

УДК: 519.6

## Применение метода линий тока для ускорения расчетов неизотермической нелинейной фильтрации

**Я. В. Невмержицкий**

Московский физико-технический институт,  
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

E-mail: nevmerzhitski\_y@mail.ru

*Получено 30.08.2018, после доработки — 23.09.2018.*

*Принято к публикации 05.10.2018.*

Работа посвящена численному моделированию плоской неизотермической нелинейной фильтрации в пористой среде. Рассматривается двумерная нестационарная задача течения высоковязкой нефти, воды и пара с фазовыми переходами. Нефтяная фаза представлена двумя псевдокомпонентами: легкой и тяжелой фракциями, которые, как и водный компонент, могут присутствовать в газовой фазе. Нефть проявляет вязкопластическую реологию, ее фильтрация не подчиняется классическому линейному закону Дарси. При моделировании учтена не только зависимость плотности и вязкости флюидов от температуры, но и улучшение реологических свойств нефти с ростом температуры.

Для численного решения задачи применен метод линий тока с расщеплением по физическим процессам, заключающийся в отделении конвективного переноса, направленного вдоль скорости фильтрации, от теплопроводности и гравитации. Предложен новый подход применения метода линий тока, позволяющий корректно моделировать задачи нелинейной фильтрации с реологией, зависящей от температуры. Суть этого алгоритма заключается в рассмотрении процесса интегрирования как совокупности квазиравновесных состояний, которые достигаются путем решения системы на глобальной сетке и между которыми решение проводится на сетке из линий тока. Использование метода линий тока позволяет не только ускорить расчеты фильтрации, но и получить физически достоверную картину решения, так как интегрирование системы происходит на сетке, совпадающей с направлением течения флюидов.

Помимо метода линий тока, в работе представлен алгоритм учета негладких коэффициентов, возникающих при решении уравнения течения вязкопластической нефти. Использование этого алгоритма позволяет сохранить достаточно большой шаг по времени и не изменяет физическую картину решения.

Полученные результаты сопоставлены с известными аналитическими решениями, а также с результатами, полученными при расчете в коммерческом пакете. Анализ проведенных тестовых расчетов на сходимость по количеству линий тока, а также на разных сетках на линиях тока обосновывает применимость предлагаемого алгоритма, а уменьшение времени расчета, по сравнению с традиционными методами, демонстрирует практическую значимость этого подхода.

**Ключевые слова:** расщепление по физическим процессам, метод линий тока, композиционное моделирование, нелинейная фильтрация

UDC: 519.6

## Application of the streamline method for nonlinear filtration problems acceleration

Ya. V. Nevmerzhitskiy

Moscow Institute of Physics and Technology, Computer Science and Computational Mathematics Department,  
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

E-mail: nevmerzhitski\_y@mail.ru

*Received 30.08.2018, after completion — 23.09.2018.*

*Accepted for publication 05.10.2018.*

The paper contains numerical simulation of nonisothermal nonlinear flow in a porous medium. Two-dimensional unsteady problem of heavy oil, water and steam flow is considered. Oil phase consists of two pseudocomponents: light and heavy fractions, which like the water component, can vaporize. Oil exhibits viscoplastic rheology, its filtration does not obey Darcy's classical linear law. Simulation considers not only the dependence of fluids density and viscosity on temperature, but also improvement of oil rheological properties with temperature increasing.

To solve this problem numerically we use streamline method with splitting by physical processes, which consists in separating the convective heat transfer directed along filtration from thermal conductivity and gravitation. The article proposes a new approach to streamline methods application, which allows correctly simulate nonlinear flow problems with temperature-dependent rheology. The core of this algorithm is to consider the integration process as a set of quasi-equilibrium states that are results of solving system on a global grid. Between these states system solved on a streamline grid. Usage of the streamline method allows not only to accelerate calculations, but also to obtain a physically reliable solution, since integration takes place on a grid that coincides with the fluid flow direction.

In addition to the streamline method, the paper presents an algorithm for nonsmooth coefficients accounting, which arise during simulation of viscoplastic oil flow. Applying this algorithm allows keeping sufficiently large time steps and does not change the physical structure of the solution.

Obtained results are compared with known analytical solutions, as well as with the results of commercial package simulation. The analysis of convergence tests on the number of streamlines, as well as on different streamlines grids, justifies the applicability of the proposed algorithm. In addition, the reduction of calculation time in comparison with traditional methods demonstrates practical significance of the approach.

**Keywords:** splitting by physical processes, streamlines method, compositional reservoir simulation, nonlinear flow

## 1. Введение

В настоящее время нефтяные залежи, находящиеся в разработке, характеризуются ростом доли месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, к которым, в частности, относятся месторождения тяжелых нефтей. Основной особенностью таких нефтей (по сравнению с легкими нефтями) являются как гораздо большие значения вязкости, так и вязкопластическая реология, согласно которой фильтрация нефти начинается при градиентах давления, больших предельного значения. Ввиду уменьшения вязкости с ростом температуры, а также улучшения реологических свойств наибольшее распространение получили тепловые методы увеличения нефтеотдачи (МУН).

При численном моделировании разработки месторождений высоковязких нефтей с использованием тепловых МУН возникает ряд трудностей. Во-первых, необходимо учитывать не только сложную реологию нефти, но и ее зависимость от температуры. Стоит отметить, что закон фильтрации с предельным градиентом, которому подчиняется большинство высоковязких нефтей, является негладкой функцией, вследствие чего невозможно использовать метод Ньютона для учета нелинейности в уравнении для давления. Во-вторых, при моделировании вариантов с фазовыми переходами, обусловленных закачкой водяного пара, значительно повышается вычислительная сложность задачи ввиду наличия областей с резким изменением мольной доли фазы, а следовательно, и ее подвижности. В-третьих, для таких задач наблюдается эффект влияния ориентации разностной сетки на результат моделирования. Так, в случае моделирования вариантов вытеснения вязкопластической нефти горячей водой на элементе пятиточечной системы разработки, в котором скважины располагаются в углах расчетной области, фронт вытеснения вытягивается вдоль координатных осей, в то время как вытеснение должно происходить по диагональному направлению [Computer Modelling Group Ltd., 2009]. Данный эффект обусловлен использованием с двухточечной аппроксимацией потоков (вдоль координатных направлений), что в совокупности с высоким контрастом подвижностей горячей воды и холодной высоковязкой нефти приводит к нефизическому результату. При использовании более точных методов вид матрицы, полученной после аппроксимации, сильно усложняется, что замедляет скорость расчета.

С учетом изложенных особенностей для получения достоверных результатов с помощью коммерческих пакетов моделирование необходимо проводить на подробных сетках, на расширенном разностном шаблоне, что требует привлечения вычислительных кластеров. Поэтому основной задачей работы является разработка численного метода, позволяющего проводить расчеты неизотермической нелинейной фильтрации за более короткое время по сравнению со стандартными конечно-объемными методами. Для уменьшения вычислительной сложности задачи применен метод линий тока с расщеплением по физическим процессам, заключающийся в отделении конвективного переноса, направленного вдоль распространения потока, от процессов, связанных с теплопроводностью и гравитацией, направление которых не совпадает с конвективным потоком. Метод расщепления по физическим процессам позволяет упростить матрицу системы уравнений, возникающую вследствие перехода от дифференциальной задачи к разностной, что приводит к ускорению расчетов, и потому нашел широкое практическое применение [Белоцерковский, 1994; Годунов, Рябенский, 1977; Железнякова, 2013; Ковеня, Яненко, 1981; Магомедов, Холодов, 2017; Марчук, 1988; Яненко, 1967; Яненко и др., 1967; Холодов, 1978; Холодов, 1985].

В современной литературе представлены несколько разновидностей методов моделирования с использованием линий тока. В методах первого типа (методы трубок тока) [Lake et al., 1981; Martin, Wegner, 1979; Renard, 1990; Thiele et al., 1996] трубка тока определяется как поверхность, образованная соседними линиями тока. Такое представление трубок тока является наглядным, однако вычислительно затратным для трехмерных задач и потому не нашло широкого практического применения. В методах второго типа (методы линий тока) [Blunt et al., 1996; Beraldo et al., 2009; Mallison, 2004; Thiele, 1994; Usman, 2007; Zhu, 2011] с каждой построенной линией тока ассоциируется своя трубка тока, по имеющемуся полю скоростей вдоль ли-

нии тока определяется объем трубки тока. Эти методы не требуют знания расположения границ трубок тока и нашли широкое применение для решения уравнений фильтрации.

Одним из основных предположений метода линий тока является сохранение расхода вдоль трубки тока, которое выполняется только при моделировании изотермической фильтрации несжимаемых флюидов. В настоящее время разработаны методики, которые позволяют проводить расчеты как для сжимаемых флюидов [Beraldo et al., 2009; Mallison, 2004; Thiele, 1994], так и для неізотермических задач многокомпонентной фильтрации [Usman, 2007; Zhu, 2011]. Среди рассмотренных работ наиболее полная методика применения метода линий тока для моделирования тепловых МУН описана в [Zhu, 2011]. В [Zhu, 2011] предложен способ учета изменения объема трубки тока при моделировании задач неізотермической фильтрации с фазовыми переходами. Однако при моделировании фильтрации не учтена вязкопластичная реология нефти.

