

УДК 519.6; 539.3

Задачи устойчивости тонких упругих оболочек

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут^а

Архитектурно-строительная академия Самарского государственного технического университета,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail:^а neustadt99@mail.ru

Получено 11.05.2018, после доработки — 27.08.2018.

Принято к публикации 11.09.2018.

В работе рассматриваются различные математические постановки, относящиеся к задаче упругой устойчивости оболочек в связи с обнаруженными в последнее время несоответствиями между экспериментальными данными и предсказаниями, основанными на теории пологих оболочек. Отмечается, что противоречия возникли в связи с появлением новых алгоритмов, позволивших уточнить вычисленные в двадцатом веке так называемые нижние критические напряжения, которые приняты техническими стандартами в качестве критерия глобальной потери устойчивости тонких пологих оболочек. Новые вычисления часто оценивают нижнее критическое напряжение близким к нулю. Следовательно, нижнее критическое напряжение не может приниматься в качестве расчетного значения для анализа потери устойчивости тонкостенной конструкции, а уравнения теории пологих оболочек должны быть заменены другими дифференциальными уравнениями. В новой теории следует также определить критерий потери устойчивости, обеспечивающий совпадение вычислений и экспериментов.

В работе показано, что в рамках динамической нелинейной трехмерной теории упругости противоречие с новыми экспериментами может быть устранено. В качестве критерия глобальной потери устойчивости следует принять напряжение, при котором имеет место бифуркация динамических мод. Нелинейный характер исходных уравнений порождает уединенные (солитонные) волны, которым соответствуют негладкие перемещения оболочек (патерны, вмятины). Существенно, что влияния солитонов проявляются на всех этапах нагружения и резко возрастают, приближаясь к бифуркации. Солитонные решения иллюстрируются на примере тонкой цилиндрической безмоментной оболочки, трехмерный объем которой моделируется двумерной поверхностью с заданной толщиной. В статье отмечается, что волны, формирующие патерны, могут быть обнаружены (а их амплитуды определены) путем акустических или электромагнитных измерений.

Таким образом, появляется техническая возможность снизить риск разрушения оболочек, если проводить мониторинг формы поверхности современными акустическими средствами. Статья завершается формулировкой математических проблем, требующих решения для надежной численной оценки критерия потери устойчивости тонких упругих оболочек.

Ключевые слова: упругие оболочки, потеря устойчивости, трехмерная нелинейная теория упругости, вмятины на поверхности, акустические приборы

UDC: 519.6; 539.3

Buckling problems of thin elastic shells

V. A. Grachev, Yu. S. Neustadt^a

Academy of Building and Architecture
Samara State Technical University,
194 Molodogvardeiskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail:^a neustadt99@mail.ru

Received 11.05.2018, after completion — 27.08.2018.

Accepted for publication 11.09.2018.

The article covers several mathematical problems relating to elastic stability of thin shells in view of inconsistencies that have been recently identified between the experimental data and the predictions based on the shallow-shell theory. It is highlighted that the contradictions were caused by new algorithms that enabled updating the values of the so called “low critical stresses” calculated in the 20th century and adopted as a buckling criterion for thin shallow shells by technical standards. The new calculations often find the low critical stress close to zero. Therefore, the low critical stress cannot be used as a safety factor for the buckling analysis of the thin-walled structure, and the equations of the shallow-shell theory need to be replaced with other differential equations. The new theory also requires a buckling criterion ensuring the match between calculations and experimental data.

The article demonstrates that the contradiction with the new experiments can be resolved within the dynamic nonlinear three-dimensional theory of elasticity. The stress when bifurcation of dynamic modes occurs shall be taken as a buckling criterion. The nonlinear form of original equations causes solitary (solitonic) waves that match non-smooth displacements (patterns, dents) of the shells. It is essential that the solitons make an impact at all stages of loading and significantly increase closer to bifurcation. The solitonic solutions are illustrated based on the thin cylindrical momentless shell when its three-dimensional volume is simulated with two-dimensional surface of the set thickness. It is noted that the pattern-generating waves can be detected (and their amplitudes can be identified) with acoustic or electromagnetic devices.

Thus, it is technically possible to reduce the risk of failure of the thin shells by monitoring the shape of the surface with acoustic devices. The article concludes with a setting of the mathematical problems requiring the solution for the reliable numerical assessment of the buckling criterion for thin elastic shells.

Keywords: elastic shells, buckling, three-dimensional non-linear theory of elasticity, patterns and dents, acoustic devices

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 6, pp. 775–787 (Russian).

