КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 6 С. 903–918
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-903-918

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 330.43+519.233

Оценивание параметров моделей временных рядов с марковскими переключениями режимов

В. А. Силаева[a], М. В. Силаева[b], А. М. Силаев[c]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 603155, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

E-mail: [a] vasilaeva@hse.ru, [b] msilaeva@hse.ru, [c] asilaev@hse.ru

Получено 22.01.2018, после доработки — 14.08.2018.
Принято к публикации 20.08.2018.

В работе рассматривается задача оценивания параметров временных рядов, описываемых регрессионными моделями с марковскими переключениями двух режимов в случайные моменты времени и независимыми гауссовскими шумами. Для решения предлагается вариант EM-алгоритма, основанный на итерационной процедуре, в ходе которой происходит чередование оценивания параметров регрессии при заданной последовательности переключений режимов и оценивания последовательности переключений при заданных параметрах моделей регрессии. В отличие от известных методов оценивания параметров регрессий с марковскими переключениями режимов, которые основаны на вычислении апостериорных вероятностей дискретных состояний последовательности переключений, в работе находятся оптимальные по критерию максимума апостериорной вероятности оценки процесса переключений. В результате предлагаемый алгоритм оказывается более простым и требует меньшее количество расчетов. Компьютерное моделирование позволяет выявить факторы, влияющие на точность оценивания. К таким факторам относятся число наблюдений, количество неизвестных параметров регрессии, степень их различия в разных режимах работы, а также величина отношения сигнала к шуму, которую в моделях регрессии можно связать с величиной коэффициента детерминации. Предложенный алгоритм применяется для задачи оценивания параметров в моделях регрессии для доходности индекса РТС в зависимости от доходностей индекса S&P 500 и акций «Газпрома» за период с 2013 года по 2018 год. Проводится сравнение оценок параметров, найденных с помощью предлагаемого алгоритма, с оценками, которые формируются с использованием эконометрического пакета EViews, и с оценками обычного метода наименьших квадратов без учета переключений режимов. Учет переключений позволяет получить более точное представление о структуре статистической зависимости исследуемых переменных. В моделях с переключениями рост отношения сигнала к шуму приводит к тому, что уменьшаются различия в оценках, вырабатываемых предлагаемым алгоритмом и с помощью программы EViews.

Ключевые слова: оценивание параметров, модели регрессии, модели с марковскими переключениями, функция правдоподобия, метод максимума правдоподобия, дисперсия шума, отношение сигнала к шуму

© 2018 Вера Андреевна Силаева, Марина Владиславовна Силаева, Андрей Михайлович Силаев

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2018 VOL. 10 NO. 6 P. 903–918
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-6-903-918

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 330.43+519.233

Estimation of models parameters for time series with Markov switching regimes

V. A. Silaeva[a], M. V. Silaeva[b], A. M. Silaev[c]

National Research University Higher School of Economics,
25/12 Bolshaya Pecherskaya st., Nizhny Novgorod, 603155, Russia

E-mail: [a] vasilaeva@hse.ru, [b] msilaeva@hse.ru, [c] asilaev@hse.ru

Received 22.01.2018, after completion — 14.08.2018.
Accepted for publication 20.08.2018.

The paper considers the problem of estimating the parameters of time series described by regression models with Markov switching of two regimes at random instants of time with independent Gaussian noise. For the solution, we propose a variant of the EM algorithm based on the iterative procedure, during which an estimation of the regression parameters is performed for a given sequence of regime switching and an evaluation of the switching sequence for the given parameters of the regression models. In contrast to the well-known methods of estimating regression parameters in the models with Markov switching, which are based on the calculation of a posteriori probabilities of discrete states of the switching sequence, in the paper the estimates are calculated of the switching sequence, which are optimal by the criterion of the maximum of a posteriori probability. As a result, the proposed algorithm turns out to be simpler and requires less calculations. Computer modeling allows to reveal the factors influencing accuracy of estimation. Such factors include the number of observations, the number of unknown regression parameters, the degree of their difference in different modes of operation, and the signal-to-noise ratio which is associated with the coefficient of determination in regression models. The proposed algorithm is applied to the problem of estimating parameters in regression models for the rate of daily return of the RTS index, depending on the returns of the S&P 500 index and Gazprom shares for the period from 2013 to 2018. Comparison of the estimates of the parameters found using the proposed algorithm is carried out with the estimates that are formed using the EViews econometric package and with estimates of the ordinary least squares method without taking into account regimes switching. The account of regimes switching allows to receive more exact representation about structure of a statistical dependence of investigated variables. In switching models, the increase in the signal-to-noise ratio leads to the fact that the differences in the estimates produced by the proposed algorithm and using the EViews program are reduced.

Keywords: estimation of parameters, regression models, Markov switching models, likelihood function, maximum likelihood method, noise variance, signal to noise ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 6, pp. 903–918 (Russian).

© 2018 Vera A. Silaeva, Marina V. Silaeva, Andrey M. Silaev

1. Введение

При описании временных рядов регрессионными моделями обычно предполагается, что параметры моделей не изменяются на интервале наблюдения. Вместе с тем, например, экономические временные ряды часто демонстрируют нестационарное поведение, которое может быть обусловлено экономическими спадами, финансовыми кризисами, технологическими изменениями, положительными и отрицательными новостями и другими событиями. Если изменения происходят в случайные моменты времени, то для адекватного описания могут быть использованы модели со скачкообразными изменениями параметров и с переключениями режимов работы. Исследованию временных рядов с переключениями режимов посвящена обширная литература. Начиная со статьи [Goldfeld, Quandt, 1973], для описания регрессий с переключениями параметров в случайные моменты времени стали использоваться марковские модели. В статьях [Hamilton, 1989; Kim, 1994] и монографиях [Hamilton, 1994; Krolzig, 1997; Maddala, Kim, 1998; Kim, Nelson, 1999; Franses, Van Dijk, 2000; Frühwirth-Schnatter, 2006] разработаны алгоритмы оценивания параметров марковских моделей со случайными переключениями режимов в дискретном времени, которые реализованы в современных версиях эконометрических пакетов обработки данных. Данные алгоритмы основаны на рекуррентном вычислении апостериорных вероятностей $P\left(s_t \middle| F_T\right)$ значений ненаблюдаемой дискретной последовательности s_t, описывающей процесс переключений, по информации F_T на всем интервале наблюдения $t = 1, 2, \ldots, T$.

Новизна настоящей работы состоит в том, что для оценивания параметров регрессионных моделей временных рядов со случайными марковскими переключениями режимов предлагается алгоритм, основанный на итерационной процедуре, в которой вместо апостериорных вероятностей вычисляются и используются оценки значений последовательности s_t, оптимальные по критерию максимума апостериорной вероятности. Предлагаемый алгоритм более прост и требует меньшего количества вычислений. На примере анализа моделей регрессий для доходности индекса РТС проводится сравнение по точности оценивания предлагаемого алгоритма и алгоритма, реализованного в эконометрическом пакете EViews для регрессий с марковскими переключениями режимов (Markov Switching Regression). Результаты моделирования позволяют выявить и оценить параметры регрессий доходности индекса РТС с марковскими переключениями режимов работы и подтверждают работоспособность исследуемого алгоритма.