В работе основной акцент сделан на применении метода линий тока при решении задач вязкопластичной неізотермической фильтрации. Для моделирования нелинейной фильтрации, в которой реология зависит от температуры, предложен оригинальный подход с использованием линий тока, заключающийся в решении полной задачи на исходной двумерной сетке с последующим расчетом этой системы на сетке, ассоциированной с линиями тока. Кроме того, предложен алгоритм автоматического перестроения линий тока.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассматривается плоская задача (координаты  $x, y$ ) неізотермической фильтрации воды, нефти и газа в пористой среде. Нефть представлена двумя компонентами (легкие и тяжелые фракции), которые могут переходить в газовую фазу. Водная фаза представлена только водным компонентом, который также может переходить в газовую фазу. Для фильтрации водной и газовой фаз выполняется закон Дарси, в то время как движение нефтяной фазы подчиняется закону фильтрации с предельным градиентом [Бернадинер, Ентов, 1975; Баренблатт и др., 1972; Бернадинер, Ентов, 1975], который получил широкое применение для описания течения высоковязких нефтей.

Уравнение баланса массы  $i$ -го компонента (вода, легкие или тяжелые фракции) имеет вид

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \nabla \cdot \sum_j \alpha_j \frac{k k_{rj} \rho_j}{\mu_j} c_{ij} \nabla p = q_i, \quad (1)$$

где  $N_i$  — мольная концентрация  $i$ -го компонента,  $q_i$  — его мольный расход на единицу объема,  $k$  — абсолютная проницаемость пласта,  $k_{rj}$ ,  $\rho_j$ ,  $\mu_j$  — соответственно относительная фазовая проницаемость (ОФП), плотность и вязкость фазы  $j$  (водная, нефтяная или газовая фаза),  $c_{ij}$  — мольная доля компонента  $i$  в фазе  $j$ ,  $p$  — давление. Суммирование производится по фазам, в которых может присутствовать компонент  $i$ ;  $N_p$  — количество фаз. Коэффициент  $\alpha_j$  характеризует отклонение фильтрации нефтяной фазы от линейного закона:

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{|\nabla p|}, & |\nabla p| \geq \gamma, \\ 0, & |\nabla p| < \gamma. \end{cases} \quad (2)$$

При градиентах давления, больших предельного ( $\gamma$ ), фильтрация происходит по линейному закону Дарси, а при меньших градиентах давления движение нефти прекращается. Для остальных фаз данный коэффициент равен 1. Установлено, что с ростом температуры предельный градиент давления уменьшается, достигая нулевого значения при температурах, близких к 90 °C [Pang, Liu, 2012]. Поэтому при численном моделировании учтена зависимость предельного градиента от температуры.

Уравнение баланса энергии с учетом кондуктивного теплопереноса имеет вид

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_p} \alpha_j \frac{k k_{ij} \rho_j}{\mu_j} c_{ij} h_{ij} \nabla p + \bar{\lambda} \nabla T \right) = q_e, \quad (3)$$

где  $e$  — плотность внутренней энергии,  $q_e$  — объемная плотность источников тепла (энергии),  $h_{ij}$  — молярная энтальпия компонента  $i$  в фазе  $j$ ,  $T$  — температура,  $\bar{\lambda}$  — осредненный коэффициент теплопроводности смеси,  $N_c$  — количество компонентов. При написании соотношений (1)–(3) предполагается равенство нулю капиллярного давления, что справедливо в случае фильтрации высоковязких нефтей и природных битумов. Кроме того, предполагается равенство температур фаз, что соответствует локальному тепловому равновесию.

Уравнения баланса массы компонента и энергии дополнены соотношениями, которые характеризуют зависимость плотности, вязкости, энтальпии фаз от температуры и давления. В качестве замыкающих соотношений использованы корреляции из широко используемых программных пакетов [Computer Modelling Group Ltd., 2009; Schlumberger Ltd., 2009]. Уравнение совместности объемов фаз —

$$S_\Sigma \equiv \sum_{j=1}^{N_p} S_j = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{V_j}{V_p} = 1 \quad (4)$$

— используется для получения уравнения для давления. Здесь  $V_j$  — объем фазы  $j$ ,  $V_p$  — объем порового пространства, занятого фазами. Варьируя невязку (4), получаем:

$$\delta(1 - S_\Sigma) = \frac{\partial S_\Sigma}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \delta t + \frac{\partial S_\Sigma}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial t} \delta t + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial S_\Sigma}{\partial N_i} \frac{\partial N_i}{\partial t} \delta t = 0. \quad (5)$$

Подставляя в (5) уравнения из (1) и (3), получаем уравнение для давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\Sigma}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial S_\Sigma}{\partial e} \nabla \cdot \left( \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_p} \alpha_j \frac{k k_{ij} \rho_j}{\mu_j} c_{ij} h_{ij} \nabla p + \bar{\lambda} \nabla T \right) + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \frac{\partial S_\Sigma}{\partial N_i} \nabla \cdot \sum_{j=1}^{N_p} \alpha_j \frac{k k_{ij} \rho_j}{\mu_j} c_{ij} \nabla p \right) + \\ + \frac{\partial S_\Sigma}{\partial e} Q_e + \sum_{i=1}^{N_c} \left( \frac{\partial S_\Sigma}{\partial N_i} Q_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для задания начальных условий используются распределения давления, температуры и мольных долей компонентов. Из этих данных после расчета фазового равновесия можно получить распределение начальных мольных концентраций, фазовых насыщенностей и плотностей внутренних энергий. Константы фазового равновесия вычисляются по корреляции Вильсона [Wilson, 1969].

В процессе моделирования пласт предполагается замкнутым, поэтому в процессе решения исходной двумерной задачи на границах расчетной области заданы условия непротекания всех фаз, а также нулевой поток энергии. Резервуар расположен в горизонтальной плоскости, вскрытие его осуществляется вертикальными нагнетательными и добывающими скважинами. Контроль нагнетательных скважин происходит по постоянному давлению либо расходу закачиваемых фаз (вода, пар, пароводяная смесь). На добывающих скважинах поддерживается постоянное забойное давление.

### 3. Численный метод

Численное решение уравнений фильтрации (1), (3), (6) на двумерной сетке осуществляется методом ИМПЕС (неявный по давлению, явный по концентрациям компонентов), основным предположением которого является независимость капиллярного давления от времени [Aziz,

Settari, 1979]. Идея метода заключается в том, что при аппроксимации уравнения (6) давление учитывается неявно на  $(n + 1)$ -ом временном слое, а остальные переменные учитываются явно, на  $n$ -м слое. В качестве основных переменных используются давление  $p$ , внутренняя энергия смеси  $e$ , молярные концентрации компонентов  $N_i$ .

Систему уравнений, получающуюся в случае метода IMPES, можно записать в терминах невязки  $R_{l,m}$ :

$$R_{l,m} = \begin{pmatrix} S_\Sigma(U_{l,m}^{n+1}) - 1 \\ e_{l,m}^{n+1} - e_{l,m}^n + \tau \cdot \psi_1(p_{l,m}^{n+1}, p_{l\pm 1,m}^{n+1}, p_{l,m\pm 1}^{n+1}, W_{l,m}^n, W_{l\pm 1,m}^n, W_{l,m\pm 1}^n) \\ N_{i,l,m}^{n+1} - N_{i,l,m}^n + \tau \cdot \psi_{2i}(p_{l,m}^{n+1}, p_{l\pm 1,m}^{n+1}, p_{l,m\pm 1}^{n+1}, W_{l,m}^n, W_{l\pm 1,m}^n, W_{l,m\pm 1}^n) \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

Здесь вектор основных переменных обозначен как  $U = (p, e, N_i)^T$ , а  $W = (e, N_i)^T$ , в качестве функций  $\psi_1$  и  $\psi_{2i}$  используются аппроксимации пространственной и источниковой части уравнений (1) и (3):

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \text{TEX}_{l+1/2,m}(p_{l+1,m}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1}) - \text{TEX}_{l-1/2,m}(p_{l,m}^{n+1} - p_{l-1,m}^{n+1}) + \\ & + \text{TEY}_{l,m+1/2}(p_{l,m+1}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1}) - \text{TEY}_{l,m-1/2}(p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m-1}^{n+1}), \\ \psi_{2,i} = & \text{TX}_{i,l+1/2,m}(p_{l+1,m}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1}) - \text{TX}_{i,l-1/2,m}(p_{l,m}^{n+1} - p_{l-1,m}^{n+1}) + \\ & + \text{TY}_{i,l,m+1/2}(p_{l,m+1}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1}) - \text{TY}_{i,l,m-1/2}(p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m-1}^{n+1}). \end{aligned}$$

Индексы  $l$  и  $m$  характеризуют расположение узла двумерной расчетной сетки;  $\text{TX}_{i,l\pm 1/2,m}$ ,  $\text{TY}_{i,l,m\pm 1/2}$  — коэффициенты межблочной проводимости для потока массы компонента  $i$  в направлении  $x$  и  $y$  соответственно;  $\text{TEX}_{l\pm 1/2,m}$ ,  $\text{TEY}_{l,m\pm 1/2}$  — коэффициенты межблочной проводимости для потока энергии. Первое уравнение системы (7) выражает условие совместности объемов фаз, с помощью которого получено уравнение для давления (6).

