepted for publication 07.12.2018.

The well-known evolutionary equation of mathematical physics, which in modern mathematical literature is called the Kuramoto–Sivashinsky equation, is considered. In this paper, this equation is studied in the original edition of the authors, where it was proposed, together with the homogeneous Neumann boundary conditions. The question of the existence and stability of local attractors formed by spatially inhomogeneous solutions of the boundary value problem under study has been studied. This issue has become particularly relevant recently in connection with the simulation of the formation of nanostructures on the surface of semiconductors under the influence of an ion flux or laser radiation.

The question of the existence and stability of second-order equilibrium states has been studied in two different ways. In the first of these, the Galerkin method was used. The second approach is based on using strictly grounded methods of the theory of dynamic systems with infinite-dimensional phase space: the method of integral manifolds, the theory of normal forms, asymptotic methods.

In the work, in general, the approach from the well-known work of D. Armbruster, D. Guckenheimer, F. Holmes is repeated, where the approach based on the application of the Galerkin method is used. The results of this analysis are substantially supplemented and developed. Using the capabilities of modern computers has helped significantly complement the analysis of this task. In particular, to find all the solutions in the four- and five-term Galerkin approximations, which for the studied boundary-value problem should be interpreted as equilibrium states of the second kind. An analysis of their stability in the sense of A. M. Lyapunov's definition is also given.

In this paper, we compare the results obtained using the Galerkin method with the results of a bifurcation analysis of a boundary value problem based on the use of qualitative analysis methods for infinite-dimensional dynamic systems. Comparison of two variants of results showed some limited possibilities of using the Galerkin method.

Keywords: Kuramoto–Sivashinsky equation, boundary value problem, equilibriums, stability, Galerkin method, computer analysis

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 59–69 (Russian).

This work was supported by RFBR, research project No. 18-01-00672, the project No. 1.5722.2017/8.9 within a basic part of the government order.

Введение

Во многих разделах математической физики при моделировании нелинейных эволюционных процессов используют уравнение Курамото–Сивашинского или его естественные модификации и обобщения. Обычно это уравнение рассматривают вместе с естественными для приложений краевыми условиями, в большинстве работ в качестве краевых условий выбирались периодические краевые условия.

Впервые это уравнение появилось в работе [Kuramoto, 1984], где оно было получено при изучении математических задач химической кинетики. В работе [Sivashinsky, 1985] это уравнение было получено при асимптотическом интегрировании периодической краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса. В работе [Sivashinsky, 1985] была предпринята попытка объяснить феномен турбулентности. Для этого была рассмотрена периодическая краевая задача для полученного модельного уравнения, которое вскоре получило название уравнение Курамото–Сивашинского.

В работе [Bradley, Harper, 1988] была получена еще одна из редакций уравнения Курамото–Сивашинского. Эта версия была использована в качестве модели процесса формирования рельефов различных конфигураций на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. Этот физико-технологический процесс нашел широкое применение в современной наноэлектронике. Более подробный обзор использования пучковых технологий можно найти в монографии [Кремниевые наноструктуры. . . , 2014]. Важное прикладное значение пучковых технологий послужило толчком к появлению достаточно большого числа работ, в которых численно были исследованы различные варианты уравнения Курамото–Сивашинского [Bradley, Harper, 1988; Кремниевые наноструктуры. . . , 2014; Кудряшов и др., 2010; Кудряшов и др., 2012; Емельянов, 2012; Emel'yanov, 2009; Barker et al., 2012; Barker et al., 2013; Gelfand, Bradley, 2015]. Кроме численного анализа в ряде этих работ были найдены его точные решения, как правило, в виде бегущих волн.