2. Постановка задачи

Будем считать, что в дискретном времени наблюдается последовательность случайных векторных величин $y_1^T \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$, где T — время наблюдения. Предположим, что некоторые параметры этого процесса, образующие вектор θ, претерпевают скачкообразные изменения:

$$\theta_t = \begin{cases} \theta_0, & s_t = 0, \\ \theta_1, & s_t = 1, \end{cases}$$

где s_t — ненаблюдаемая случайная последовательность, принимающая значения 0 или 1 в дискретные моменты времени $t = 1, 2, \ldots, T$. Задача состоит в том, чтобы по реализации наблюдений y_1^T найти оценки параметров $\theta \equiv \{\theta_0, \theta_1\}$ и процесса s_t.

Конкретизируем наблюдаемую последовательность: будем рассматривать модель множественной линейной регрессии. Если переключения режимов работы отсутствуют, то модель задается уравнениями

$$z_t = x_t'\beta + \sigma u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{1}$$

Здесь z_t — объясняемая переменная, $x_t = (x_{t1},\ldots,x_{tk})'$ — вектор регрессоров, $'$ — знак транспонирования, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k)'$ — вектор параметров размерности k, u_t — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией: $u_t \sim WN(0,1)$ (белый гауссовский шум). В этом случае для оценки параметров модели $\theta \equiv \{\beta,\sigma^2\}$ по реализации наблюдений y_1^T, $y_t \equiv \{z_t, x_t\}$, можно использовать метод максимального правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия для модели (1) с учетом гауссовости и независимости шумов принимает вид

$$\ln L(\beta,\sigma^2) = \sum_{t=1}^{T} \ln P(z_t, x_t | \beta,\sigma^2) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z_t - x_t'\beta)^2}{2\sigma^2}\right)\right). \tag{2}$$

Находя максимум функции (2) по β и σ^2, получим оценки максимального правдоподобия:

$$\hat{\beta}_{ML} = \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} x_t z_t\right), \quad \hat{\sigma}_{ML}^2 = \sum_{t=1}^{T} \left(z_t - x_t'\hat{\beta}_{ML}\right)^2 \Big/ T. \tag{3}$$

Для модели со скачкообразными переключениями режимов уравнения модели представим в виде

$$\begin{gathered} z_t = x_t'\beta_{s_t} + \sigma_{s_t} u_t, \quad t = 1,2,\ldots,T, \\ u_t \sim WN(0,1), \quad \beta_{s_t} = \beta_0(1-s_t) + \beta_1 s_t, \quad \sigma_{s_t}^2 = \sigma_0^2(1-s_t) + \sigma_1^2 s_t. \end{gathered} \tag{4}$$

Будем считать, что последовательность s_t, принимающая значения 0 или 1, является марковской цепью с вероятностями начальных значений $P(s_0 = 1) = p_1$, $P(s_0 = 0) = 1 - p_1$ и переходными вероятностями $P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = p_{11}$, $P(s_t = 0 | s_{t-1} = 0) = p_{00}$. Требуется по реализациям процессов $z_1^T = \{z_1, z_2, \ldots, z_T\}$, $x_1^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$, образующих совокупность наблюдений y_1^T, найти оценки максимального правдоподобия для параметров модели $\theta_0 \equiv \{\beta_0, \sigma_0^2, p_{00}\}$ и $\theta_1 \equiv \{\beta_1, \sigma_1^2, p_{11}\}$ при различных режимах работы и оценки значений последовательности s_t на интервале наблюдения.

3. Алгоритм оценивания

Для решения поставленной задачи применим вариант EM-алгоритма (expectation and maximization) [Dempster, Laird, Rubin, 1977] для последовательной максимизации функции правдоподобия $P\left(z_1^T, x_1^T \middle| s_0^T, \beta_0, \sigma_0^2, \beta_1, \sigma_1^2\right)$ по $\beta_0, \sigma_0^2, \beta_1, \sigma_1^2$. Если значения реализации процесса переключений s_0^T известны, то максимально правдоподобные оценки параметров модели $\{\beta_0, \sigma_0^2\}$, $\{\beta_1, \sigma_1^2\}$ могут быть вычислены по формулам аналогичным (3). Для этого разделим весь интервал наблюдения на участки, соответствующие значениям $s_t = 0$ и $s_t = 1$, и вычислим оценки:

$$\hat{\beta}_i = \left(\sum_{t=1}^{T} \delta(s_t, i) x_t x_t'\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \delta(s_t, i) x_t z_t\right), \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \delta(s_t, i)\left(z_t - x_t'\hat{\beta}_i\right)^2}{\sum_{t=1}^{T} \delta(s_t, i)}, \tag{5}$$

где $\delta(s_t, i)$ — символ Кронекера, $i = 0,1$:

$$\delta(s_t, i) = \begin{cases} 1, & s_t = i, \\ 0, & s_t \neq i. \end{cases}$$

Подсчитывая относительное число событий, связанных с сохранением значений последовательности s_t в соседние моменты времени, можно также вычислить оценки переходных вероятностей:

$$\hat{p}_{ii} = \sum_{t=1}^{T-1} \delta(s_t, i)\delta(s_{t+1}, i) \Big/ \sum_{t=1}^{T-1} \delta(s_t, i), \quad i = 0,1. \tag{6}$$

В соответствии с ЕМ-алгоритмом ненаблюдаемую последовательность s_0^T в формулах (5), (6) можно заменить оценочными значениями $\hat{s}_0^T$. С другой стороны, если параметры модели для различных режимов работы $\theta_0 \equiv \{\beta_0, \sigma_0^2, p_{00}\}$ и $\theta_1 \equiv \{\beta_1, \sigma_1^2, p_{11}\}$ известны, то можно найти оценки значений процесса $s_0^T = \{s_0, s_1, \ldots, s_T\}$ на интервале наблюдения, оптимальные по критерию максимума апостериорной вероятности:

$$\hat{s}_0^T = \arg\max_{s_0^T} P\left(s_0^T \middle| z_1^T, x_1^T, \theta_0, \theta_1\right) = \arg\max_{s_0^T} P\left(z_1^T, x_1^T, s_0^T \middle| \theta_0, \theta_1\right). \tag{7}$$

Для этого представим функцию правдоподобия в (7) с учетом независимости шумов и марковости процесса s_t в виде произведения вероятностей:

$$P\left(z_1^T, x_1^T, s_0^T \middle| \theta_0, \theta_1\right) = P(s_0) \prod_{t=1}^{T} \left[P\left(z_t, x_t \middle| s_t, \beta_{s_t}, \sigma_{s_t}^2\right) P\left(s_{t+1} \middle| s_t\right) \right]. \tag{8}$$

Такое представление позволяет при нахождения оценок $\hat{s}_0^T$ использовать алгоритм Витерби [Viterbi, 1967; Forney, 1973]. В соответствии с этим алгоритмом сначала последовательно во времени вычисляются функции в зависимости от бинарных значений своих аргументов:

$$\begin{gathered} \delta_0(s_1) = \max_{s_0} \left[P(s_1 | s_0) P(s_0) \right], \\ \delta_t(s_{t+1}) = \max_{s_t} \left[P(s_{t+1} | s_t) P\left(z_t, x_t \middle| s_t, \beta_{s_t}, \sigma_{s_t}^2\right) \delta_{t-1}(s_t) \right], \quad t = 1, \ldots, T-1. \end{gathered} \tag{9}$$