1. Введение

В последние годы вновь стали актуальными задачи устойчивости тонких упругих оболочек [Hutchinson, Thompson, 2017; Marthelot et al., 2017]. Основной причиной такого интереса послужили новые результаты натурных экспериментов с оболочками, уточненные вычисления критических нагрузок при статических нагружениях и появившиеся при этом противоречия. Возникшая ситуация на первый взгляд не соответствует техническим достижениям двадцатого века. Тонкие оболочки находят применение в инженерных конструкциях многих отраслей: от космической до строительства. И в каждой из технических областей разработаны надежные стандарты, обеспечивающие необходимые запасы устойчивости. Основой стандартов является статическая нелинейная теория тонких пологих оболочек, подтвержденная экспериментально. Развитие техники последних десятилетий выразилось в том, что в оболочках стали использоваться более прочные материалы, и толщина оболочек уменьшилась. В то же время совершенствование математической теории и вычислительной техники позволило уточнить результаты, найденные ранее по теории пологих оболочек. В итоге оказалось, что эксперименты и вычисления не совпадают. Становится очевидным, что появилась новая физико-математическая проблема, требующая своего решения. Главная трудность связана с выбором математической постановки задачи устойчивости равновесия нагруженной оболочки, которая бы объясняла все накопившиеся экспериментальные факты. Дело в том, что классическая постановка задачи устойчивости состоит в том, чтобы найти величину нагрузки, при которой малое по норме отклонение от равновесия вызывает движение, характеризующееся в течение любого времени малой нормой. При этом выбор пространств функций (движений в четырехмерном пространстве-времени) и соответствующих норм должен быть точно определен. В такой постановке задача является математически очень сложной, поэтому прибегают к упрощенным моделям, которые не всегда эквиваленты исходной задаче. Так, динамическая задача устойчивости оболочек заменяется статической проблемой нахождения минимальной нагрузки, при которой нарушается единственность решения в одной из двумерных моделей оболочек. До последнего времени успешно использовалась нелинейная модель теории пологих оболочек [Karman, Tsien, 1941]. Эта модель предсказывала, что критическая нагрузка лежит между двумя числами, называемыми верхним и нижним критическими значениями. Численные результаты подтверждались многочисленными экспериментами. Существенно, что вблизи нижнего критического значения потеря устойчивости происходит при значительных перемещениях (часто превосходящих толщину оболочки) и сопровождается резким изменением формы — «хлопком». Для того чтобы оболочка «хлопнула», необходимо преодолеть определенный энергетический барьер. Предполагалось, что энергетический барьер преодолевается за счет несовершенств формы оболочки (первоначальных дефектов) и случайных воздействий во время нагружения. Следует сказать, что вычисления нижних критических нагрузок производилось ранее приближенными методами, без точных гарантий погрешности. Поэтому появляющиеся в литературе сообщения о малой величине критических нагрузок не считались надежными. Более того, не нашел отклика в инженерной практике математически строгий результат [Срубщик, 1972; Ворович, 1980] о том, что для шарнирно опирающегося сферического сегмента, нагруженного нормальным гидростатическим давлением, нижняя критическая нагрузка равна нулю. Видимо, для применяемых в 1970–1980-е годы оболочек энергетический барьер, который следовало преодолеть для реализации нижнего критического значения, был слишком велик. Но в последнее десятилетие оболочки стали делать из более прочных материалов, толщина конструкций уменьшилась, появились более точные вычислительные алгоритмы для анализа уравнений пологих оболочек. В сочетании с новой компьютерной техникой [Hutchinson, 2016] был численно подтвержден результат о нулевой нижней критической нагрузке для сферического сегмента. Эксперименты, однако, свидетельствуют о отличии нижнего критического значения от нуля. Следовательно, экспериментальные данные и вычисления не могут быть согласованы в рамках предположений теории пологих оболочек. В то же время опыты не противоречат основным теоремам трехмерной статической

теории упругости [Truesdell, 1977]. Поэтому возникает потребность обратиться к исходным положениям расчета устойчивости тонких оболочек и наметить пути их совершенствования в рамках нелинейной теории упругости.

2. Постановка задачи устойчивости пологих оболочек при статической нагрузке

Первые результаты по устойчивости упругих оболочек получены в начале 20 века [Тимошенко, 2002; Zolly, 1915]. Основные предположения, которые положены в основу теории, таковы:

- 1) толщина оболочки h много меньше минимального габарита l , то есть $\varepsilon = h/l \ll 1$;
- 2) справедлива гипотеза прямых нормалей Кирхгофа–Лява: точки, лежащие на нормали к срединной поверхности оболочки, после приложения нагрузки оказываются лежащими на нормали к срединной поверхности деформированной оболочки;
- 3) оболочка пологая, $h/R \approx \varepsilon^2$, здесь R — гауссова кривизна;
- 4) перемещения w_k от нагрузки p_k малы по сравнению с толщиной оболочки h или $\|w_k\|/h < 1$.

В этих условиях задача устойчивости оболочек формулируется следующим образом: для заданного вектора нагрузки $p_k(p_1, p_2, s)$ (и соответствующего ему перемещения w_k) надо найти положительное число q_{cr} , чтобы под постоянной нагрузкой $p_{kcr} = q_{cr} p_k$ существовали два различных вектора смещения $w_{kcr} = q_{cr} w_k$ и близкий к нему $w'_{cr} = w_{kcr} + u_k$. Говоря иначе, при нагрузке $p_{kcr} = q_{cr} p_k$ возникает бифуркация: наряду с $w_{kcr} = q_{cr} w_k$ появляется близкая траектория $w'_{cr} = w_{kcr} + u_k$. В этих условиях p_{kcr} называется критической нагрузкой, q_{cr} — коэффициентом запаса общей устойчивости, а существование бифуркации — принципом Эйлера устойчивости при статической нагрузке. Было показано, что параметр q_{cr} может быть в первом приближении найден из линеаризованной задачи на собственные значения [Вольмир, 1963]:

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= \nabla_k^2 \varphi + q_{cr} \Pi, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi &= -\nabla_k^2 w, \\ \Pi &= -h \left(p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Компонента перемещения оболочки u_i по направлению нормали обозначена как w , а буква φ — функция внутренних усилий в касательной плоскости оболочки. Система (1) записана в координатах плоскости $x_1 O x_2$, на которую проектируется поверхность оболочки, E — модуль Юнга, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, ν — число Пуассона, ∇^2 — оператор Лапласа. Функции R_1 , R_2 — радиусы главных кривизн,

$$\nabla_k^2 = \frac{\partial^2}{R_1 \partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{R_2 \partial x_2^2}.$$

Существует минимальное значение q_{cr} , при котором система (1) с соответствующими граничными условиями имеет нетривиальные решения. Эти решения представляет собой собственные функции с очень малой длиной волны $\lambda = \sqrt{Rh} = \varepsilon R$. Например, для цилиндрической оболочки, нагруженной осевым давлением, возможные перемещения показаны на рис. 1.

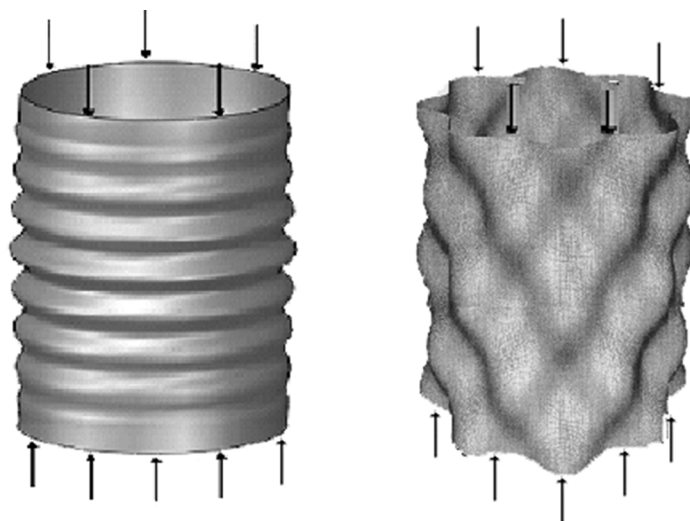


Рис. 1. Возможные формы потери устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии, отвечающие линеаризированной системе уравнений (1)

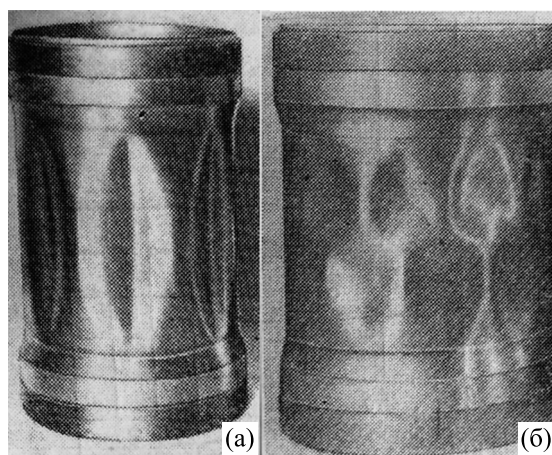


Рис. 2. Результаты испытаний тонких оболочек на (а) гидростатическое давление и (б) осевое сжатие (Вольмир, 1963)

В 1930 годах были произведены эксперименты, которые показали, что для реальных оболочек величина коэффициента запаса общей устойчивости q_{cr} значительно ниже полученных ранее теоретических значений, найденных по линеаризованной теории. Перемещения в момент потери устойчивости представляют собой солитонные функции, обнаруженные ранее при изучении нелинейных волн [Уизем, 1977] (см. рис. 2).

Чтобы объяснить эти факты, Карман и Тзян отказались от четвертого предположения теории пологих оболочек и рассмотрели большие прогибы w , возникающие от нагрузок q , перпендикулярных к поверхности. Вместо системы (1) появилась нелинейная система (2).

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w &= \nabla_k^2 \Phi + L(w, \Phi) + q, \\ \nabla^4 \Phi &= h(-\nabla_k^2 w + L(w, w)), \\ L(w, \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Было установлено, что при некоторой нагрузке q_{cr1} наряду с перемещением w существует и другая, но очень удаленная от нее форма w_0 . Происходит «хлопок» из одной формы в другую,

сопровождающийся значительными перемещениями. Нагрузка q_{crl} долгие годы принималась в качестве расчетной для проектирования конструкций.