В работах [Kulikov, 2015; Armsruster et al., 1988] было рассмотрено уравнение Курамото–Сивашинского вместе с краевыми условиями Неймана. В первой из них было доказано утверждение о наличии для такой краевой задачи глобального аттрактора, а в работе [Armsruster et al., 1988] эта краевая задача изучалась на основе применения метода Галёркина. Отметим также работу [Larkin, 2004], где изучался вопрос о существовании и единственности ряда краевых (начально-краевых) задач для уравнения Курамото–Сивашинского.

В последнее время в связи с задачей описания формирования нанорельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов были предложены иные подходы для анализа задач о существовании и устойчивости пространственно-неоднородных решений: состояний равновесия, периодичных по времени решений, локальных аттракторов более сложной структуры [Куликов, Куликов, 2012; Куликов и др., 2011; Куликов, Куликов, 2018; Куликов, Секацкая, 2018; Секацкая, 2017; Kulikov, Kulikov, 2014]. В этих работах был использован и развит подход, использующий методы качественного анализа бесконечномерных динамических систем. В частности, метод интегральных многообразий, нормальных форм Пуанкаре–Дюлака, асимптотические методы анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Эти методы позволяют получить интересующие решения без использования метода Галёркина и численного анализа соответствующих краевых задач.

В данной работе была рассмотрена краевая задача из работы [Armsruster et al., 1988]. Как и в работе [Armsruster et al., 1988], она была проанализирована методом Галёркина с использованием четырех- и пятичленного приближения. Повторное обращение было мотивировано двумя причинами. Во-первых, использование современных компьютерных технологий позволило более детально изучить вопрос о существовании пространственно-неоднородных решений,

а также дополнить этот анализ изучением устойчивости таких решений. Во-вторых, полученные достаточно детальные результаты были сравнены с анализом исходной краевой задачи с использованием строго математических методов бифуркационного анализа. При этом были отмечены некоторые моменты бифуркационного анализа, которые не удалось обнаружить при использовании метода Галёркина.

Постановка задачи

В данной работе будем изучать нелинейную краевую задачу (КЗ) [Kuramoto, 1984; Sivashinsky, 1985; Bradley, Harper, 1988; Kulikov, 2015; Armsruster et al., 1988]

$$u_t = -u_{xxxx} - b u_{xx} - c (u_x)^2, \quad (1)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, \pi) = 0, \quad (2)$$

где $u = u(t, x)$, $x \in [0, \pi]$, $t \geq 0$, b, c — некоторые действительные постоянные ($c \neq 0$). При этом без нарушения общности можно считать, что $c = 1$. Действительно, если положить $u = \gamma v$ и считать, что $\gamma c = 1$ (за счет выбора γ), то получим уравнение (1), в котором $c = 1$. В дальнейших вычислениях будем считать, что $c = 1$. При всех допустимых $t \in [0, T]$ (здесь $[0, T]$ — интервал существования решения, при этом из работы [Kulikov, 2015] вытекает, что рассматривают КЗ при $T = \infty$) справедливо представление решения в виде ряда

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx,$$

так как на отрезке $[0, \pi]$ система функций $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ формирует полную ортогональную систему. При этом в нашем случае

$$u_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx, \quad u_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приближенные решения можно и целесообразно искать в виде

$$u(t, x) \approx \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx.$$

При использовании метода Галёркина принято фиксировать m . В работе [Armsruster et al., 1988] и данной работе будет изучен вариант $m = 3$ и $m = 4$, что в целом означает изучение четырехчленной и пятичленной галёркинской аппроксимации.

Уточним сразу один важный момент. В работе [Armsruster et al., 1988] и здесь главное внимание уделялось нахождению состояний равновесия второго рода. Напомним, что решения КЗ (1), (2) принято называть состояниями равновесия второго рода, если ее решение $u(t, x)$ таково, что $u_x(t, x) = v(x)$ — функция, которая от t не зависит.

В работе [Sivashinsky, 1985] для нахождения некоторых таких решений был использован метод Галёркина, то есть решения краевой задачи (1), (2) представлены в виде

$$u(t, x) \cong \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx$$

в варианте, когда $m = 2, 4$. В принципе, число m может быть и иным.