Одновременно с (9) в прямом времени при $t = 1, 2, \ldots, T-1$ вычисляются и запоминаются аргументы максимумов функций:

$$\begin{gathered} \Psi_0(s_1) = \arg\max_{s_0} \left[P(s_1 | s_0) P(s_0) \right], \\ \Psi_t(s_{t+1}) = \arg\max_{s_t} \left[P(s_{t+1} | s_t) P\left(z_t, x_t \middle| s_t, \beta_{s_t}, \sigma_{s_t}^2\right) \delta_{t-1}(s_t) \right]. \end{gathered} \tag{10}$$

На последнем шаге находится оценка значения s_T по формуле

$$\hat{s}_T = \arg\max_{s_T} \left[P\left(z_T, x_T \middle| s_T, \beta_{s_T}, \sigma_{s_T}^2\right) \delta_{T-1}(s_T) \right]. \tag{11}$$

Отметим, что вследствие гауссовости шумов в (4) в уравнениях (9)–(11) функции правдоподобия имеют вид

$$P\left(z_t, x_t \middle| s_t, \beta_{s_t}, \sigma_{s_t}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s_t}^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_t - x_t' \beta_{s_t}\right)^2}{2\sigma_{s_t}^2} \right), \quad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{12}$$

Далее рекуррентно в обратном времени вычисляются оценки всех значений последовательности переключений:

$$\hat{s}_t = \Psi_t\left(\hat{s}_{t+1}\right), \quad t = T-1, T-2, \ldots, 1, 0. \tag{13}$$

В соответствии с EM-алгоритмом вместо точных значений параметров модели $\theta_0 \equiv \left\{\beta_0, \sigma_0^2, p_{00}\right\}$ и $\theta_1 \equiv \left\{\beta_1, \sigma_1^2, p_{11}\right\}$, которые в реальности не известны, в формулы (9)–(13) подставляем оценки $\hat{\theta}_0 \equiv \left\{\hat{\beta}_0, \hat{\sigma}_0^2, \hat{p}_{00}\right\}$ и $\hat{\theta}_1 \equiv \left\{\hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2, \hat{p}_{11}\right\}$. Можно организовать чередование вычислений оценок параметров в рассматриваемой задаче следующим образом. На первом шаге при некоторых начальных значениях параметров $\hat{\theta}_0^{(0)}$ и $\hat{\theta}_1^{(0)}$ по формулам (9)–(13) вычисляются оценки последовательности $\hat{s}_0^{T(1)}$, оптимальные по критерию максимума апостериорной вероятности. Далее, используя $\hat{s}_0^{T(1)}$, с помощью (5), (6) находим оценки максимального правдоподобия для параметров $\hat{\theta}_0^{(1)}$ и $\hat{\theta}_1^{(1)}$, которые затем используются на втором шаге для оценивания последовательности $\hat{s}_0^{T(2)}$, и т. д. Вычисления повторяются в соответствии со схемой:

$$\hat{\theta}_0^{(k-1)}, \hat{\theta}_1^{(k-1)} \Rightarrow \hat{s}_0^{T(k)} \Rightarrow \hat{\theta}_0^{(k)}, \hat{\theta}_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{14}$$

При успешной оценке параметров в результате итераций (14) происходит рост значения функции правдоподобия (8). Отметим, что для нахождения оценок параметров регрессии $\left\{\beta_0, \sigma_0^2\right\}$, $\left\{\beta_1, \sigma_1^2\right\}$ при фиксированной реализации $\hat{s}_0^T$ метод максимального правдоподобия, в силу нормальности шумов, можно заменять методом наименьших квадратов (МНК), а при вычислении оценок $\hat{s}_0^T$ вместо функции правдоподобия (8) удобнее оперировать ее логарифмом.

4. Результаты моделирования

Для проверки работоспособности и анализа статистических характеристик полученного алгоритма в рассматриваемой задаче проводилось компьютерное моделирование ряда тестовых примеров. Моделирование позволило сделать выводы, что точность оценивания процесса s_t и параметров $\beta_0, \sigma_0^2, \beta_1, \sigma_1^2$ зависит от ряда факторов: от количества оцениваемых параметров и числа наблюдений, от того, как сильно различаются значения параметров в разных режимах работы, от отношения сигнала к шуму, которое в моделях регрессии можно связать с величиной коэффициента детерминации R^2. В целом с ростом отношения сигнала к шуму (с ростом коэффициента детерминации R^2) точность оценивания улучшается. Для достаточно больших отношений сигнала к шуму существуют такие начальные значения параметров, при которых в результате формируются оценки, близкие к истинным значениям. Обычно достаточно провести всего несколько шагов $(K = 2 \div 10)$ для завершения процесса поиска максимума логарифма функции правдоподобия (8) и успешной идентификации параметров модели. Отметим, что предположение о нормальности шума u_t не является слишком ограничительным, так как хорошие оценки параметров могут формироваться и при нарушении этого предположения.

Приведем результаты компьютерного моделирования для некоторых примеров с переключениями параметров вида

$$\begin{gathered} z_t = C_{s_t} + B_{s_t} x_t + \sigma_{s_t} u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \\ u_t \sim WN(0,1), \quad C_{s_t} = C_0\left(1 - s_t\right) + C_1 s_t, \quad B_{s_t} = B_0\left(1 - s_t\right) + B_1 s_t, \quad \sigma_{s_t}^2 = \sigma_0^2\left(1 - s_t\right) + \sigma_1^2 s_t. \end{gathered} \tag{15}$$

Генерировались независимые реализации скалярных процессов x_t, z_t и марковского процесса переключений параметров s_t с двумя состояниями — 0 и 1. Для каждой реализации по наблюдениям $y_1^T \equiv \left\{z_1^T, x_1^T\right\}$ с помощью алгоритма (9)–(14) вырабатывались оценки восьми параметров $\theta_0 \equiv \left\{C_0, B_0, \sigma_0^2, p_{00}\right\}$ и $\theta_1 \equiv \left\{C_1, B_1, \sigma_1^2, p_{11}\right\}$ и процесса s_t. Далее с помощью усреднения по 1000 независимым реализациям проводился анализ статистических характеристик вырабатываемых оценок. Точность оценки процесса переключений s_t характеризует доля совершаемых ошибок при оценивании — средняя абсолютная ошибка MAE (Mean Absolute Error):

$$MAE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\hat{s}_t - s_t\right|,$$

где $\hat{s}_t$ — вырабатываемая оценка, s_t — истинное значение процесса переключений в момент t.

В первом примере рассматривалась модель с переключениями двух значений — C_0 и C_1 — первого параметра в (15) с вероятностями переходов $p_{00} = p_{11} = 0.99$ при постоянном уровне шума $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$ и отсутствии регрессора, то есть в предположении, что $x_t = 0$. На рис. 1 представлены графики оценок средних значений величин MAE в зависимости от параметра C_1 при разных уровнях шумов и при фиксированном значении $C_0 = 1$. Видно, что точность оценок ухудшается с увеличением уровня шумов в модели σ_0^2 и σ_1^2 и с уменьшением разницы параметров C_0 и C_1.