Теоретические исследования 1970–1980 годов показали, однако, что уравнения (2) могут приводить к низким значениям q_{crl} . Так, в статье [Срубщик, 1972] и книге [Ворович, 1980] было доказано, что в задаче о нагружении сферической оболочки гидростатической нагрузкой вывернутый шарнирно опертый сегмент имеет две формы равновесия, когда $q_{crl} = 0$. В работе [Hutchinson, 2016] этот результат подтвержден численно. И хотя для того, чтобы перевести оболочку из одного состояния в другое, следует преодолеть значительный энергетический барьер, очевидно другое: нельзя принимать q_{crl} , найденное по (2), в качестве расчетного значения при проектировании конструкций. В самом деле, равенство $q_{crl} = 0$ противоречит основным теоремам нелинейной теории упругости [Truesdell, 1977; Сьярле, 1992]. Еще в 1950 годы было доказано, что при достаточно малых нагрузках q имеется только единственное решение. Следовательно, в трехмерной нелинейной теории упругости $q_{crl} > 0$. Далее, из общих соображений подобия и размерности в механике [Седов, 1977] для достаточно тонких оболочек имеет место разложение в ряд Тэйлора:

$$q_{crl} = E(c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots + c_n\varepsilon^n + \dots). \quad (3)$$

Коэффициенты ряда (3) не все равны нулю. Итак, получаем, что линеаризованная система (1) сохраняет лишь первый коэффициент, а в системе (2) все коэффициенты обращаются в нуль. В обоих случаях теоретические результаты не совпадают с экспериментальными данными, и постановка задачи упругой устойчивости оболочек требует корректировки. Корректировка должна быть произведена на основе согласующейся с опытом нелинейной трехмерной теории упругости. Следует отметить, определение параметра q_{crl} в трехмерной постановке является столь сложной задачей, что до последнего времени надежные вычисления для оболочек не выполнялись. Предложено несколько упрощенных процедур, использующих двумерные модели, отличные от теории пологих оболочек. Модель оболочек [Погорелов, 1986] основана на том, что большие деформации очень тонких оболочек близки к негладким изгибаниям поверхностей. Показано, что для выпуклых оболочек удастся согласовать численные и экспериментальные факты. В работе [Hutchinson, 2016] совпадение результатов экспериментов и вычислений (применительно к сферическим сегментам) достигнуто на основе двумерной теории оболочек средней кривизны. Применение двумерных теорий ограничивается узкими классами оболочек, и это обстоятельство заставляет обратиться к трехмерной постановке задачи. Попутно нужно объяснить появление и развитие больших пятен на поверхности оболочек — предшественников потери глобальной устойчивости.

3. Возможности динамического подхода

Возникает вопрос: можно ли найти в рамках трехмерной теории упругости нелинейный аналог системы (1), который объяснит волнообразование рис. 2 и снижение запаса устойчивости «без преодоления энергетического барьера»? Частично ответ содержится в отказе от статического принципа Эйлера и переходе к анализу динамического поведения. Если дополнить первое уравнение системы (1) динамическим членом:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w &= \nabla_k^2 \varphi + q_{cr} \Pi, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi &= -\nabla_k^2 w, \\ \Pi &= -h \left(p_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + p_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

то можно искать в измененной системе (4) решения вида

$$\varphi(x, t) = A_1 e^{i\chi x - i\omega t}, \quad w(x, t) = A_2 e^{i\chi x - i\omega t}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4), сократим в образовавшейся системе множитель $e^{i\chi x - i\omega t}$, проинтегрируем оба уравнения по площади оболочки. Условием существования нетривиальных решений A_1 и A_2 является обращение в нуль детерминанта полученной линейной системы $G(\chi, \omega)$. Равенство

$$G(\chi, \omega) = 0 \quad (6)$$

принято называть дисперсионным соотношением.

Вследствие линейности системы (4) найденное из (6) число q_{cr}^* , отделяющее устойчивые колебания от неустойчивых (резонансных), совпадает с q_{cr} , вычисленным по критерию статической устойчивости. Параметр q_{cr} может быть истолкован как число, при котором происходит резонанс собственных колебаний оболочки и колебаний, вызванных движением внутренних напряжений. Если воспользоваться подстановкой (5) в нелинейной задаче трехмерной теории упругости применительно к оболочкам, то получаются сложные уравнения, численный анализ которых невозможен даже для самых современных вычислительных машин. Но для некоторых практически интересных задач возможно сведение трехмерных проблем к двумерным. Простейшей задачей этого класса является оценка запаса устойчивости цилиндрической оболочки в условиях безмоментного, равномерного (одинакового во всех точках) напряженного состояния. Такая задача может быть изучена методами теории возмущений. Приведем результаты этого анализа, основываясь на работах [Киселев, Долгих, 2013, 2014]. Рассмотрим цилиндрические оболочки, нагруженные равномерным давлением вдоль образующих. Введем цилиндрические координаты: y^1 — ось цилиндра, y^3 — радиальная координата, $y^2 = R\theta$ — дуговая координата. В случае симметричной деформации отличен от нуля только вектор $v^3(y^1, t)$. Лагранжев тензор деформации имеет вид

$$E_{km} = \frac{1}{2}(\nabla_k v_m + \nabla_m v_k + \nabla_k v_s \nabla_m v^s), \quad \nabla_k v^s = \frac{\partial v^s}{\partial y^k} + \Gamma_{kp}^s v^p. \quad (7)$$

Вторая формула в (7) обозначает ковариантную производную вектора. Инварианты тензора деформаций запишем в форме

$$I_2 = E_m^p E_p^m, \quad I_3 = E_m^p E_p^r E_r^m. \quad (8)$$

Выражение для упругой внутренней энергии принимается в виде [Сьярле, 1992; Steigmann, 2013]

$$U = \int_V \psi \sqrt{g} dy^1 dy^2 dy^3, \quad \psi = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 + \dots \quad (9)$$

В формуле (9) A, B, C, λ, μ — упругие постоянные, g — детерминант метрического тензора.