Редукция с помощью метода Галёркина

Далее в работе будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода. Напомним, что решение краевой задачи (здесь (1), (2)) называется состоянием равновесия второго рода, если $\frac{\partial u}{\partial x} = v(x)$, т. е. функция $v(x)$ не зависит от t .

В данной работе приближенное решение $u(t, x)$ КЗ (1)–(2) будем искать в аналогичном виде:

$$u(t, x) \cong \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx, \quad (3)$$

где $u_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) dx$, $u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \cos nx dx$, $n = 1, 2, \dots, m$. Сумма (3) стремится к точному решению КЗ (1), (2):

$$u(t, x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx$$

при $m \rightarrow \infty$.

Подставив ряд (3) при $m = 3$ в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \\ & - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t) \cos nx \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Далее применим стандартную процедуру получения приближений Галёркина, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $u_j(t)$:

$$\dot{u}_0 = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2), \quad (4)$$

$$\dot{u}_1 = (b-1)u_1 - 6u_2u_3 - 2u_1u_2,$$

$$\dot{u}_2 = 4(b-4)u_2 + \frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3, \quad (5)$$

$$\dot{u}_3 = 9(b-9)u_3 + 2u_1u_2,$$

где точкой обозначена производная по t .

У системы (5) интерес представляют ненулевые состояния равновесия. Таким решениям соответствуют приближенные пространственно-неоднородные решения КЗ (1), (2):

$$u(t, x) \cong -(v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2)t + v_1 \cos x + v_2 \cos 2x + v_3 \cos 3x,$$

где (v_1, v_2, v_3) — координаты одного из состояний равновесия системы (5).

В свою очередь, нахождение состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (5) приводит к необходимости решения системы трех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (b-1)v_1 &= 2v_1v_2 + 6v_2v_3, \\ 4(b-4)v_2 &= -\frac{1}{2}v_1^2 + 3v_1v_3, \\ 9(b-9)v_3 &= -2v_1v_2, \end{aligned} \quad (6)$$

у которой, безусловно, есть решение $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, но интерес представляют иные ее решения. Нулевое состояние равновесия системы (4), (5) устойчиво при $b \in (-\infty, 1)$ и теряет устойчивость дивергентным образом (при $b = 1$ одно из собственных значений равно нулю). Исследование устойчивости проводилось с использованием теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Анализ галёркинских приближений

Анализ системы (6) показывает, что при $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$ она не имеет действительных решений, отличных от нуля. Действительно, пусть сначала $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Эти особые значения для параметра b рассмотрим отдельно. Тогда из третьего уравнения системы (6) можно выразить v_3 и подставить выраженное v_3 в первое уравнение системы (6). После этого получим следующее равенство:

$$(b-1)v_1 = 2v_1v_2 + \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{b-9}v_2^2v_1.$$

Если $v_1 = 0$, то $v_2, v_3 = 0$. Но при $v_1 \neq 0$ получим квадратное уравнение, которое имеет действительные решения, если $b \in [-23, 9)$. В свою очередь, из второго уравнения получаем равенство $v_1^2 = \frac{4b(4-b)(b-9)v_2}{3(b-9)+4v_2}$, из которого v_1 не находится как действительное число, если $b < 1$.

При $b = 1$ также нетрудно установить наличие только нулевого решения системы (6).