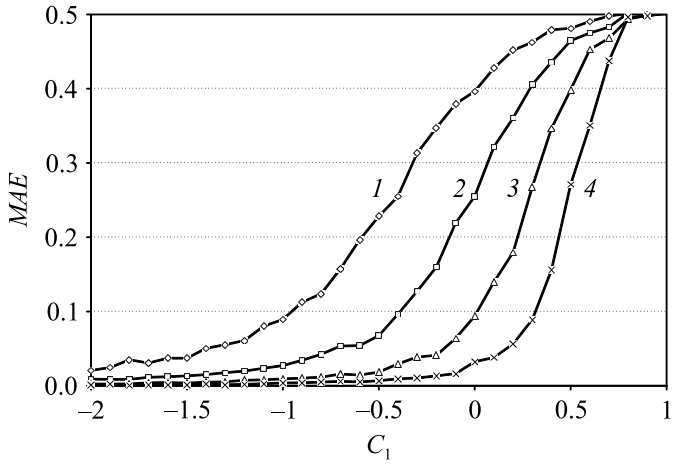

Рис. 1. Зависимость оценок ошибок MAE от величины параметра C_1:
1 — $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 4$; *2* — $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 2$; *3* — $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1$; *4* — $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 0.5$

Во втором примере рассматривался случай скачкообразных изменений коэффициента регрессии в модели (15) для двух значений — B_0 и B_1. Другие параметры выбирались равными $C_0 = C_1 = 0$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1$, $p_{00} = p_{11} = 0.99$. Процесс x_t задавался в виде белого гауссовского шума с нулевым средним значением и дисперсией Q: $x_t \sim WN(0, Q)$. Отметим, что в рассматриваемом примере коэффициенты детерминации регрессии для двух режимов работы связаны с параметрами модели следующими формулами:

$$R_i^2 = \frac{\rho_i}{1+\rho_i},\ \rho_i = \frac{B_i Q}{\sigma_i^2},\ i = 0, 1.$$

Здесь показатели ρ_0 и ρ_1 имеют смысл отношения сигнала к шуму для двух состояний в моделях регрессий (15). На рис. 2 представлены графики оценок средних значений величин MAE

в зависимости от величины параметра B_1 при разных значениях дисперсии Q и при $B_0 = 1$. Из графиков видно, что точность оценок улучшается с увеличением разницы параметров B_0 и B_1 и с увеличением дисперсии сигнала Q (при достаточно большой разнице $B_0 - B_1$).

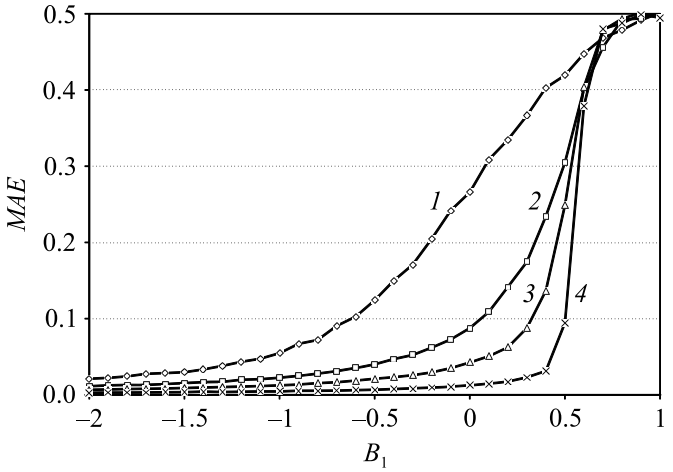

Рис. 2. Зависимость оценок ошибок *MAE* от величины параметра B_1:
1 — $Q = 0.25$; *2* — $Q = 0.5$; *3* — $Q = 1$; *4* — $Q = 4$

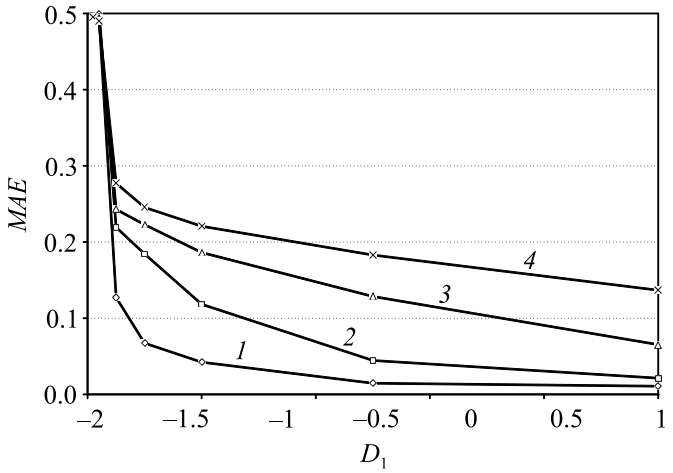

Рис. 3. Зависимость оценок ошибок *MAE* от величины $D_1 = \sigma_1^2$:
1 — $Q = 1$; *2* — $Q = 4$; *3* — $Q = 10$; *4* — $Q = 25$

В третьем примере рассматривалась модель с переключениями двух значений дисперсии шума в модели (15) — $D_0 = \sigma_0^2 = 1$ и $D_1 = \sigma_1^2$. Значения других параметров задавались равными $C_0 = C_1 = 0$, $B_0 = B_1 = 1$, $p_{00} = p_{11} = 0.99$. Процесс x_t снова генерировался в виде белого гауссовского шума с нулевым средним значением и дисперсией Q: $x_t \sim WN(0, Q)$. На рис. 3 приведены зависимости средних ошибок оценивания процесса переключений MAE от дисперсии шума $D_1 = \sigma_1^2 \geq 1$ при различных значениях параметра Q. Как видно из графиков, точность оценивания зависит от того, как сильно различаются параметры модели в двух исследуемых режимах. При $D_1 = \sigma_1^2 = 1$ величина ошибки равна $MAE = 0.5$, так как параметры одинаковы в разных режимах работы и, другими словами, вообще нет переключений. С ростом уровня шума $D_1 = \sigma_1^2$ по сравнению с $D_0 = \sigma_0^2 = 1$ ошибка оценивания MAE уменьшается и стремится

к нулю. Так как присутствие регрессора x_t в модели (15) затрудняет оценивание процесса s_t, то с ростом дисперсии регрессора Q при постоянных других параметрах точность оценивания процесса s_t снижается.

Характерной особенностью для всех трех примеров, иллюстрируемых рис. 1–3, является наличие участков на графиках относительно быстрого снижения ошибки оценивания MAE от величины 0.5 с ростом разницы параметров модели в двух режимах работы. Такая высокая начальная чувствительность к изменению параметров появляется вследствие использования алгоритма (9)–(14), который предполагает итерационную настройку параметров. При дальнейшем увеличении разницы параметров модели ошибка оценивания уменьшается к нулю уже относительно медленно.