Уравнения динамики оболочки с плотностью ρ таковы:

$$-\rho \frac{\partial^2 v^m}{\partial t^2} + \nabla_s P^{sm} = 0. \quad (10)$$

Тензор Кирхгофа–Пиола вычисляется по формуле

$$P^{sm} = \frac{\partial \psi}{\partial E_{sm}} + \frac{\partial \psi}{\partial E_{sr}} \nabla_r v^m. \quad (11)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\varepsilon = h/l, \quad \xi_\alpha = y^\alpha/l \quad (\alpha=1, 2), \quad \eta = (y^3 - R)/h, \quad \tau = t/l \quad (\mu/\rho)^{1/2}, \\ u = v^1/h, \quad v = v^2/h, \quad w = v^3/h. \quad (12)$$

Далее применим метод возмущений к системе (10), (11), записанной в перемещениях u , v , w . Разложим все функции по малому параметру ε , удерживая в соответствующих рядах члены до порядка ε^3 . Будем пользоваться методом Хироты [Абловиц, Сигур, 1987], то есть искать такие решения, в которые входят не только параметры ξ_a , η , но и «медленные переменные» $X_a = \varepsilon^{1/2} \xi_a$, $T = \varepsilon^{3/2} \tau$. Итак, исходные ряды теории возмущений (асимптотического интегрирования) имеют вид

$$\begin{aligned} u &= k^1 \xi_1 + \sum_n u^{(2+n/2)}(\eta, \xi, X, T), \\ v &= \sum_n v^{(2+n/2)}(\eta, \xi, X, T), \\ w &= w^0 + w^1(\eta, \xi, X, T) + \sum_n w^{(2+n/2)}(\eta, \xi, X, T). \end{aligned} \quad (13)$$

В написанных формулах верхний индекс относится к степени параметра ε , константы k^1 , w^0 , стоящие в формулах (13) первыми, определяют статическое поведение оболочки. Если воспользоваться тем, что цилиндрические поверхности оболочки свободны от нагрузки, то уравнения (11), (12) позволяют перейти от трехмерной задачи расчета оболочки к двумерной при $n = 6$ (в этот момент условия согласования последовательных приближений асимптотически «обрываются»). При этом уравнения четвертого порядка совпадают с системой (4), а для системы шестого порядка имеют место такие соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial T^2} - s^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \varphi_1 + \frac{\sigma \varphi_1}{4} + q \chi \varphi_2^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial T^2} - s^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \varphi_2 + \frac{\sigma \varphi_2}{4} + q \chi \varphi_1^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial T^2} - s^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \right) \chi + \sigma \chi + q \varphi_1 \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (14) буквы φ_1 , φ_2 , χ определяют искомые поправки в рядах (13), относящиеся к перемещениям u , v , w . Коэффициенты s , q , σ зависят от предыдущих приближений асимптотического интегрирования. Звездочка означает комплексное сопряжение. Нелинейная система (14) допускает солитонные решения (уединенные волны). Так, вдоль оси цилиндра (X) распространяются кольцевые волны, характер которых показан на рис. 3.

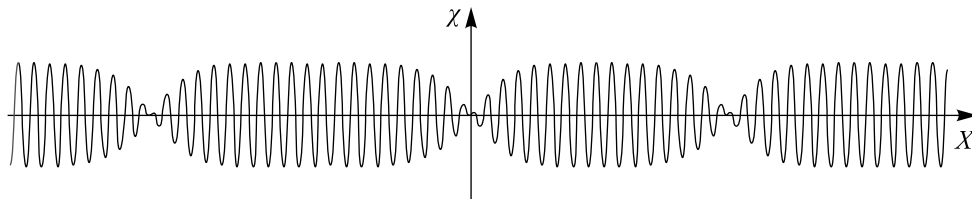


Рис. 3. Солитоны — решения системы (14), порождающие изменение радиуса оболочки. Буква X означает ось цилиндра, χ — радиальное перемещение срединной поверхности в направлении к оси цилиндра (паттерны — вмятины)

Эти перемещения представляют собой «уединенные волны» кругового очертания (рис. 4, а). Кроме того, можно выделить другой класс солитонов, которому отвечают изломы — ребра (термин Погорелова, 1986), расположенные под углом к оси цилиндра (рис. 4, б). Вид волнообразования иллюстрирует рис. 4. При этом длина волн имеет порядок $\lambda = \varepsilon^{1/2} R$. Взаимодействие двух типов волн, изображенных на рис. 4, вызывает деформации, показанные на рис. 2, б

(которые ранее были обнаружены экспериментально). Существенное различие между волнами, определяемыми системами (4) и (14), состоит в том, что для системы (4) дисперсионное соотношение (6) не содержит амплитуд колебаний, а в системе (14) амплитуда колебаний входит в коэффициент σ . Другими словами, влияние длинных волн — солитонов — проявляется при значительных перемещениях оболочки, являясь предвестником потери устойчивости.