Рассмотрим более детально алгоритм решения системы (1), (3), (6) методом IMPES. На первом шаге, после генерации начальных условий, численно рассчитываются производные от суммарной насыщенности  $S_\Sigma$ , входящие в уравнение (6). Дискретизация уравнения для давления [Холодов, 1984; Холодов, 1985] на пятиточечном конечно-разностном шаблоне (в терминах невязки) имеет вид

$$R_{l,m} = c_{l,m} p_{l+1,m}^{n+1} + f_{l,m} p_{l,m+1}^{n+1} + a_{l,m} p_{l,m}^{n+1} + b_{l,m} p_{l-1,m}^{n+1} + g_{l,m} p_{l,m-1}^{n+1} - d_{l,m}^n = 0. \quad (8)$$

Ввиду того что коэффициенты  $c, b, g, f, a$  в левой части системы (8) являются функциями решения, для их корректного учета был применен метод Ньютона [Aziz, Settari, 1979]. Согласно этому методу давление на следующем временном слое вычисляется итерационно, т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} p^{n,k} = p^{n+1}$ , где  $k$  — номер итерации. Обозначив  $\delta^{k+1} = p^{n,k+1} - p^{n,k}$  вариацию давления, метод Ньютона для системы (8) можно записать следующим образом:

$$\left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l-1,m}} \right)^k \delta_{l-1,m}^{k+1} + \left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l,m-1}} \right)^k \delta_{l,m-1}^{k+1} + \left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l,m}} \right)^k \delta_{l,m}^{k+1} + \left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l+1,m}} \right)^k \delta_{l+1,m}^{k+1} + \left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l,m+1}} \right)^k \delta_{l,m+1}^{k+1} = -R_{l,m}^k, \quad (9)$$

где элементы матрицы Якоби вычисляются численно (метод переменных секущих):

$$\left( \frac{\partial R_{l,m}}{\partial p_{l,m}} \right)^k = \frac{R(p_{l-1,m}^{k-1}, p_{l,m-1}^{k-1}, p_{l,m}^{k-1} + \delta_{l,m}^k, p_{l+1,m}^{k-1}, p_{l,m+1}^{k-1}) - R(p_{l-1,m}^{k-1}, p_{l,m-1}^{k-1}, p_{l,m}^{k-1}, p_{l+1,m}^{k-1}, p_{l,m+1}^{k-1})}{\delta_{l,m}^k}.$$

Рассматриваемый подход не требует аналитического вычисления производных компонентного состава и PVT-свойств по давлению (и потому прост в реализации), однако уменьшает порядок сходимости (итоговый порядок не может превышать 1.5). После решения системы (9) производится проверка решения на сходимость и обновление давления. Контроль сходимости осуществляется по норме невязки  $R_{l,m}^k$ .

Источниковые члены, входящие в уравнение, также учитываются неявно, с помощью алгоритма Писмана [Peaceman, 1983; Каневская, 2002].

После определения давления явно [Холодов, 1978; Холодов, 1985] рассчитываются внутренняя энергия и молярные концентрации компонентов:

$$e_{l,m}^{n+1} = e_{l,m}^n + \tau \cdot \psi_1(p_{l,m}^{n+1}, p_{l\pm 1,m}^{n+1}, p_{l,m\pm 1}^{n+1}, W_{l,m}^n, W_{l\pm 1,m}^n, W_{l,m\pm 1}^n),$$

$$N_{i,l,m}^{n+1} = N_{i,l,m}^n + \tau \cdot \psi_{2i}(p_{l,m}^{n+1}, p_{l\pm 1,m}^{n+1}, p_{l,m\pm 1}^{n+1}, W_{l,m}^n, W_{l\pm 1,m}^n, W_{l,m\pm 1}^n).$$

Подобный алгоритм вычисления накладывает ограничение на величину временного шага, при этом из-за нелинейностей в коэффициентах непосредственное вычисление условия устойчивости метода невозможно. Поэтому для контроля при явном решении системы (7) анализировалось относительное изменение внутренней энергии и молярных концентраций.

Определив значения основных переменных, необходимо вычислить распределение флюидонасыщенностей, а также температуру и компонентный состав смеси. Расчет фазового равновесия проводится итерационно [Walas 1985]: по имеющейся энергии и начальному приближению к температуре определяется компонентный состав, а затем получившаяся полная внутренняя энергия сравнивается с исходным значением. Исходя из изменения энергии, корректируется температура, после чего расчет компонентного состава повторяется.

Вычислив равновесную температуру смеси, а также ее компонентный состав, можно определить фазовый состав из соотношения

$$S_j = \sum_i c_{ij} \frac{N_i}{\phi \rho_i},$$

после чего проверяется условие совместности объемов фаз (1). При достижении сходимости по фазовым насыщенностям время инкрементируется.

При решении системы (7) теплопроводность учитывается на отдельном этапе [Шевченко, 2015]. Перед решением уравнения для давления производится корректировка внутренней энергии по уравнению

$$\frac{\partial e}{\partial T} \frac{\tilde{T} - T^n}{\tau} = \text{div} \kappa \nabla \tilde{T}, \quad (10)$$

где  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности. Численное решение уравнения (10) осуществляется неявным методом на пятиточечном разностном шаблоне, аналогичном тому, который использовался для решения уравнения для давления. После определения температуры  $\tilde{T}$  пересчитывается внутренняя энергия:

$$\tilde{e}_{l,m}^n = e_{l,m}^n + \tau \cdot \text{div} \kappa \nabla \tilde{T}. \quad (11)$$

Полученное значение энергии  $\tilde{e}_{l,m}^n$  используется при решении системы (7) методом IMPES.

Как было отмечено ранее, для учета нелинейности коэффициентов в уравнении для давления применен метод Ньютона. Однако его использование налагает ограничения на гладкость этих коэффициентов. В частности, реологическая кривая закона фильтрации с предельным градиентом является кусочно-гладкой (а следовательно, и коэффициент  $\alpha_j$ ), в результате чего метод Ньютона при решении уравнения (6) не сойдется. Поэтому в окрестности точки разрыва

производной (при градиенте давления, равном критическому значению) производилось сглаживание коэффициента  $\alpha_j$ , а точнее его производной по давлению. Данный подход является разновидностью методов сквозного счета, которые позволяют моделировать многомерные задачи с большим числом точек разрыва производной реологической кривой [Бородин, 2015]. В качестве сглаживающей функции использовалась следующая аппроксимация:

$$\frac{d\alpha_j}{dp} = \left[ 1 + e^{-2k(|\nabla p| - \gamma)} \right]^{-1},$$

где коэффициент  $k$  определяет ширину интервала сглаживания. Как результат, сходимость метода Ньютона сохранится, причем для более быстрой сходимости необходимо сильное сглаживание функции в окрестности точки разрыва производной, что может привести к искажению физической картины решения. В частности, при фильтрации вязкопластичной жидкости с предельным градиентом размер зоны возмущения характеризуется предельным значением, за которым давление равно начальному пластовому значению. Сглаживание закона фильтрации приведет к изменению величины предельного градиента, а потому размер возмущенной зоны будет отличаться от истинного размера. Поэтому необходимо разработать алгоритм, позволяющий учесть в законе фильтрации кусочно-линейную реологию без ее существенного искажения.

В работе предложен метод доопределения коэффициента  $\alpha_j$  из уравнения

$$\tau_{fict} \frac{d\alpha_j^{k+1}}{d\tau} = \alpha_j^k - \alpha_j^{k+1}, \quad (12)$$

где  $\tau_{fict}$  — фиктивное время,  $k$  — номер итерации по давлению. Уравнение (12) описывает релаксацию множителя  $\alpha_j$  к его значению на предыдущем временном слое при малых шагах интегрирования  $\tau$  уравнения для давления, скорость релаксации определяется величиной  $\tau_{fict}$ . Учитывая, что при  $\tau = 0$   $\alpha_j^{k+1} = \alpha_j^n$ , получаем:

$$\alpha_j^{k+1} = \alpha_j^k + (\alpha_j^n - \alpha_j^k) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{fict}}\right).$$

Решение системы (7) на глобальной двумерной сетке производится в течение времени пьезопроводности:

$$\Delta t_{global} = \frac{L^2}{\max_j \left( \frac{k k_{r,j}}{\phi \mu_j c_{f,j}} \right)},$$

где  $L$  — характерный масштаб расчетной области,  $c_{fj}$  — сжимаемость фазы  $j$ , максимум рассчитывается по всем фазам.

#### 4. Подход с использованием линий тока

На сегодняшний день существует ряд работ, посвященных моделированию многофазной фильтрации методом линий тока как в изотермической постановке [Beraldo et al., 2009; Mallison, 2004; Thiele, 1994], так и неізотермической [Usman, 2007; Zhu, 2011]. Основная идея этих методов заключается в последовательном решении уравнения для давления на глобальной сетке с последующим определением фазовых насыщенных и температуры вдоль трубок тока. Расщепление системы уравнений фильтрации (в неізотермическом случае) по физическим процессам производится следующим образом (рис. 1).



1. Зная распределение неизвестных на предыдущем временном слое, интегрируется уравнения для давления в двумерной области с учетом сжимаемости флюидов и скелета (при этом температура и насыщенности зафиксированы).
2. Определив распределение давления, производится трассировка линий тока, после чего рассчитывается поле температур и насыщенностей вдоль линий тока. Этот расчет может проводиться как совместно [Zhu, 2011], так и последовательно [Usman, 2007].
3. Интерполяция полученных значений температуры и насыщенностей на двумерную сетку.