5. Оценка параметров моделей для доходности индекса РТС

В последние десятилетия отмечается значительный рост числа работ, посвященных исследованию российского финансового рынка с применением статистического и эконометрического анализа. Этому способствуют особенности поведения цен финансовых активов, связанных с проявлением нестационарности, чередования периодов высокой и низкой волатильности, зависимости от макроэкономических переменных и т. п. Например, различные аспекты динамики российского фондового рынка в 2000–2007 гг. рассматриваются в статье [Борсуляк, 2011]. Найдено, что с точки зрения оценки рыночного риска наилучшие результаты показывает модель обобщенной условной гетероскедастичности GARCH(1,1) с остатками, распределенными по закону Стьюдента. Модели семейства GARCH широко используются для описания изменчивости волатильности во времени также во многих других работах. Например, в статье [Сидоров и др., 2013] анализируется влияние новостей и объемов торгов на волатильность российских ценных бумаг с помощью моделей GARCH. В [Аганин, 2017] выполняется сравнение различных эконометрических моделей на российских данных по качеству одношагового прогноза реализованной волатильности на один день вперед. В статьях [Бронштейн и др., 2011; Бронштейн, Зинурова, 2012] курсы российских акций и влияние на них структурных изменений в экономике исследуются с помощью копула-функций. Проблеме оценивания глобального стохастического тренда в рядах доходностей индексов финансовых рынков посвящены работы [Korhonen, Peresetsky, 2013; Дурдыев, Пересецкий, 2014], с помощью линейного фильтра Калмана выделена общая составляющая в модели с тремя фондовыми индексами Nikkei 225, MICEX, S&P 500 по ежедневным наблюдениям за период с 22.09.1997 по 06.03.2014. В статье [Федорова, Лыткина, 2012] оцениваются параметры регрессионной модели с марковскими переключениями режимов работы для зависимости между дневными изменениями величины кредитного дефолтного свопа (RUSSIA 5Y Credit Default Swaps) и изменениями индекса РТС по наблюдениям за период времени с января 2006 г. по сентябрь 2011 г. При этом переключения режимов идентифицируются со сменами стабильного и кризисного состояний экономики. В статье [Федорова, Афанасьев, 2013] модели регрессий с марковскими переключениями режимов работы применяются для исследования зависимости дневной доходности индекса ММВБ (MICEX) от дневного относительного изменения цен на нефть марки Brent и цен на золото по данным за период с 01.10.2007 по 01.12.2012.

В настоящее время модели с марковскими переключениями режимов работы широко используются при анализе экономических и финансовых временных рядов (см., например, примеры в [Hamilton, 1994; Krolzig, 1997; Maddala, Kim, 1998; Kim, Nelson, 1999; Franses, Van Dijk, 2000; Frühwirth-Schnatter, 2006]). Одними из основных изучаемых объектов в финансовой эконометрике являются модели для доходностей финансовых активов. В настоящей работе с целью проверки работоспособности алгоритма (9)–(14) оцениваются параметры модели регрессии для дневной логарифмической доходности индекса РТС (RTSI) в зависимости от аналогичной доходности индекса S&P 500.

Ряды наблюдений составили исторические значения индексов на моменты закрытия торгов соответственно Московской и Нью-Йоркской фондовых бирж в рабочие дни с 8 января 2013 г. по 5 января 2018 г. Показатели доходности вычислялись по формуле $r_t = \ln\left(S_t / S_{t-1}\right)$, где S_t и S_{t-1} — значения индексов в соседние моменты времени. В результате были образованы ряды *rRTS* и *rSP*500, содержащие по $T = 1216$ значений доходности индекса РТС (зависимая переменная) и доходности индекса S&P 500 (объясняющая переменная). Описательная статистика для данных переменных представлена в таблице 1. В таблице 1 приведены также оценки статистических характеристик для ряда доходностей *rGAZP*, составленного по ежедневным ценам закрытия акций ПАО «Газпром» (GAZP) на Московской бирже для рассматриваемого временного интервала наблюдений.

Таблица 1. Описательная статистика переменных

Переменная	Среднее значение	Максимум	Минимум	Стандартное отклонение	Коэффициент асимметрии	Коэффициент эксцесса
rRTS	–0.000211	0.132462	–0.132545	0.018435	–0.157116	7.91565
*rSP*500	0.000520	0.038291	–0.040211	0.007628	–0.496871	3.20749
rGAZP	$-6.22\cdot10^{-5}$	0.076198	–0.149587	0.015710	–0.293317	7.71796

Из оценок взаимных коэффициентов корреляции, найденных по всем наблюдаемым значениям, отличаются от нуля на 5 % уровне значимости только следующие коэффициенты:

$$\begin{gathered} corr\left(rRTS_t, rSP500_t\right) = 0.3987, \quad corr\left(rRTS_t, rGAZP_t\right) = 0.6008, \\ corr\left(rSP500_t, rGAZP_t\right) = 0.2214, \quad corr\left(rRTS_t, rSP500_{t-1}\right) = 0.1625, \\ corr\left(rGAZP_t, rSP500_{t-1}\right) = 0.0920. \end{gathered} \tag{16}$$

Отсюда видно, что наблюдаются положительная взаимная корреляция доходностей активов в один и тот же торговый день и положительная корреляция доходности индекса РТС и доходности акций «Газпрома» в торговый день t с доходностью индекса S&P 500 в предыдущий торговый день $t-1$. В индекс РТС с весом, равным примерно 15 %, входят акции «Газпрома», чем и объясняется корреляционная связь между доходностями этих активов. Статистические связи между доходностями индексов можно объяснить разницей во времени, равной 8 часам, между Москвой и Нью-Йорком. При этом торговые сессии на Московской и Нью-Йоркской фондовых биржах частично перекрываются во времени. Цена закрытия для индекса РТС и акций «Газпрома» определяется в 18:45, а для индекса S&P 500 в Нью-Йорке — в 24:00 по московскому времени. Поэтому поток новостей, влияющих на индекс S&P 500 в день *t*, оказывает воздействие на индекс РТС как в день *t*, так и в день *t* + 1, что приводит к положительной взаимной корреляции их доходностей. Как следствие корреляционных связей (16), в модели регрессии для зависимой переменной $rRTS_t$ включались регрессоры $rSP500_t$ и $rSP500_{t-1}$. Сначала с применением метода наименьших квадратов (МНК) оценивались параметры в моделях линейной регрессии без переключений вида (1):

$$rRTS_t = C + \beta\, rSP500_t + \gamma\, rSP500_{t-1} + \sigma u_t, \tag{17}$$

$$rRTS_t = C + \beta\, rSP500_t + \gamma\, rSP500_{t-1} + \delta\, rGAZP_t + \sigma u_t. \tag{18}$$

Оценки МНК параметров C, β, γ и δ и стандартного отклонения шума модели σ приведены в таблице 2 (стандартные ошибки оценок параметров в форме Ньюи–Веста даны в скобках).

Отметим, что в моделях регрессий (17) и (18) оценки константы $\hat{C}$ отличаются от нуля на 10%-ном уровне значимости, а оценки других параметров отличаются от нуля при уровнях значимости, которые ниже чем 0.01 %. При этом добавление в модели (18) дополнительного значимого фактора $rGAZP_t$ приводит по сравнению с моделью (17), помимо изменения оценок коэф-

фициентов, к уменьшению уровня шума $\hat{\sigma}$ и к увеличению коэффициента детерминации R^2. Это свидетельствует об увеличении отношения сигнала к шуму в модели (18) по сравнению с моделью (17).

Затем те же самые данные тестировались на наличие переключений режимов в соответствии с моделями вида (4):

$$rRTS_t = C_{s_t} + \beta_{s_t}\, rSP500_t + \gamma_{s_t}\, rSP500_{t-1} + \sigma_{s_t} u_t, \tag{19}$$

$$rRTS_t = C_{s_t} + \beta_{s_t}\, rSP500_t + \gamma_{s_t}\, rSP500_{t-1} + \delta_{s_t}\, rGAZP_t + \sigma_{s_t} u_t. \tag{20}$$

Оценки параметров для двух режимов работы, соответствующих значениям 0 и 1 марковского процесса переключений s_t в моделях регрессий (19) и (20), полученные с помощью алгоритма (9)–(14), приведены в таблице 3 (в скобках даны стандартные ошибки оценок параметров в форме Ньюи–Веста).