При $b = 4$ система дифференциальных уравнений (5) имеет инвариантное многообразие $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = \alpha$, где α — произвольная действительная постоянная. На инвариантном многообразии все решения — состояния равновесия. При $b = 4$ краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -4\alpha^2 t + \alpha \cos 2x. \quad (7)$$

Если $b = 9$, то система (6) имеет решение $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = \beta$, где β — произвольная действительная постоянная, то есть краевая задача (1), (2) имеет приближенные решения

$$u(t, x) = -9\beta^2 t + \beta \cos 3x. \quad (8)$$

Возвратимся к общему случаю, когда $b \neq 1$, $b \neq 4$, $b \neq 9$. Из анализа системы (6) вытекает, что система (6) имеет 4 типа решений: $V_1(v_1, v_2, v_3)$, $V_2(v_1, v_2, v_3)$, $V_3(v_1, v_2, v_3)$, $V_4(v_1, v_2, v_3)$, где $v_1, v_2, v_3 \neq 0$ следующего вида:

$$V_1(v_1, v_2, v_3) : \begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2}(3b-27+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b-3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{5b-77+3\sqrt{621-42b-3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b-27+\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2}(b-25+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b-3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{15b-231+9\sqrt{621-42b-3b^2}}; \end{cases} \quad (9)$$

$$V_2(v_1, v_2, v_3) : \begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2}(3b-27+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b-3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{5b-77+3\sqrt{621-42b-3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b-27+\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2}(b-25+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b-3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{15b-231+9\sqrt{621-42b-3b^2}}; \end{cases} \quad (10)$$

$$V_3(v_1, v_2, v_3) : \begin{cases} v_1 = -\frac{\sqrt{2}(-3b+27+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{-5b+77+3\sqrt{621-42b-3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b-27-\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}, \\ v_3 = \frac{\sqrt{2}(-b+25+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{-15b+231+9\sqrt{621-42b-3b^2}}; \end{cases} \quad (11)$$

$$V_4(v_1, v_2, v_3) : \begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2}(-3b+27+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{-5b+77+3\sqrt{621-42b-3b^2}}, \\ v_2 = \frac{3b-27-\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2}(-b+25+\sqrt{621-42b-3b^2})\sqrt{(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2})(b-4)}}{-15b+231+9\sqrt{621-42b-3b^2}}. \end{cases} \quad (12)$$

Данные формулы написаны формально, как уже отмечалось ранее, они получены при $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$. Проанализировав их подробнее, мы приходим к выводу, что $b \neq \frac{85}{13}$, данное значение обращает в нуль знаменатели координат v_1, v_3 решений $V_1(v_1, v_2, v_3), V_2(v_1, v_2, v_3)$.

Решения $V_1(v_1, v_2, v_3), V_2(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (1, 4) \cup (\frac{85}{13}, 9)$, они устойчивы при $b \in (1, 4)$. Решения $V_3(v_1, v_2, v_3), V_4(v_1, v_2, v_3)$ при $b \in (1, 4)$ не существуют.

Решения $V_3(v_1, v_2, v_3), V_4(v_1, v_2, v_3)$ существуют при $b \in (4, 9)$, и они при всех этих значениях b неустойчивы.

Для наглядности представим все решения на рис. 1.

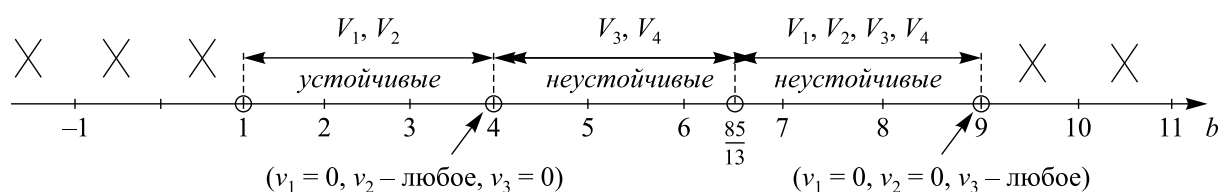


Рис. 1. Состояния равновесия системы (5). Здесь $V_1(v_1, v_2, v_3)$ — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют

Далее приближенное решение $u(t, x)$ КЗ (1), (2) будем искать в виде (3), но уже в случае разложения по пяти базисным функциям, то есть при $m = 4$.