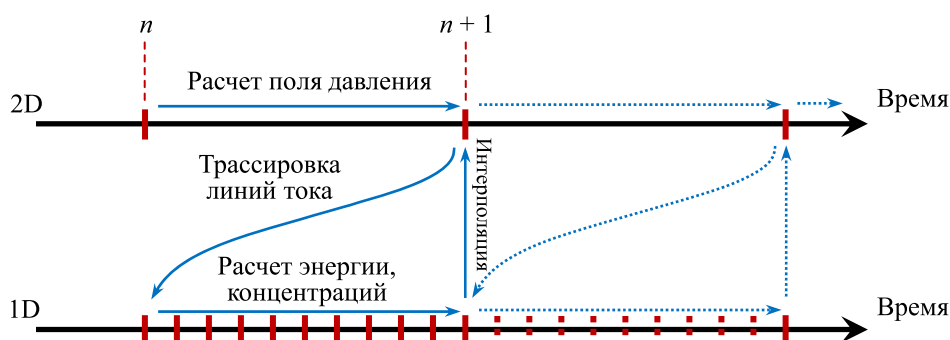


Рис. 1. Схема моделирования методом линий тока, предложенная в работах [Beraldo et al., 2009; Mallison, 2004; Thiele, 1994]. Согласно этой схеме численное решение уравнения для давления проводится на исходной двумерной сетке при фиксированной температуре и фазовых насыщенностях, после чего происходит уточнение температуры и насыщенностей путем решения соответствующих уравнений на сетке из линий тока

Использование такого подхода позволяет получить достоверные результаты в случае изотермической фильтрации несжимаемых флюидов, когда объем трубки тока не изменяется во времени. В случае фильтрации воды применяется дополнительная методика корректировки объема трубки тока [Cheng et al., 2006.], что позволяет получить приемлемые результаты. Однако в случае фильтрации с фазовыми переходами, которые возникают вследствие закачки пара, объем трубки тока изменяется значительно. Поэтому для учета изменения объема трубки тока система уравнений одномерной фильтрации решается совместно, т. е. определяется не только температура и насыщенности фаз, но и давление [Zhu, 2011]. Во всех рассмотренных методах на первом этапе, при решении уравнения для давления, насыщенности фаз и температура считаются фиксированными. В работе [Usman, 2007] был также представлен алгоритм, в котором уравнения для давления и насыщенностей решаются совместно, на линиях тока рассчитывается только температура из баланса энергии (остальные переменные фиксированы). Использование такого подхода позволило улучшить достоверность результатов, но привело к замедлению расчетов.

Во всех упомянутых работах фильтрация нефти (как и остальных фаз) подчинялась линейному закону Дарси. В случае закона фильтрации с предельным градиентом распределение давления и насыщенности сильно зависит от величины предельного градиента. Так, в случае однофазной фильтрации возмущение от скважины распространяется на конечное расстояние, равное  $\Delta p/\gamma$ , где  $\Delta p$  — разница забойного и начального пластового давлений [Баренблатт и др., 1972; Бернадинер, Ентов, 1975]. В случае предельного градиента, зависящего от температуры, неучет изменения последней приведет к некорректному распределению давления и, как следствие, ошибочной геометрии линий тока и их взаимному расположению. Следовательно, для корректной трассировки линий тока необходимо полное решение уравнений фильтрации на глобальной сетке, в результате чего теряется необходимость в последующем решении уравнений вдоль линий тока. Исходя из этих рассуждений, основной идеей предлагаемого метода является использование линий тока для решения уравнений фильтрации на следующих времен-

ных шагах, а не для уточнения решения на текущем временном слое. При этом сетка на линиях тока должна перестраиваться в случае существенного отличия решения на соседних линиях тока. Для этого после нарушения условия сходимости решения между линиями тока выполняется интегрирование уравнений на исходной декартовой сетке в течение времени установления, после чего выполняется перестроение линий тока и т. д. Таким образом, интегрирование системы уравнений фильтрации рассматривается как совокупность квазиравновесных состояний, между которыми уравнение решается на сетке из линий тока (рис. 2).

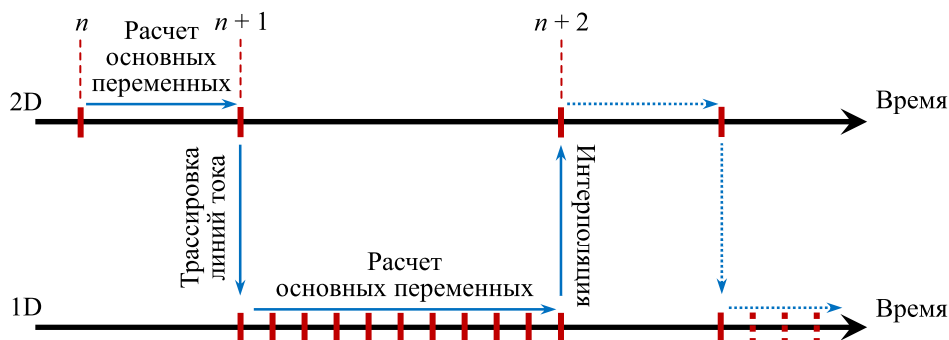


Рис. 2. Предлагаемая схема моделирования методом линий тока. В представленной схеме решение полной системы уравнений фильтрации проводится на глобальной сетке и на линиях тока. Для корректного построения линий тока решение системы на глобальной сетке осуществляется в течение времени установления. При значительном отличии решений между соседними линиями тока расчет на глобальной сетке повторяется

Остановимся на общей схеме моделирования с использованием предлагаемой методики.

1. Зная распределение неизвестных на предыдущем временном слое, решается система уравнений (7) на глобальной сетке в течение времени пьезопроводности.
2. Рассчитав поле суммарной скорости фильтрации, проводится построение линий тока с помощью метода Поллока [Pollock, 1988], определяются геометрические характеристики трубок тока. Затем производится интерполяция основных переменных на получившуюся сетку.
3. Интегрируются уравнения фильтрации (7) без учета теплопроводности на сетке, ассоциированной с трубками тока. Процесс прекращается, когда давление между двумя соседними трубками тока, пересекающими одну и ту же ячейку, отличается более чем на заданную величину. В случае существенного различия решений расчет на трубках тока прекращается, полученное решение интерполируется на двумерную сетку.
4. Учет теплопроводности путем решения уравнений (10)–(11) на двумерной сетке.
5. Переход к п. 1 для расчета следующего квазиравновесного состояния.

Выбор метода Поллока для трассировки линий тока обусловлен несколькими причинами. Во-первых, положение линии тока определяется аналитически при условии кусочно-линейного распределения скорости фильтрации внутри ячейки двумерной сетки, что упрощает реализацию данного метода. Во-вторых, помимо координат линий тока, в процессе трассировки рассчитывается так называемое время пролета частицы (time of flight — TOF) — время, необходимое частице для преодоления расстояния между двумя сегментами линии тока. По определению, время пролета вычисляется как

$$\tau_{TOF}(s) = \int_0^s \frac{\varphi(\xi)}{|u'_t|} d\xi, \quad (13)$$

где  $s$  — координата вдоль линии тока. В предположении постоянства потока вдоль трубки тока, ассоциированной с линией тока, можно получить выражение для объема трубки тока  $V_{sl}$ :

$$V_{sl} = \int_{s_{in}}^{s_{out}} \varphi(\xi) A(\xi) d\xi = \int_{s_{in}}^{s_{out}} q(\xi) \tau_{TOF}(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где  $A(\xi)$  — площадь поперечного сечения трубки тока на участке от  $s_{in}$  до  $s_{out}$ ,  $q(\xi)$  — расход вдоль трубки тока. Таким образом, рассчитав время пролета частицы вдоль линии тока и расход вдоль ассоциированной трубки тока, можно вычислить геометрические размеры сетки на трубках тока, при этом не требуется определять положение границ последней.

Построение линий тока начинается от нагнетательных скважин и заканчивается либо на добывающей скважине, либо на границе с нулевой скоростью фильтрации. Если в расчетной области присутствует ячейка, в которой скорость не равна нулю и через которую не проходит линия тока, то из этой ячейки испускается линия тока по градиенту скорости фильтрации и в противоположном направлении. Предполагается равномерность потока вблизи скважины, поэтому расход вдоль трубки тока равен усредненному расходу скважины по выпускаемым из нее трубкам тока.