Таблица 2. Оценки параметров МНК в моделях регрессии (17) и (18) для доходности индекса РТС

Переменные и коэффициенты	Модель (17)	Модель (18)
Константа, $\hat{C}$	–0.000932 (0.000464)	–0.000677 (0.000372)
$rSP500_t$, $\hat{\beta}$	0.977054 (0.105543)	0.691640 (0.097451)
$rSP500_{t-1}$, $\hat{\gamma}$	0.423563 (0.077769)	0.297508 (0.054171)
$rGAZP_t$, $\hat{\delta}$		0.617584 (0.039230)
Стандартная ошибка регрессии, $\hat{\sigma}$	0.016615 (0.000337)	0.013690 (0.000278)
Коэффициент детерминации, R^2	0.189712	0.450374

Таблица 3. Оценки параметров для моделей регрессии (19) и (20) для доходности индекса РТС

Переменные и коэффициенты	Модель (19), $\hat{s}_t = 0$	Модель (19), $\hat{s}_t = 1$	Модель (20), $\hat{s}_t = 0$	Модель (20), $\hat{s}_t = 1$
Константа, $\hat{C}_{s_t}$	–0.000764 (0.000415)	–0.000845 (0.000908)	–0.000626 (0.000304)	–0.000852 (0.001358)
$rSP500_t$, $\hat{\beta}_{s_t}$	0.728393 (0.073190)	1.136220 (0.164459)	0.445091 (0.047034)	1.486308 (0.275151)
$rSP500_{t-1}$, $\hat{\gamma}_{s_t}$	0.416175 (0.068942)	0.410237 (0.121902)	0.265726 (0.044827)	0.472347 (0.158059)
$rGAZP_t$, $\hat{\delta}_{s_t}$			0.659352 (0.035723)	0.478304 (0.097749)
Стандартная ошибка регрессии, $\hat{\sigma}_{s_t}$	0.010968 (0.000287)	0.022538 (0.000725)	0.009473 (0.000214)	0.023115 (0.001059)
Вероятность, $\hat{p}_{s_t s_t}$	0.997264	0.995868	0.997951	0.991632
Коэффициент детерминации, R^2	0.168289	0.205896	0.592911	0.366073
Количество наблюдений	731	483	976	238

Все оценки для параметров регрессий (19), (20) получились положительными при уровне значимости меньшем, чем 0.1 %, за исключением оценки константы $\hat{C}$, которая при 10%-ном уровне значимости отрицательна для режима $\hat{s}_t = 0$ и не отличается от нуля для режима $\hat{s}_t = 1$. Как видно из сравнения результатов в таблице 3 с оценками МНК в таблице 2, чувствительны-

ми к учету скачкообразных изменений режимов работы оказались оценки коэффициента β перед $rSP500_t$ и стандартной ошибки регрессии σ как для модели (19), так и для модели (20).

Для модели регрессии (19) в качестве начальных условий для параметров в итеративной процедуре (14) для модели 3 выбирались значения, близкие к оценкам МНК из таблицы 2:

$$\hat{C}_0 = \hat{C}_1 = 0, \quad \hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_1 = 1, \quad \hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_1 = 0.4, \quad \hat{\sigma}_0 = 0.01, \quad \hat{\sigma}_1 = 0.02, \quad \hat{p}_{00} = \hat{p}_{11} = 0.9.$$

Для модели (20) сходимость к конечным значениям параметров, представленным в таблице 3, возникает практически для любых начальных значений параметров. На рис. 4 показан график изменения логарифма функции правдоподобия (8) для модели регрессии (20) в зависимости от числа шагов K в итеративной процедуре вычислений (14) при следующих начальных условиях:

$$\hat{C}_0 = \hat{C}_1 = \hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_1 = \hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_1 = \hat{\delta}_0 = \hat{\delta}_1 = 0, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_1 = 0.1, \quad \hat{p}_{00} = \hat{p}_{11} = 0.9.$$

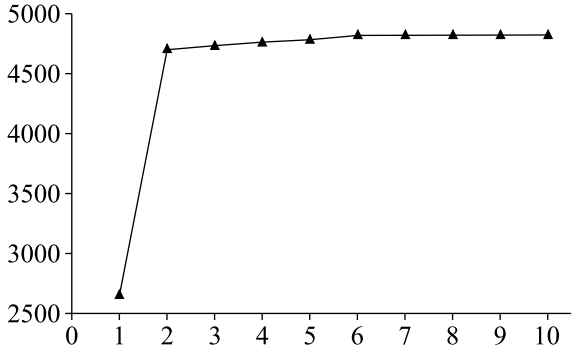

Рис. 4. Логарифм функции правдоподобия (8) в зависимости от числа итераций

В таблице 4 представлены оценки параметров, полученных с помощью инструментария Markov Switching Regression эконометрического пакета Eviews, для тех же наблюдаемых временных рядов и моделей регрессии (19), (20). В скобках снова даны стандартные ошибки оценок параметров.

Можно видеть, что значения коэффициентов и стандартных ошибок в таблице 4 в целом близки к соответствующим значениям в таблице 3. Тестируя оценки параметров в таблице 4 на равенство значениям из таблицы 3, на основе критерия Фишера можно сделать вывод, что гипотеза о равенстве коэффициентов для моделей (19) не отвергается на 10%-ном уровне значимости, если не учитывать оценки переходных вероятностей $\hat{p}_{00}$ и $\hat{p}_{11}$:

$$F\text{-}statistic = 1.673416, \quad P\text{-}value = 1 - F\left(1.673416;\ 8;\ 1205\right) = 0.1005.$$

Если же учитывать оценки переходных вероятностей $\hat{p}_{00}$ и $\hat{p}_{11}$, то гипотеза о равенстве коэффициентов для моделей регрессии (19) в таблицах 3 и 4 отвергается при уровне значимости меньшем, чем 0.01 %:

$$F\text{-}statistic = 3.807045, \quad P\text{-}value = 1 - F\left(3.807045;\ 10;\ 1205\right) = 4.44 \cdot 10^{-5}.$$

Что касается оценок параметров для модели регрессии (20), то гипотеза об идентичности оценок в таблице 4 с результатами алгоритма (9)–(14), представленными в таблице 3, не отвергается практически при любом уровне значимости, даже с учетом оценок переходных вероятностей $\hat{p}_{00}$ и $\hat{p}_{11}$:

$$F\text{-}statistic = 0.013238, \quad P\text{-}value = 1 - F\left(0.013238;\ 12;\ 1203\right) = 1 - 3.34 \cdot 10^{-10}.$$