Подставив сумму (3) при $m = 4$ в уравнение (1) получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{u}_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 \dot{u}_n(t) \cos nx \right) &= -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t) \cos nx \right) - \\ -b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t) \cos nx \right) &- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t) \cos nx \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее применим стандартную процедуру получения приближений Галёркина, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения $u_j(t)$:

$$\dot{u}_0 = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2 + 16u_4^2), \quad (14)$$

$$\dot{u}_1 = -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 12u_3u_4 + 2u_1u_2),$$

$$\dot{u}_2 = -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3 - 8u_2u_4 \right), \quad (15)$$

$$\dot{u}_3 = -81u_3 + 9bu_3 - 4u_1u_4 + 2u_1u_2,$$

$$\dot{u}_4 = -256u_4 + 16bu_4 + 2u_2^2 + 3u_1u_3.$$

Проанализировав систему (15), мы приходим к выводу, что она может иметь решения следующих видов.

1. $\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4)$, $\tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4)$, где $v_2 = 2\sqrt{-b^2 + 20b - 64}$, $v_4 = \frac{b}{2} - 2$, $b \in (4, 16)$. Анализ системы

$$\begin{aligned} -v_1 + bv_1 - (6v_2v_3 + 12v_3v_4 + 2v_1v_2) &= 0, \\ -16v_2 + 4bv_2 + \left(\frac{v_1^2}{2} - 3v_1v_3 - 8v_2v_4\right) &= 0, \\ -81v_3 + 9bv_3 - 4v_1v_4 + 2v_1v_2 &= 0, \\ -256v_4 + 16bv_4 + 2v_2^2 + 3v_1v_3 &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где (v_1, v_2, v_3, v_4) — координаты одного из состояний равновесия. Подставим значения $v_1 = v_3 = 0$ в систему (16), получим два уравнения, которые далее необходимо решить:

$$16v_2 + 4bv_2 - 8v_2v_4 = 0, \quad (17)$$

$$-256v_4 + 16bv_4 + 2v_2^2 = 0. \quad (18)$$

Выразив v_4 из уравнения (17) при $v_2 \neq 0$ и подставив в уравнение (18), получим равенство

$$4(b^2 - 20b + 64) + u_2^2 = 0,$$

из которого получаем, что $u_2 = \pm 2\sqrt{-b^2 + 20b - 64}$.

Исследовав устойчивость решений $\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4)$, $\tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4)$ с применением теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, мы приходим к выводу, что решение $\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4)$ устойчиво при $b \in [4.036, 10.587]$. При $b = 4.0349379496107$ одно из собственных значений равно нулю. При $b = 10.58843043437$ спектр устойчивости одного из состояний равновесия имеет два собственных значения, лежащих в левой полуплоскости, и два чисто мнимых собственных значения. Решение $\tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4)$ устойчиво при $b \in [5.282, 6.308]$, при $b = 5.281$ одно из собственных значений равно нулю, при $b = 6.308121289767875$ вещественная часть одного из собственных значений равна нулю.

2. $\tilde{V}_3(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$, $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$, $\tilde{V}_5(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$, $\tilde{V}_6(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$. Данные решения были найдены с использованием программы Wolfram Mathematica. Решения $\tilde{V}_3(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ существуют при $b \in (1, 4.034] \cup [5.282, 16)$. Решения $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ существуют при $b \in (1, 4.034]$, эти решения являются устойчивыми при $b \in (1, 4.034]$. Решения $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ существуют при $b \in (9, 16)$, эти решения являются неустойчивыми. Решения $\tilde{V}_5(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ существуют при $b \in [12.5948, 13.016]$, эти решения являются неустойчивыми. Решения $\tilde{V}_6(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ существуют при $b \in [12.5948, 16)$, эти решения являются неустойчивыми. Формулы для v_1, v_2, v_3, v_4 для этого случая в данной статье не приводятся из-за их громоздкости.