Получающаяся в результате трассировки сетка является существенно неравномерной, так как узлы сетки соответствуют точкам пересечения линии тока с двумерной сеткой. Применение такой сетки для численного решения уравнений фильтрации налагает серьезные ограничения на величину временного шага. Для улучшения сходимости решения исходная сетка на линиях тока заменяется на равномерную, для которой пересчитываются время пролета между соседними узлами, а также геометрические характеристики новой сетки. Также стоит отметить, что предположение линейного распределения скорости фильтрации внутри декартовой ячейки нарушается вблизи скважины, в результате чего линии тока отстраиваются от границы ячейки, содержащей скважину [Beraldo et al., 2009; Mallison, 2004; Thiele, 1994]. Такой подход вносит дополнительную погрешность аппроксимации граничных условий, особенно если принимать во внимание размер расчетных ячеек при полномасштабном моделировании (порядка сотни метров). Для ячеек одномерной сетки, примыкающих к скважине, ширина  $\Delta y_{3/2}$  рассчитывается с использованием межблочной проводимости:

$$q_{sl} = TX_{3/2}(p_2 - p_1) = \lambda X_{3/2} \cdot \frac{\Delta z \Delta y_{3/2}}{x_2 - x_1} (p_2 - p_1) = \frac{Q_{l,m}}{n_{sl}}, \quad (15)$$

$$\Delta y_{3/2} = q_{sl} \cdot \frac{x_2 - x_1}{\Delta z \lambda X_{3/2} (p_2 - p_1)}, \quad (16)$$

где  $q_{sl}$  — суммарный расход фаз на входе в трубку тока,  $n_{sl}$  — количество линий тока, выходящих из ячейки  $(l, m)$ ,  $Q_{l,m}$  — дебит всех фаз в скважине,  $\lambda X_{3/2}$  — суммарная подвижность на границе расчетной ячейки. Давление  $p_1$  соответствует давлению в скважине, давление  $p_2$  определяется в результате интерполяции с глобальной сетки на трубку тока. Интерполяция глобальных переменных осуществляется по билинейному алгоритму, затем эти значения квадратично интерполируются на равномерную сетку на трубке тока.

После определения решения на трубках тока проводится интерполяция на исходную неравномерную сетку на трубке тока. Затем для обратной интерполяции решения с трубок тока на глобальную сетку используется алгоритм, описанный в [Bordbar, Faroughi, 2018]. Значение в узле двумерной сетки вычисляется как средневзвешенное значение по трубкам тока, проходящим через рассматриваемую ячейку, где в качестве веса используется объем сегмента трубки тока:

$$\bar{U}_{l,m} = \frac{\sum_{\beta=1}^{n_s} q_{\beta} \tau_{TOF,\beta} \bar{U}_{\beta}}{\sum_{\beta=1}^{n_s} q_{\beta} \tau_{TOF,\beta}}, \quad (17)$$

где  $\vec{U}_{l,m}$  — вектор неизвестных в ячейке  $(l,m)$ , суммирование проводится по всем линиям тока, пересекающим эту ячейку.

Так как направление кондуктивного теплопереноса не совпадает со скоростью фильтрации, учет теплопроводности при решении системы уравнений (7) вдоль линий тока производится на отдельном этапе, после интерполяции решения на двумерную сетку. Пересчет внутренней энергии и температуры происходит так же, как и в двумерном случае, путем решения вспомогательных уравнений (10)–(11) на интервале времени, в течение которого фильтрация рассчитывалась на линиях тока.

## 5. Результаты моделирования

Для проверки предложенного численного метода, а также его реализации был проведен ряд расчетов. Для проверки реализации многофазной фильтрации рассматривалась задача плоскопараллельного вытеснения нефти водой в изотермической постановке (задача Баклея–Леверетта). В невозмущенном пласте, насыщенном нефтью, включаются нагнетательная и добывающая скважины, расположенные на границах расчетной области. Закачка воды и отбор флюидов осуществляются при постоянном забойном давлении. Для ньютоновской фильтрации несжимаемых флюидов рассматриваемая задача допускает аналитическое решение. На рис. 3 представлены распределения водонасыщенности по координате для аналитического решения и численного решения, полученного при разных размерах расчетных ячеек. Из представленных распределений видно, что область вытеснения разбивается на невозмущенную и возмущенную части, между которыми насыщенность меняется скачкообразно. Такое распределение насыщенности является следствием гиперболического характера уравнений, получающихся при решении задачи Баклея–Леверетта в предположении несжимаемости флюидов [Басниев и др., 1993]. В то же время при сгущении расчетной сетки численное решение сходится к аналитическому, причем площадь под графиком насыщенности сохраняется, что отражает консервативность используемой разностной схемы.

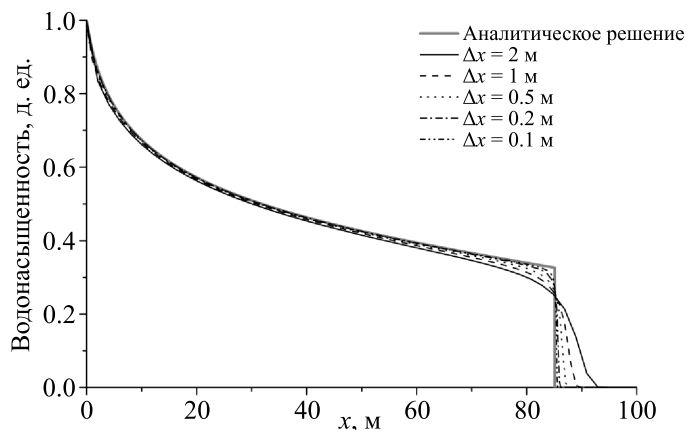


Рис. 3. Распределение водонасыщенности при плоскопараллельном вытеснении

Для тестирования предложенного алгоритма учета негладких коэффициентов была рассмотрена задача однофазной прямолинейно-параллельной фильтрации упругой вязкопластичной жидкости. В начальный момент времени в нефтяном пласте включается галерея из добывающих скважин. Контроль скважин осуществляется по постоянному забойному давлению. Нефть движется по закону фильтрации с предельным градиентом. После начала работы скважин расчетная область разбивается на зону, охваченную воздействием от скважин, и невозмущенный пласт, причем размер этой области при больших временах стремится к величине  $\Delta p/\gamma$ .

На рис. 4 представлены результаты моделирования для различных моментов времени. Видно, что в начальный момент времени размер воронки депрессии немного меньше аналитического решения, однако с увеличением времени результаты моделирования лучше согласуются с аналитическим решением. Учитывая, что при моделировании вариантов разработки месторождений используются временные шаги порядка десятков часов, использование представленного метода учета негладких коэффициентов актуально для таких задач.

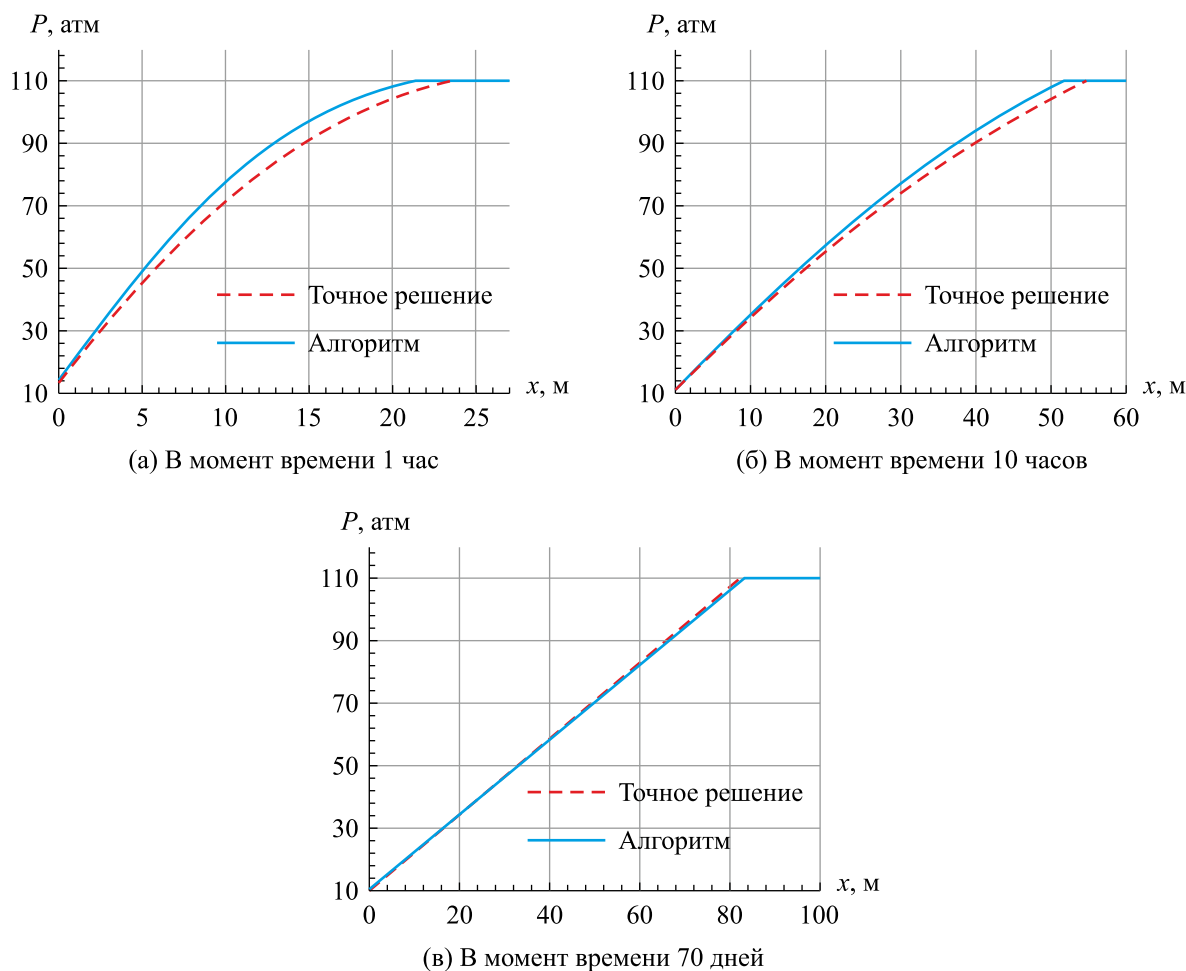


Рис. 4. Распределение давления при однофазной фильтрации упругой вязкопластичной жидкости при различных временах. Начальное пластовое давление равно 110 атм. В левом углу расчетной области расположена добывающая скважина, забойное давление которой равно 10 атм. Предельный градиент — 1.2 атм/м

Также были проведены тестовые расчеты неизотермического вытеснения в двумерной области. Рассматривалась плоская задача фильтрации упругой ньютоновской жидкости. В центре пласта располагается нагнетательная скважина, в которой поддерживаются постоянное забойное давление и температура закачиваемой воды. Пласт замкнутый: на границах заданы условия непротекания. Сравнение проводилось с результатами расчетов на коммерческом симуляторе. На рис. 5–6 представлены соответственно зависимости скорости закачки (приемистости) от времени и давления в ячейке со скважиной от времени. Полученные результаты моделирования в разработанной программе хорошо согласуются с результатами моделирования в коммерческом пакете. Таким образом, численный метод и его реализация позволяют проводить корректные расчеты неизотермической двумерной и одномерной фильтрации неньютоновских жидкостей.