Таблица 4. Оценки параметров для моделей (19) и (20) в среде Eviews

Переменные и коэффициенты	Модель (19), $\hat{s}_t = 0$	Модель (19), $\hat{s}_t = 1$	Модель (20), $\hat{s}_t = 0$	Модель (20), $\hat{s}_t = 1$
Константа, $\hat{C}_{s_t}$	–0.001044 (0.000408)	–0.000202 (0.000418)	–0.000648 (0.000321)	–0.000666 (0.003599)
$rSP500_t$, $\hat{\beta}_{s_t}$	0.744156 (0.059266)	1.477226 (0.233943)	0.446617 (0.042647)	1.463357 (0.190675)
$rSP500_{t-1}$, $\hat{\gamma}_{s_t}$	0.417453 (0.060716)	0.393202 (0.192795)	0.265179 (0.042353)	0.451189 (0.182006)
$rGAZP_t$, $\hat{\delta}_{s_t}$			0.660785 (0.021302)	0.487472 (0.084482)
Стандартная ошибка регрессии, $\hat{\sigma}_{s_t}$	0.012113 (0.000471)	0.027462 (0.001917)	0.009467 (0.000228)	0.022842 (0.001080)
Вероятность, $\hat{p}_{s_t s_t}$	0.990395	0.960061	0.997919	0.990253

Таким образом, полученные результаты подтверждают работоспособность исследуемого алгоритма оценивания (9)–(14). Для модели регрессии (19) разница в оценках параметров, получаемых с помощью алгоритма (9)–(14) и с помощью инструментов пакета Eviews, объяснима невысоким отношением сигнала к шуму в этой модели (небольшим значением коэффициента детерминации R^2). С учетом значимого регрессора $rGAZP_t$ увеличивается сумма квадратов объясненных переменных в модели (20) по сравнению с моделью (19). Это приводит к увеличению коэффициента детерминации R^2, при этом также снижается уровень шумов $\hat{\sigma}$ для каждого режима работы. Как видно из результатов, представленных в таблицах 3 и 4, с ростом величины R^2 отличия в формируемых оценках уменьшаются: для модели регрессии (20) результаты оценивания параметров с помощью алгоритма (9)–(14) практически совпадают с результатами оценивания в среде Eviews. При этом алгоритм (9)–(14) более прост в вычислениях, так как не требует нахождения апостериорных вероятностей состояний процесса s_t (см., например, уравнения алгоритмов для оценок состояний марковских процессов с переключениями режимов в [Hamilton, 1994; Kim, 1994; Kim, Nelson, 1999]).

На рис. 5 *а*, *б* представлены графики оценок $\hat{s}_t$ (толстые линии на рисунках), полученных с помощью алгоритма (9)–(14), и апостериорных вероятностей $P\left(s_t = 1 \middle| F_T\right)$ состояний $s_t = 1$ процесса переключений, вычисленных в программе Eviews, для моделей регрессии (19) и (20). Здесь F_T обозначает всю имеющуюся информацию на интервале наблюдения при $t = 1, 2, \ldots, T$. Можно отметить, что есть разница вырабатываемых оценок на рис. 5, *а* на интервале времени с 02.09.2014 по 22.06.2016, объяснимая влиянием шума и небольшим уровнем объясняющих переменных в модели (19). На рис. 5, *б* разница в оценках для двух сравниваемых методов незначительна, так как более высокое отношение сигнала к шуму в модели регрессии (20) по сравнению моделью (19) позволяет достаточно точно диагностировать переключения в состояниях процесса s_t. В итоге оценка $\hat{s}_t = 1$ формируется для временных интервалов с 30.10.2014 по 04.06.2015 и с 15.01.2016 по 14.05.2016. На рис. 6, *а* показан график значений индекса РТС за 5 лет, с 08.01.2013 по 05.01.2018. На рис. 6, *б* показан график суточной доходности индекса РТС для того же временного промежутка. Пунктиром на рисунках обозначены моменты переключения оценок $\hat{s}_t$ для регрессии, описываемой уравнением (20). Видно, что режимы, в которых формируется оценка $\hat{s}_t = 1$, совпадают с периодами относительно быстрого падения и быстрого роста величины индекса РТС и повышения волатильности.

Отметим, что выявленные даты переключений режимов, скорее всего, не связаны с конкретными событиями именно в эти дни, а просто отражают нестационарное поведение исследуемых переменных, которое можно описывать моделями со скачкообразно изменяющимися

параметрами. В настоящей статье не исследовались причины этих изменений, и оценка параметров моделей доходности индекса РТС была проведена с целью проверки работоспособности алгоритма (9)–(14). Моделирование показало, что методы оценивания параметров регрессий с марковскими переключениями режимов улавливают имеющиеся закономерности и могут быть полезны при изучении изменений доходности индекса РТС во времени.

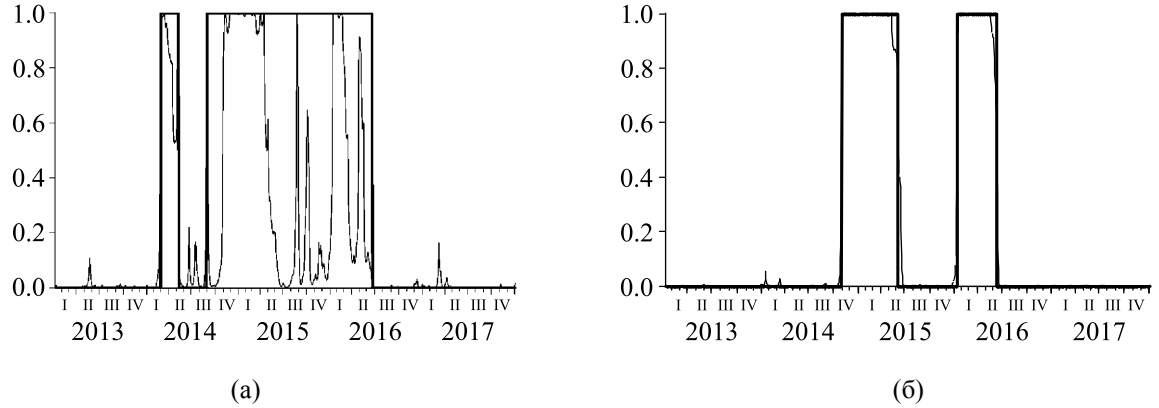

Рис. 5. Оценки $\hat{s}_t$ (толстые линии) и апостериорные вероятности значений $P\left(s_t = 1 \middle| F_T\right)$ процесса переключений s_t: (а) в модели (19); (б) в модели (20)

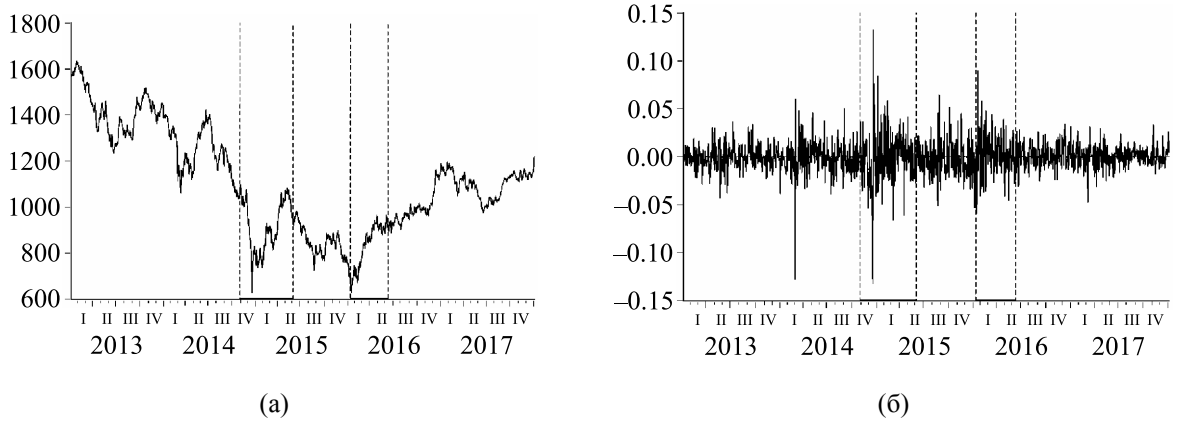

Рис. 6. Величина (а) и доходность (б) индекса РТС с 2013 г по 2018 г. Пунктиром отмечены моменты переключений режимов, полученные в модели регрессии (20)