3. Нулевое решение, которое является устойчивым при $b < 1$. Для того чтобы показать это, составим матрицу Якоби для системы (16):

$$J = \begin{pmatrix} -1 + b - 2v_2 & -2v_1 - 6v_3 & -6v_2 - 12v_4 & -12v_3 \\ v_1 - 3v_3 & -16 + 4b - 8v_4 & -3v_1 & -8v_2 \\ 2v_2 - 4v_4 & 2v_1 & -81 + 9b & -4v_1 \\ 3v_3 & 4v_2 & 3v_1 & -256 + 16b \end{pmatrix};$$

подставив в нее значения $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$, получим матрицу

$$J(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 + b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 + 4b & 0 & 0 \\ 0 & -81 + 9b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -256 + 16b \end{pmatrix}.$$

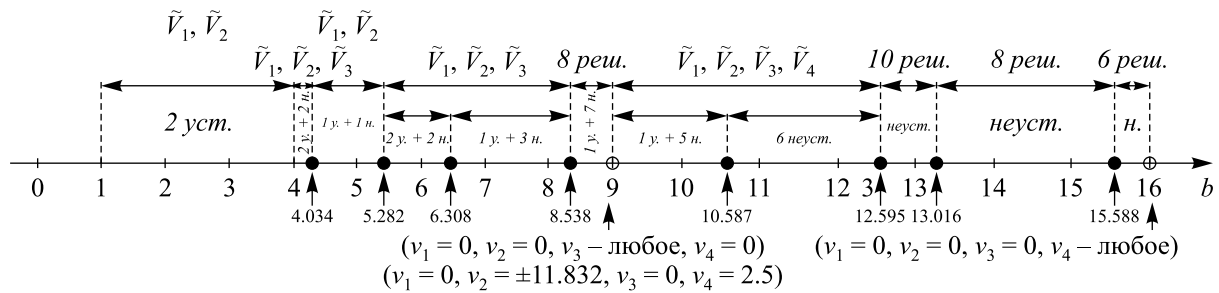


Рис. 2. Состояния равновесия системы (15). Здесь $\tilde{V}_1(v_1, v_2, v_3, v_4)$ — одно из состояний равновесия

Далее найдем собственные значения матрицы $J(0, 0, 0, 0)$. Они равны следующим значениям: $\lambda_1 = 16(b - 16)$, $\lambda_2 = 9(b - 9)$, $\lambda_3 = 4(b - 4)$, $\lambda_4 = b - 1$. Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что нулевое решение будем асимптотически устойчивым, если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ имеют вещественную часть $\text{Re } \lambda_i < 0, i = 1, \dots, 4$. Откуда находим, что последнее неравенство выполняется при $b < 1$.

4. При $b = 9$ существует решение $(0, 0, v_3, 0)$, где v_3 принимает любое значение, а также существуют решения $(0, \pm 11.83215957, 0, 2.5)$. Решение $(0, +11.83215957, 0, 2.5)$ является устойчивым, решение $(0, -11.83215957, 0, 2.5)$ неустойчивое.

5. $\tilde{V}_1(0, 0, 0, v_4)$, при $b = 16$, где v_4 принимает любое значение.
Для наглядности представим все решения на рис. 2.

Некоторые замечания

Сравним некоторые из результатов, полученных на базе применения метода Галёркина, с результатами бифуркационного анализа краевой задачи (1), (2) с использованием строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5), для которой был исследован вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия. Вопрос о существовании у нее состояний равновесия был сведен к нахождению решений у системы алгебраических уравнений (6). В работе было показано существование у этой системы решений при $b \in (1, 9]$. Непосредственный анализ краевой задачи (1), (2) показал, что при $b = 9 + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, краевая задача имеет нетривиальные состояния равновесия второго рода. Для этого следует использовать методику и результаты работ [Куликов, Секацкая, 2018; Секацкая, 2017].