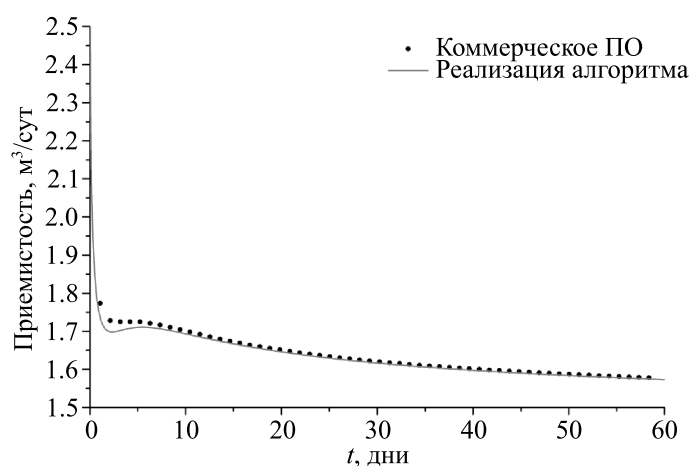


Рис. 5. Зависимость приемистости от времени при моделировании закачки горячей воды в случае плоской неизотермической фильтрации ньютоновских жидкостей. Рассматривается замкнутый пласт, вскрытый одиночной скважиной, работающей с постоянным забойным давлением и температурой закачиваемой воды

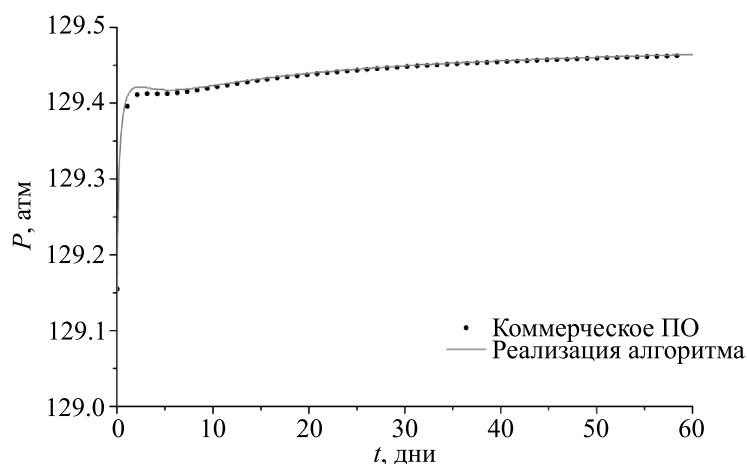


Рис. 6. Зависимость давления в ячейке со скважиной от времени при моделировании закачки горячей воды в случае плоской неизотермической фильтрации ньютоновских жидкостей. Рассматривается замкнутый пласт, вскрытый одиночной скважиной, работающей с постоянным забойным давлением и температурой закачиваемой воды

Для проверки реализации метода линий тока были проведены тестовые расчеты на элементе симметрии пятиточечной системы разработки (рис. 7). В левом верхнем углу расчетной области располагается нагнетательная скважина, закачивающая горячую воду заданной температуры при постоянном забойном давлении. В правом нижнем углу — добывающая скважина, работающая при постоянном забойном давлении. Изначально пласт насыщен водой и нефтью. Исследовалась сходимость представленного метода при изменении числа линий тока, сетки на линиях тока, соотношения между временем расчета на линиях тока и на глобальной сетке. Результаты расчетов сопоставлялись с результатами моделирования в коммерческом пакете с использованием пятиточечного и девятиточечного разностных шаблонов.

На рис. 8–9 приведены результаты расчетов с использованием линий тока при изменении числа линий тока. Видно, что во всех расчетах ввиду более раннего прорыва воды (при 3000 днях) скорость закачки воды превышает результат, полученный на пятиточечном и девятиточечном разностных шаблонах без использования линий тока (прорыв воды при 3500 днях). Это связано с тем, что фронт вытеснения направлен в диагональном направлении, поэтому при расчете на пятиточечном шаблоне фронту вытеснения приходится преодолевать больший путь,

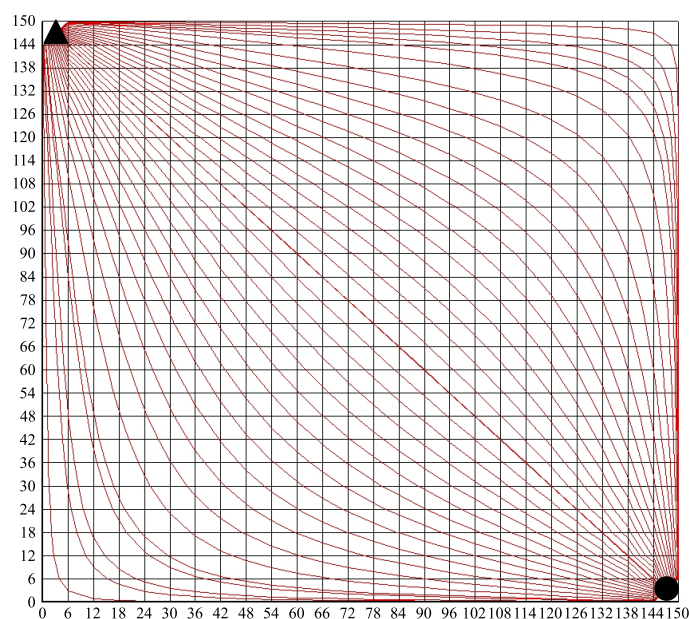


Рис. 7. Расчетная область и пример построения линий тока. Рассматривается элемент пятиточечной системы разработки, в котором нагнетательная скважина располагается в левом верхнем углу, а добывающая скважина располагается в правом нижнем углу

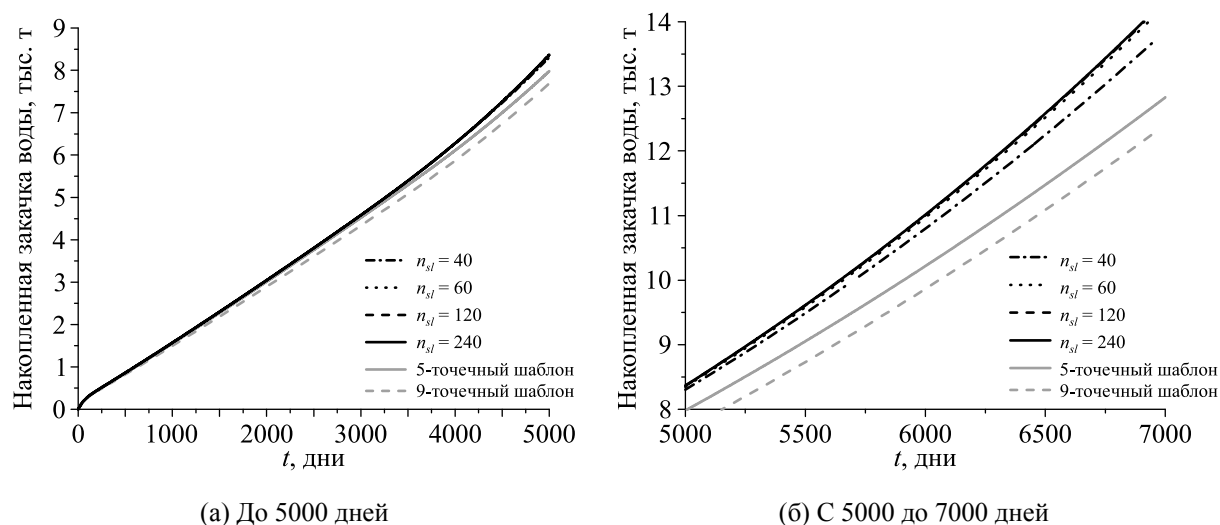


Рис. 8. Зависимость накопленной закачки воды от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки с различным количеством линий тока  $n_{sl}$

так как перетоки между ячейками в диагональном направлении отсутствуют. В то же время использование девятиточечного разностного шаблона значительно не меняет результат моделирования, так как доля потока, проходящего в диагональном направлении, в 2 раза меньше доли потока в горизонтальном направлении [Shiralkar, Stephenson, 1987].