6. Заключение

В настоящей работе построен алгоритм оценивания параметров моделей временных рядов со случайными переключениями двух режимов работы, основанный на итерационной процедуре, в результате которой происходит уточнение оценок. Учет скачкообразных изменений параметров позволяет получить более точное представление о структуре линейной статистической зависимости наблюдаемых данных. Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрен пример оценивания параметров в моделях регрессии для доходности индекса РТС. Выявлены периоды (с 30.10.2014 по 04.06.2015 и с 15.01.206 по 14.05.2016), в начале и в конце которых происходят скачкообразные переключения параметров моделей регрессии доходности индекса РТС. Полученные результаты позволяют рекомендовать предлагаемый алгоритм совместно с другими доступными методами для оценивания параметров моделей регрессии с марковскими переключениями режимов работы.

Список литературы (References)

Аганин А. Д. Сравнение GARCH и HAR-RV моделей для прогноза реализованной волатильности на российском рынке // Прикладная эконометрика. — 2017. — № 4 (48). — С. 63–84.

Aganin A. D. Sravnenie GARCH i HAR-RV modelei dlya prognoza realizovannoi volatil'nosti na rossiiskom rynke [Forecast comparison of volatility models on Russian stock market] // Applied Econometrics. — 2017. — Vol. 48, No. 4. — P. 63–84 (in Russian).

Борусяк К. К. Нелинейная динамика российского фондового рынка в задачах риск-менеджмента // Журнал новой экономической ассоциации. — 2011. — № 11. — С. 85–106.

Borusyak K. K. Nelineinaya dinamika rossiiskogo fondovogo rynka v zadachakh risk-menedzhmenta [Nonlinear dynamics of the Russian stock market in problems of risk management] // Journal of the New Economic Association. — 2011. — No. 11. — P. 85–106 (in Russian).

Бронштейн Е. М., Зинурова А. Р. Копулы специального вида и их применение при анализе состояния финансового рынка // Прикладная эконометрика. — 2012. — № 3 (27). — С. 109–114.

Bronshtein E. M., Zinurova A. R. Kopuly spetsial'nogo vida i ikh primenenie pri analize sostoyaniya finansovogo rynka [Copulas of a special form and their application to the analysis of the financial market] // Applied Econometrics. — 2012. — Vol. 27, No. 3. — P. 109–114 (in Russian).

Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И., Герасимова А. С., Дубинская К. Г. Оценка взаимосвязей временных рядов курсов акций с помощью копула-функций // Прикладная эконометрика. — 2011. — № 2 (22). — С. 22–31.

Bronshtein E. M., Prokudina E. I., Gerasimova A. S., Dubinskaya K. G. Otsenka vzaimosvyazei vremennykh ryadov kursov aktsii s pomoshch'yu kopula-funktsii [Estimation of the interdependence of time series of stocks prices based on copula] // Applied Econometrics. — 2011. — Vol. 22, No. 2. — P. 22–31 (in Russian).

Дурдыев Р. И., Пересецкий А. А. Автокорреляция в глобальном стохастическом тренде // Прикладная эконометрика. — 2014. — № 3 (35). — С. 39–58.

Durdyev R. I., Peresetsky A. A. Avtokorrelyatsiya v global'nom stokhasticheskom trende [Autocorrelation in the global stochastic trend] // Applied Econometrics. — 2014. — Vol. 35, No. 3. — P. 39–58 (in Russian).

Сидоров С. П., Дате П., Балаш В. А. Использование данных новостной аналитики в GARCH моделях // Прикладная эконометрика. — 2013. — № 1 (29). — С. 82–96.

Sidorov S. P., Date P., Balash V. A. Ispol'zovanie dannykh novostnoi analitiki v GARCH modelyakh [Using news analytics data in GARCH models] // Applied Econometrics. — 2013. — Vol. 29, No. 1. — P. 82–96 (in Russian).

Федорова Е. А., Лыткина О. А. Прогноз кризисного состояния на фондовом рынке Российской Федерации с помощью модели Маркова // Финансы и кредит. — 2012. — № 13 (493). — С. 48–53.

Fedorova E. A., Lytkina O. A. Prognoz krizisnogo sostoyaniya na fondovom rynke Rossiiskoi Federatsii s pomoshch'yu modeli Markova [Forecast of a crisis state in stock market of the Russian Federation using Markov's model] // Finance and Credit. — 2012. — Vol. 18, Iss. 13 (493). — P. 48–53 (in Russian).

Федорова Е. А., Афанасьев Д. О. Определение степени влияния цен нефти и золота на индекс ММВБ и ее структурных сдвигов с применением модели Markov-Switching Autoregressive Model (MS-ARX) // Финансы и кредит. — 2013. — № 17 (545). — С. 2–11.

Fedorova E. A., Afanasyev D. O. Opredelenie stepeni vliyaniya tsen nefti i zolota na indeks MMVB i ee strukturnykh sdvigov s primeneniem modeli Markov-Switching Autoregressive Model (MS-ARX) [Determining the degree of influence of prices of oil and gold on the MICEX and its structural changes with use of model Markov-switching autoregressive model (MS-ARX)] // Finance and Credit. — 2013. — Vol. 19, Iss. 17 (545). — P. 2–11 (in Russian).

Dempster A. P., Laird N. M., Rubin D. B. Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). — 1977. — Vol. 39, No. 1. — P. 1–38.

Forney G. D. Jr. The Viterbi Algorithm // Proc. of the IEEE. — 1973. — Vol. 61, No. 3. — P. 268–278.

Franses P. H., van Dijk D. Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance. — Cambridge University Press, 2000.

Frühwirth-Schnatter S. Finite Mixture and Markov Switching Models. — Springer Science & Business Media, 2006.

Goldfeld S. M., Quandt R. E. A Markov Model for Switching Regressions // Journal of Econometrics. — 1973. — Vol. 1, Issue 1. — P. 3–16.

Hamilton J. D. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle // Econometrica. — 1989. — Vol. 57, No. 2. — P. 357–384.

Hamilton J. D. Time series analysis. — Princeton, N.J. Princeton University Press, 1994.

Kim C.-J. Dynamic Linear Models with Markov-Switching // Journal of Econometrics. — 1994. — Vol. 60, Issue 1–2. — P. 1–22.

Kim C. - J., Nelson C. R. State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications. — MIT Press, 1999.

Korhonen I., Peresetsky A. Extracting global stochastic trend from non-synchronous data. — Bank of Finland, BOFIT Discussion Papers. No. 15/2013, 2013.

Krolzig H.-M. Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis. — Berlin: Springer-Verlag. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 454, 1997.

Maddala G. S., Kim I.-M. Unit Roots, Cointegration, and Structural Change. — Cambridge University Press, 1998.

Viterbi A. J. Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm // IEEE Trans. Inf. Theory. — April 1967. — Vol. IT-13, No. 2 — P. 260–269.