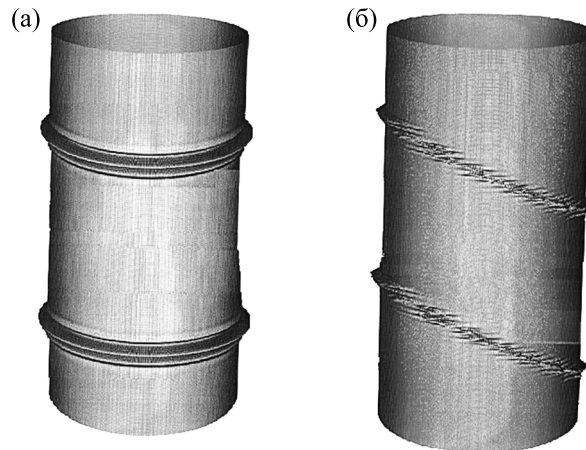


Рис. 4. Характерный вид солитонных волн на поверхности цилиндра при аксиальном нагружении, отвечающих системе (14)

Таким образом, применительно к тонким цилиндрическим оболочкам, нагруженным аксиально, учет «высших резонансных мод» на основе системы (14) позволяет упростить исходную трехмерную задачу (10), (11) и объяснить наблюдаемые факты по устойчивости. Появление неограниченных перемещений (резонансов), когда $n = 6$, снижает величину q_{cr} , вычисленную на основе системы (4), примерно на 30–40 %. Приближаясь к точкам резонансов, размеры ромбических вмятин растут, и этот факт предшествует моменту потери устойчивости.

Существенно, что сведение трехмерной модели к двумерной требует детального анализа специфики задачи: выделение малых параметров геометрии и напряженного состояния, учет граничных условий, свойств материала, граничных условий. Поэтому в каждом конкретном случае требуется индивидуальное обоснование характера волнообразования. Так, для цилиндрических оболочек, нагруженных гидростатическим давлением p , «медленные переменные» следует принять в виде $X = \varepsilon y^{1/2}$, $T = \varepsilon^2 t / (\mu/\rho)^{1/2}$. Вместо представления (13) выберем для иско-
мых функций выражения такого вида:

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \sum_{-\infty}^{\infty} u^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2), \\ v &= \sum_n \sum_{-\infty}^{\infty} v^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2), \\ w &= w^0(X, T) + w^{(0,1)}(X, T) \exp(i\xi_2) + \sum_n \sum_{-\infty}^{\infty} w^{(n,m)}(X, T, \eta) \exp(im\xi_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в уравнения (10), (11), приходим к разрешающему уравнению для поправки w' :

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial T^2} + aw' \frac{\partial^2 (w')^2}{\partial T^2} = b \frac{\partial^2 w'}{\partial X^2} + cw' - g(w')^3. \quad (16)$$

В выражении (16) буквы a , b , c , g обозначают функции, зависящие от упругих констант, величины нагрузки p , малого параметра ε . Уравнение (16) имеет нетривиальные решения и порождает

волны двух типов, которые показаны на рис. 5. Отметим, что предсказания теории (существование уединенных волн с длиной $\lambda \cong l$) ранее было обнаружено в экспериментах, рис. 2, *a*. Вычисление параметра q_{cr} с учетом поправок, найденных по (16), приводит (как и при аксиальном нагружении) к снижению критического давления на 30–40 % по сравнению с оценкой линеаризованной теории. Обратим внимание на то, что весь предыдущий анализ проведен для оболочек, лишенных любых технологических дефектов: существенно используются методы асимптотического интегрирования, малость параметра ε и «удачный выбор координат X, T ». Основные дефекты, вызывающие потерю устойчивости (вмятины и паттерны на поверхности), появляются в процессе нагружения. Учет несовершенств поверхностей снижает критические нагрузки. Влияние дефектов изготовления оболочек можно учесть в рамках описанной процедуры.

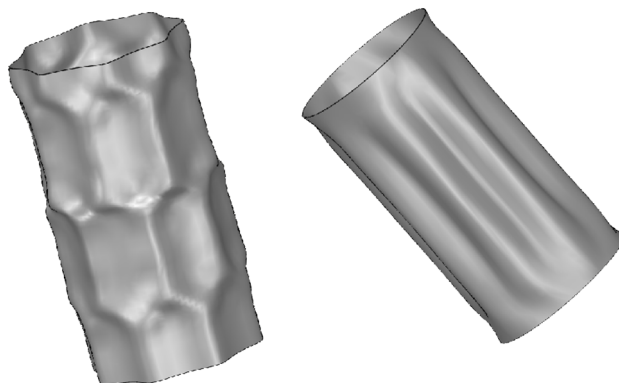


Рис. 5. «Солитонные» резонансные моды цилиндрических оболочек при гидростатическом нагружении, соответствующие уравнению (16)

Итак, установлено, что нелинейная трехмерная динамическая теория упругости предсказывает появление недопустимых для эксплуатации перемещений при нагрузках, которые ниже определенных в соответствии со статическим критерием, примененным к системе (1).

В книге [Киселев, Долгих, 2013] недопустимыми считаются неограниченные перемещения, но возможны и другие критерии. Поэтому целесообразно принять критерий устойчивости при динамическом нагружении в таком виде. Нагрузка $p_{kcr} = q_{cr} p_k$ является критической (а коэффициент q_{cr} — предельным), если при ней происходят значительные изменения формы срединной поверхности либо появляются пластические деформации в оболочке. При таком подходе можно добиться совпадения экспериментальных и теоретических данных и не потребуются серьезно изменять существующие технические стандарты [Eurocode 3, 2007; ASME/BPVS-N-284-1, 2007].