Кроме анализа чувствительности решения к изменению числа линий тока, были проведены тестовые расчеты при изменении сетки на линиях тока, а также расчеты при различном соотношении времени расчета на глобальной сетке ( $\tau_{\text{global}}$ ) и на сетке из линий тока ( $\tau_{\text{stream}}$ ). На рис. 10–13 представлены результаты тестовых расчетов. Анализ полученных результатов показывает, что для корректного моделирования рассматриваемой задачи необходимо использовать

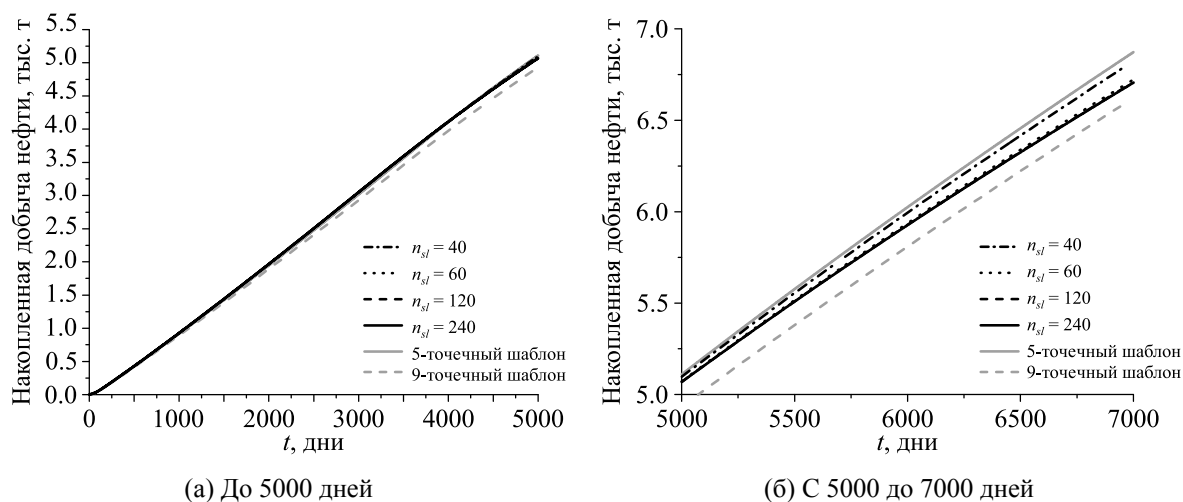


Рис. 9. Зависимость накопленной добычи нефти от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки с различным количеством линий тока  $n_{sl}$

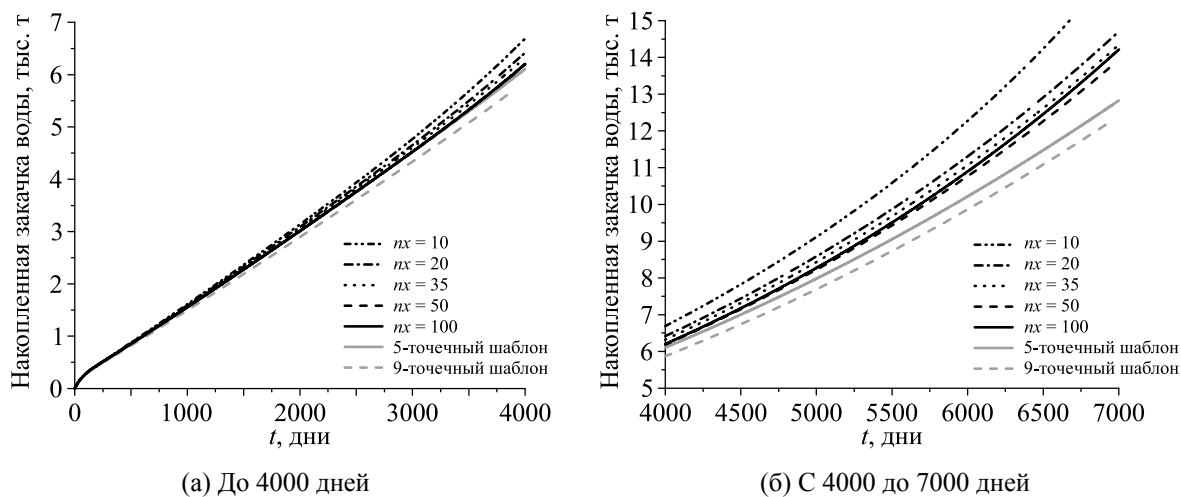


Рис. 10. Зависимость накопленной закачки воды от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки на различных сетках вдоль линий тока  $n_x$

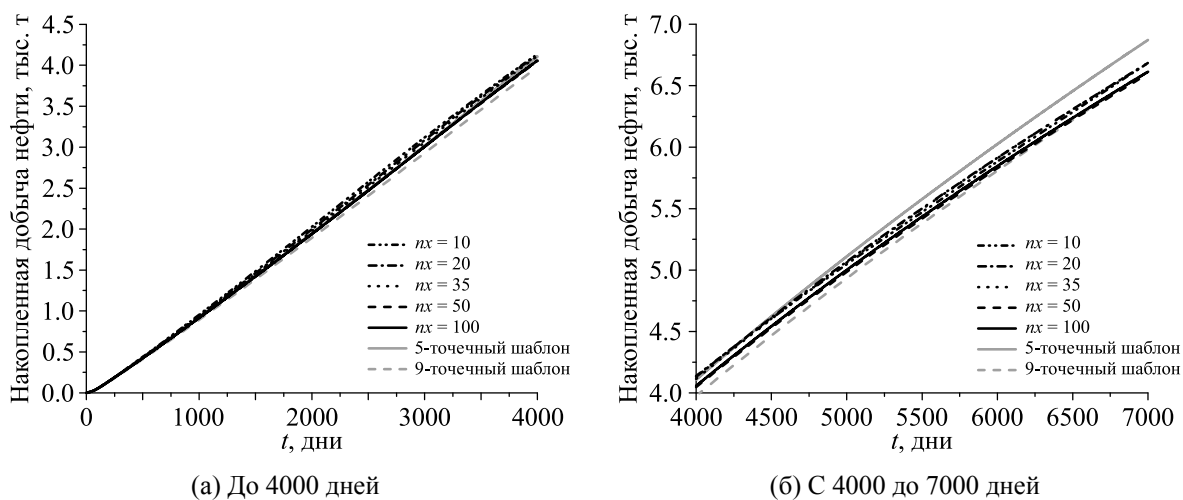


Рис. 11. Зависимость накопленной добычи нефти от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки на различных сетках вдоль линий тока  $n_x$



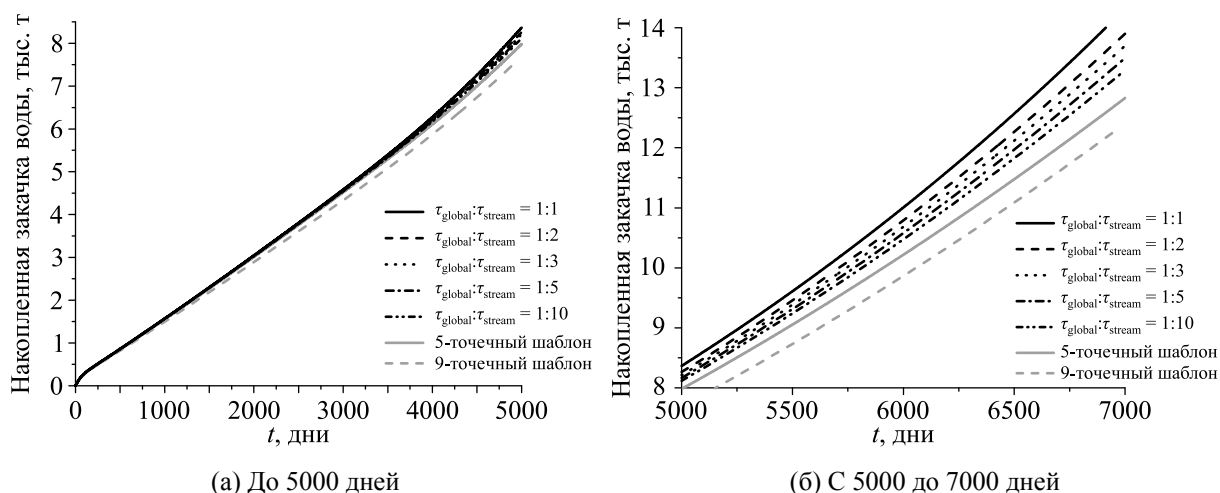


Рис. 12. Зависимость накопленной закачки воды от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки с различным соотношением между временем расчета на глобальной сетке  $\tau_{\text{global}}$  и на линиях тока  $\tau_{\text{stream}}$