Отметим также, что если рассмотреть краевую задачу (1), (2), $u(t, x)$, для которой справедливо следующее:

$$u(0, x) = f_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} \cos 3px,$$

где $f_3(x) \in W_2^4[0, \pi]$, т.е. пространству Соболева таких функций, у которых $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x) \in L_2(0, \pi)$, то оказывается, что для всех таких решений справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0,$$

или в иной форме записи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{3p}(t) = 0, \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

где $u(t, x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{3p}(t) \cos 3px$.

С другой стороны, анализ системы дифференциальных уравнений (5) при $b = 9$ показывает, что она имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = 0, u_3 = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольная

действительная постоянная и, следовательно, значение u_3 не отрицательно. Данные два замечания показывают ограниченные возможности анализа краевой задачи (1), (2) на основе использования метода Галёркина.

Заключение

В работе изучено уравнение Курамото–Сивашинского вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Изучен вопрос о существовании состояний равновесия второго рода на основе применения метода Галёркина. При помощи численных методов с привлечением современных компьютерных технологий были найдены состояния равновесия, дан анализ устойчивости найденных состояний равновесия в смысле определения А. М. Ляпунова. Из полученных результатов вытекает, что применение метода Галёркина для анализа динамики решений краевой задачи (1), (2) при изучении простейших вопросов приводит к результатам, имеющим недостоверный характер. Тем более этого следует ожидать при анализе локальных бифуркаций.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Анатолию Николаевичу Куликову за постановку задачи и помощь при написании статьи.

Список литературы (References)

- Емельянов В. М.* Дефектно-деформационная неустойчивость как универсальный механизм образования решеток и ансамблей наноточек при действии ионных и лазерных пучков на твердые тела // Известия РАН. Сер. физическая. — 2010. — Т. 74, № 2. — С. 124–130.
Emel'yanov V.M. Defektno–deformatsionnaya neustojchivost' kak universal'nyj mekhanizm obrazovaniya reshyotok i ansamblej nanotochek pri dejstvii ionnykh i lazernykh puchkov na tverdye tela [Defect-deformation instability as a universal mechanism for the formation of lattices and ensembles of nanotots under the action of ion and laser beams on solid bodies] // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Physical series. — 2010. — P. 124–130 (in Russian).
- Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование: монография / под общей редакцией В. И. Рудакова. — Ярославль: Индиго, 2014. — 560 с.
Kremnievye nanostruktury. Fizika. Tekhnologiya. Modelirovanie: monograph / under the general editorship of V. I. Rudakova. — Yaroslavl: Indigo, 2014. — 560 p. (in Russian).
- Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н.* Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. — 2010. — Т. 1, № 2. — С. 151–158.
Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Strikhanov M.N. Chislennoe modelirovanie formirovaniya nanostruktur na poverkhnosti ploskikh podlozhek pri ionnoj bombardirovke [Numerical modeling of the formation of nanostructures on the surface of flat substrates during ion bombardment] // Physics of Atomic Nuclei. — 2010. — P. 151–158 (in Russian).
- Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е.* Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 24, № 12. — С. 23–28.
Kudryashov N.A., Ryabov P.N., Fedyanin T.E. Osobennosti samoorganizatsii nanostruktur na poverkhnosti poluprovodnikov pri ionnoj bombardirovke [Features of self-organization of nanostructures on the surface of semiconductors under ion bombardment] // Math modeling. — 2012. — Vol. 24, № 12. — P. 23–28 (in Russian).
- Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — С. 930–945.
Kulikov A.N., Kulikov D.A. Formirovanie volnoobraznykh nanostruktur na poverkhnosti ploskikh podlozhek pri ionnoy bombardirovke [Formation of wave-like nanostructures on the surface of flat substrates during ion bombardment] // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — P. 930–945 (in Russian).
- Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С.* Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. — 2011. — № 4. — С. 86–99.
Kulikov A.N., Kulikov D.A., Rudy A.S. Bifurkatsii nanostruktur pod vozdeystviem ionnoy bombardirovki [Bifurcations of nanostructures under the influence of ion bombardment] // Bulletin of the Udmurt University. — 2011. — No. 4. — P. 86–99 (in Russian).

- Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Уравнение Курамото–Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — № 1. — С. 86–99.
Kulikov A. N., Kulikov D. A. Uravnenie Kuramoto–Sivashinskogo. Lokalnyj attraktor, zapolnennyj neustojchivymi periodicheskimy resheniyami [The Kuramoto–Sivashinsky equation. Local attractor filled with unstable periodic solutions] // Modeling and analysis of information systems. — 2018. — No. 1. — P. 86–99 (in Russian).
- Куликов А. Н., Секацкая А. В.* Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото–Сивашинского // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2018. — Т. 148. — С. 58–65.
Kulikov A. N., Sekatskaya A. V. Lokal'nye attraktory v odnoj kraevoy zadache dlya uravneniya Kuramoto–Sivashinskogo [Local attractors in a boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation] // The results of science and technology. Series: modern mathematics and its applications. — 2018. — No. 148. — P. 58–65 (in Russian).
- Секацкая А. В.* Бифуркации пространственно-неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото–Сивашинского // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 615–628.
Sekatskaya A. V. Bifurkatsii prostranstvenno neodnorodnykh reshenij v odnoj kraevoy zadache dlya obobshhennogo uravneniya Kuramoto–Sivashinskogo [Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in a boundary-value problem for the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation] // Modeling and analysis of information systems. — 2017. — Vol. 24, No. 5. — P. 615–628 (in Russian).
- Armsruster D., Guckenheimer J., Holmes Ph.* Kuramoto–Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold // Siam J. Appl. Math. — 1989. — Vol. 49, No. 3. — P. 676–691.
- Barker B., Johnson M. A., Noble P., Zumbrun K.* Stability of periodic Kuramoto–Sivashinsky waves // Applied Mathematics Letters, Elsevier. — 2012. — Vol. 25, No. 5. — P. 824–829.
- Barker B., Johnson M. A., Noble P., Rodrigues L. M., Zumbrun K.* Nonlinear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2013. — Vol. 25. — P. 11–46.
- Bradley R., Harper J.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. — 1988. — Vol. 6, No. 4. — P. 2390–2395.
- Emel'yanov B. I.* The Kuramoto–Sivashinsky equation for the defect-deformation. Instability of a surface-stressed nanolayer // Laser Physics. — 2009. — Vol. 19, No. 3. — P. 538–543.
- Gelfand M. P., Bradley R. M.* One Dimensional Conservative Surface Dynamics with Broken Parity: Arrested Collapse versus Coarsening // Phys. Lett. A. — 2015. — Vol. 379, No. 3. — P. 199–205.
- Kulikov A. N.* Attractors of two boundary problems for modified equations of telegraphy // Nelin. Dinamika. — 2008. — Vol. 4, No. 1. — P. 57–68.
- Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifurcations in a boundary value problem of nanoelectronics // J. Math. Sci. — 2015(a). — Vol. 208, No. 2. — P. 211–221.
- Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifurcation in Kuramoto–Sivashinsky Equation // Pliska Stud. Math. — 2015(b). — No. 6. — P. 101–110.
- Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Bifurcations of spatially heterogeneous solutions in two boundary problems for generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Vestn. MIFI. — 2014. — Vol. 3, No. 4. — P. 468–475.
- Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves and turbulence // Berlin. Springer. — 1984. — P. 156.
- Larkin N. A.* Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — Vol. 297, No. 1. — P. 169–185.
- Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R.* Some global dynamical properties of the Kuramoto–Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physics 16D. — 1985. — P. 155–183.
- Sivashinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flow // Physica D. — 1985. — Vol. 17, No. 2. — P. 243–255.