Следует сказать, что проведенный выше анализ ограничен принятой «физической точностью», и в дальнейшем должен быть дополнен строгими математическими доказательствами. Работа в этом направлении представляется перспективной, так как она может быть подкреплена интересными экспериментальными фактами.

Дело в том, что нелинейные колебания, содержащиеся в системе (14) и в уравнении (16), проявляются на всех этапах деформирования оболочек. Амплитуды «медленных волн» резко возрастают при приближении к резонансам. Это явление может быть обнаружено современными акустическими средствами [Гуляев и др., 1978; Anderson et al., 2012]. Тем самым появляется возможность управлять поведением оболочки вблизи точки бифуркации и снижать риск разрушения.

4. Выводы

Проведенный анализ показал, что все факты, связанные с устойчивостью тонких упругих оболочек, могут быть объяснены, основываясь на динамических уравнениях трехмерной теории упругости. В случае безмоментного начального напряженного состояния эти уравнения

сводятся методом теории возмущений (обратной задачи рассеяния) к двумерным системам, допускающим солитонные решения. Именно эти решения порождают паттерны и вмятины на поверхностях оболочек, являясь предвестниками потери устойчивости. Неконсервативные уравнения (14), (16), таким образом, устраняют противоречия, которые появляются во многих работах, использующих статические нелинейные уравнения теории пологих оболочек. Динамический подход к задачам устойчивости обнаруживает новые резонансные явления, которые проявляются в виде взаимодействия низкочастотных солитонов и внутренних напряжений (снижая критические нагрузки). Существенно, что уравнения, определяющие предельные нагрузки, зависят от нескольких малых параметров: $\varepsilon = h/l$, $\varepsilon_1 = l/R$, $\varepsilon_{ij} = P_{ij}/E$. «Взаимодействие» этих параметров приводит к различным типам разрешающих уравнений в зависимости от типа напряженного состояния. Говоря иначе, асимптотическое интегрирование трехмерных уравнений теории упругости не позволяет записать уравнения типа Кармана–Тзяна, справедливые при любом характере внутренних напряжений. Другой вывод нелинейного анализа состоит в том, что вмятины появляются на поверхностях в процессе нагружения (даже для идеально изготовленных оболочек) и являются предвестниками потери устойчивости. В настоящее время в численном анализе трехмерных динамических задач теории упругости имеются серьезные математические и вычислительные трудности. Существование решений в нелинейной теории упругости доказано для статических задач Боллом [Ball, 1978], если функция внутренней энергии поливыпукла. В динамическом случае глобальная теорема существования неизвестна. Численный анализ трехмерных задач возможен лишь в частных случаях [Miroshnikov, Tzavaras, 2012]. Поэтому даже преодоление чисто математических трудностей [Водопьянов, Молчанова, 2015] не избавит от затруднений при выделении солитонных колебаний, являющихся предвестниками потери общей устойчивости. Следовательно, задача численного анализа поведения тонких оболочек при приближении потери устойчивости потребует разработки не только новых алгоритмов, но и более совершенной вычислительной техники. В то же время вмятины могут быть обнаружены современными акустическими средствами в процессе эксплуатации оболочек [Руденко, 2006; Marmottant et al., 2011]. Наблюдая за развитием вмятин, можно судить о резервах несущей способности оболочек и контролировать их безопасность. Видимо, акустический контроль формы поверхности оболочек является первоочередной задачей при оценке несущей способности конструкции.

Список литературы (References)

- Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and Inverse Scattering Transform. — SIAM Studies in Applied Mathematics, No. 4. — Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1988. (Russ. ed.: Ablowitz M. J., Segur H. Solitony i metod obratnoi zadachi. — Moscow: Mir, 1987.)
- Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 523–526.
Vodopianov S. K., Molchanova A. O. Variazionnye problemy nelineinoi teorii uprugosti v opredelennykh klassakh funktsii s konechnym iskszheniem [Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion] // Doklady Akademii nauk Rossii [Doklady RAS]. — 2015. — Vol. 465, No. 5. — P. 523–526 (in Russian).
- Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. — М.: Физматгиз, 1963.
Volmir A. S. Stability of Elastic Systems, Moscow, Nauka. English Translation: Foreign Technology, Division, Air Force Systems Command. — Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965. (Russ. ed.: Volmir A. S. Ustoichivost uprugih system. — Moscow: Fizmatgis, 1963.)
- Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — М.: Физматгиз, 1980.
Vorovich I. I. Nonlinear Theory of Shallow Shells. — English Edition edited by L. P. Lebedev. Translated by M. Grinfeld. — New York: Springer-Verlag, 1999. (Russ. ed.: Vorovich I. I. Matematicheskie problemi nelineinoi teorii pologih obolochek. — Moscow: Fizmatgis, 1980.)

- Гуляев Ю. В., Проплов В. В., Шкердин Г. Л. Дифракция света на звуке в твердых телах // Успехи физических наук. — 1978. — Т. 124 (1). — С. 61–109.
Gulyaev Yu. V., Proplov V. V., Shkerdin G. I. Difrakzia sveta na zvuke v tverdyh telakh [Optical-acoustic diffraction in solids] // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. — 1978. — Vol. 124 (1). — P. 61–109 (in Russian).
- Киселев В. В., Долгих Д. В. Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек. — М.: Физматлит, 2013.
Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Nelineino-uprugie uzory na poverhnostiah nagruzhennykh plastin i obolochek [Non-linear patterns of dents on surfaces of plates and shells under load]. — Moscow: Phizmatlit, 2013. (in Russian).
- Погорелов А. В. Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. — М.: Физматгиз, 1986.
Pogorelov A. V. Izgibania poverhnostei i ustoychivost obolochek [Bending of surfaces and stability of shells]. — Moscow: Phizmatgiz, 1986 (in Russian).
- Руденко О. В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физических наук. — 2006. — Т. 176 (1). — С. 77–95.
Rudenko O. V. Gigantskie nelineinosti strukturno-neodnorodnykh sred i osnovy metodov nelineinoi akusticheskoi diagnostiki [Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostics methods] // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. — 2006. — Vol. 176 (1). — P. 77–95 (in Russian).
- Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1977.
Sedov L. I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. — Tenth Edition. — CRC Press. London–Tokyo, 1993. (Russ. ed.: *Sedov L. I.* Metody podobiya i razmernosti v mehanike. — Moscow: Nauka, 1977.)
- Срубцик Л. С. К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1972. — Т. 36, вып. 4. — С. 890–909.
Srubschik L. S. K voprosu o nezhestkosti v nelineinoi teorii pologikh obolochek [About nonrigidity into nonlinear theory of shallow shells] // Izvestia RAS, Mathematics. — 1972. — Vol. 36, No. 4. — P. 890–909 (in Russian).
- Сьярле П. Г. Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.
Ciarlet P. G. Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity. — Vol. 1. — North Holland, Amsterdam – New York, 1988. (Russ. ed.: *Ciarlet P. G.* Matematicheskaya teoriya uprugosti. — Moscow: Mir, 1992.)
- Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов. — СПб.: Лань, 2002.
Timoshenko S. P., Gere J. Mechanics of materials. — Van Nostrand Reinhold Co., 1972. (Russ. ed.: *Timoshenko S. P., Gere J.* Mehanika materialov. — Saint-Petersburg: Lan, 2002.)
- Уизем Г. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves (Pure and Applied Mathematics). — Wiley-Interscience. New York – London, 1974. (Russ. ed.: *Whitham G. B.* Lineinye i nelineinye volny. — Moscow: Mir, 1977.)
- ASME/BPVC – N-284-1. Metal containment shell buckling design methods, Class MC, section 3, division 1, 2007.
- Anderson Sh., Sabra K., Zakharia M., Sessarego J.-P. Time-frequency analysis of the bistatic acoustic scattering from a spherical elastic shells // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — Vol. 131 (1). — P. 164–173.
- Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration Mech. and Analys. — 1977. — Vol. 63. — P. 337–403.
- EN 1993-1-6. Eurocode 3: Design of steel structures. — Part 1-6: Strength and stability of shell Structures. The European Union Per Regulation. 2007
- Hutchinson J. W., Thompson J. M. T. Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces // J. Appl. Mech 84(6), 061001 (Apr 12, 2017) (11 pages).
- Hutchinson J. W. Buckling of spherical shells revisited // Proc. R. Soc. — 2016. — A 472, 20160577.
- Karman Th., Tsien H. S. The buckling of cylindrical shells under axial compression // Journal of Aeron. Soc. — 1941. — Vol. 8, No. 8. — P. 303–312.
- Kiselev V. V., Dolgikh D. V. Non-linear patterns of bends and solitons on surfaces of loaded shells // Shell Structure. Theory and applications. — Vol. 3. Pietraszkiewicz and Gorski (Editors), Taylor and Francis group, London, 2014. — P. 199–202.

- Marmottant Ph., Bouakaz A., de Jong N., Quilliet C.* Buckling resistance of solid shell bubbles under Ultrasound // Journal of the Acoustical Society of America, Acoustical Society of America. — 2011. — Vol. 129 (3). — P. 1231–1239.
- Marthelot J., Jiménez F. L., Lee A., John W. Hutchinson J. W., Reis P. M.* Buckling of a Pressurized Hemispherical Shell Subjected to a Probing Force // J. Appl. Mech., 84 (12), 121005 (Oct 19, 2017) (9 p.).
- Miroshnikov A., Tzavaras A. A.* Variational Approximation Scheme for Radial Polyconvex Elasticity That Preserves the Positivity of Jacobians // Comm. Math. Sciences. — 2012. — Vol. 10, No. 1. — P. 87–115.
- Truesdell C. A.* First Course in Rational Continuum Mechanics. — N.-Y.: Academic Press, New York, 1977.
- Steigmann D.* Koiter's Shell Theory from the Perspective of Three-dimensional Nonlinear Elasticity // Journal of Elasticity. — 2013. — Vol. 111 (1). — P. 91–107.
- Zoelly R.* Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Buchdr. Zürcher and Furrer. Zürich, 1915.