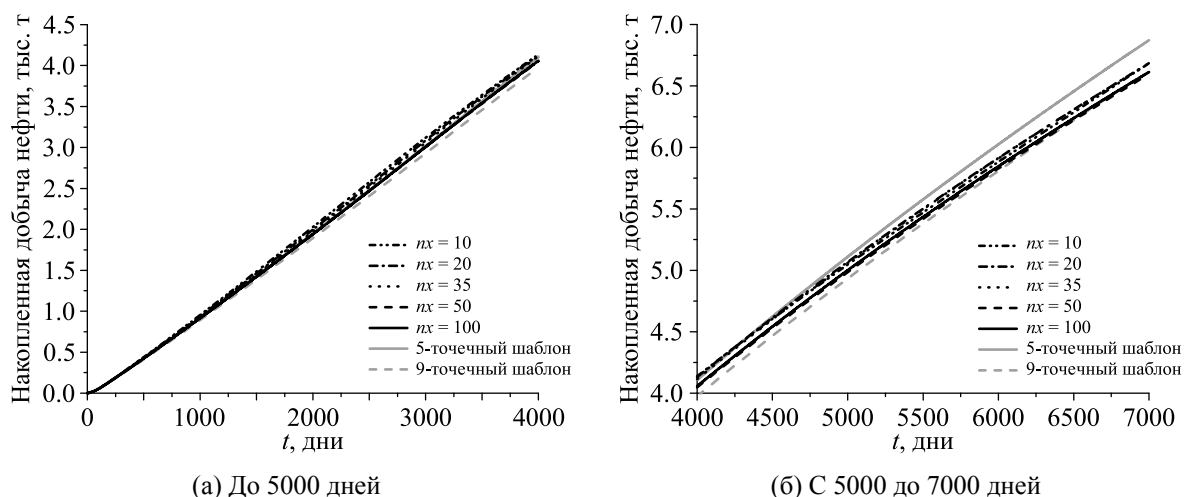


Рис. 13. Зависимость накопленной добычи нефти от времени при моделировании элемента пятиточечной системы разработки с различным соотношением между временем расчета на глобальной сетке  $\tau_{\text{global}}$  и на линиях тока  $\tau_{\text{stream}}$

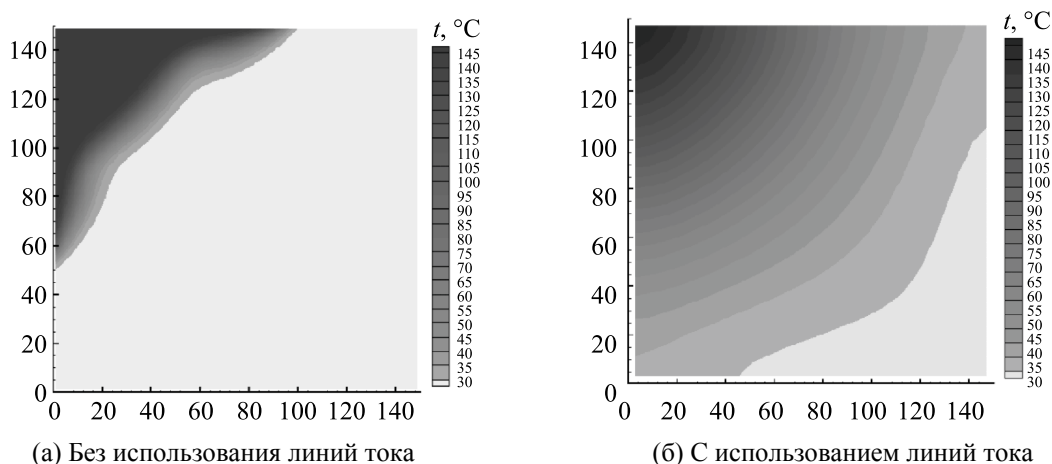


Рис. 14. Поле температуры, полученное в результате моделирования вытеснения ньютоновской нефти горячей водой на элементе пятиточечной системы разработки

не менее 20 ячеек на линиях тока. В противном случае из-за большой погрешности в интерполяции с исходной неравномерной сетки на линиях тока на равномерную сетку закачка воды значительно завышается (рис. 10, 11). В то же время изменение соотношения времен  $\tau_{global}$  и  $\tau_{stream}$  слабо сказывается на результатах расчетов (рис. 12, 13). Полученные в ходе расчетов распределения температуры обладают физической достоверностью (рис. 14). Таким образом, реализация метода линий тока позволяет проводить многовариантные расчеты неизотермической нелинейной фильтрации.

## 6. Заключение

В работе разработан новый метод учета негладких коэффициентов, возникающих при решении системы уравнений вязкопластичной фильтрации нефти. Проведенные тестовые расчеты подтверждают корректность представленного метода. Кроме того, использование разработанного алгоритма учета нелинейности обеспечивает высокую скорость расчета рассматриваемых задач, при этом не изменяя предельную зону возмущения, в результате чего не искажается коэффициент охвата разработкой.

Также в работе предложен метод моделирования задач фильтрации с использованием линий тока. Отличительной особенностью этого метода является рассмотрение процесса интегрирования как совокупности квазиравновесных состояний, между которыми система уравнений решается на исходной двумерной сетке. Использование метода линий тока является эффективным инструментом моделирования, так как допускает эффективное распараллеливание и обеспечивает физическую достоверность результатов, что было подтверждено тестовыми расчетами.

## Список литературы (References)

- Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.  
*Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M. Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [Theory of unsteady filtration of fluids and gases]. — Moscow: Nedra, 1984 (in Russian).
- Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика: учебник для вузов. — М.: Недра, 1993.  
*Basniev K. S., Kochina I. N., Maksimov V. M. Podzemnaya gidromekhanika: uchebnik dlya vuzov* [Underground hydromechanics]. — Moscow: Nedra, 1993 (in Russian).
- Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Наука, 1994.  
*Belotserkovsky O. M. Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred* [Numerical simulation in Continuous Media Mechanics]. — Moscow: Nauka, 1994 (in Russian).
- Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М.: Наука, 1975.  
*Bernadiner M. G., Entov V. M. Gidrodinamicheskaya teoriya fil'tratsii anomal'nykh zhidkosti* [Hydrodynamic theory for flow of anomalous fluids]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
- Бородин С. Л. Численные методы решения задачи Стефана // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. — 2015. — Т. 1, № 3. — С. 164–175.  
*Borodin S. L. Chislennyye metody resheniya zadachi Stefana* [Numerical Solution of The Stefan's Problem] // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy. — 2015. — Vol. 1, No. 3. — P. 164–175 (in Russian).
- Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы (введение в теорию): учебное пособие. — М.: Наука, 1977.  
*Godunov S. K., Ryabenkii V. S. Raznostnye skhemy (vvedenie v teoriyu): uchebnoe posobie* [Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory]. — Amsterdam: Elsevier Science, 1987.

- Железнякова А. Л.* Метод расщепления по физическим процессам для решения задач гиперзвуковой аэродинамики на неструктурированных сетках // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. — 2013. — Т. 14, № 2. — С. 1–7.  
*Zheleznyakova A. L.* Metod rasshchepleniya po fizicheskim protsessam dlya resheniya zadach giperzvukovoi aerodinamiki na nestrukturirovannykh setkakh [The method for splitting into physical processes for solving hypersonic aerodynamics problems on unstructured grids] // Physico-chemical kinetics in gas dynamics. — 2013. — Vol. 14, No. 2. — P. 1–7.
- Каневская Р. Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.  
*Kanevskaya R. D.* Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamicheskikh protsessov razrabotki mestorozhdenii uglevodorodov [Mathematical Modeling of Hydrodynamic Processes of Hydrocarbon Field Development]. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies, 2002 (in Russian).
- Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. — Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1981.  
*Kovenya V. M., Yanenko N. N.* Metod rasshchepleniya v zadachakh gazovoi dinamiki [The splitting method for gas dynamics problems]. — Novosibirsk: Nauka. The Siberian Branch, 1981 (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Юрайт, 2017.  
*Magomedov K. M., Kholodov A. S.* Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody [Numerical Grid-Characteristic Methods]. — Moscow: Urait, 2017 (in Russian).
- Марчук Г. И.* Методы расщепления. — М.: Наука, 1988.  
*Marchuk G. I.* Metody rasshchepleniya [Splitting methods]. — Moscow: Nauka, 1988.
- Холодов А. С.* О Построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1978. — Т. 18, № 6. — С. 1476–1492.  
*Kholodov A. S.* O Postroenii raznostnykh skhem s polozhitel'noi approksimatsiei dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa [Construction of difference schemes with positive approximation for hyperbolic equations] // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 18, No. 6. — P. 116–132.
- Холодов А. С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1984. — Т. 24, № 9. — С. 1346–1358.  
*Kholodov A. S.* O postroenii raznostnykh skhem s polozhitel'noi approksimatsiei dlya uravnenii parabolicheskogo tipa [The construction of difference schemes with positive approximation for equations of parabolic type] // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 24, No. 5. — P. 41–48.
- Холодов А. С.* Сеточно-характеристические методы для многомерных задач механики сплошных сред // Школа-семинар социалистических стран «Вычислительная аэрогидромеханика»: сб. тез. докл. — М., 1985. — С. 110–114.  
*Kholodov A. S.* Setochno-kharakteristicheskie metody dlya mnogomernykh zadach mekhaniki sploshnykh sred [Grid-characteristic methods for multidimensional problems of continuum mechanics] // School-seminar of socialist countries «Computational aerohydrodynamics»: book of abstracts. — Moscow, 1985. — P. 110–114 (in Russian).
- Шевченко А. В.* Разработка и реализация численных методов моделирования многокомпонентной неізотермической фильтрации: дис. канд. ф.-м. н. — М.: МФТИ, 2015.  
*Shevchenko A. V.* Razrabotka i realizatsiya chislennykh metodov modelirovaniya mnogokomponentnoi neizotermicheskoi fil'tratsii [Development and realization of numerical methods for multicomponent nonisothermal filtration simulation]: PhD dissertation. — Moscow: MIPT, 2015 (in Russian).
- Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1967.  
*Yanenko N. N.* Metod drobnnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoi fiziki [The Method of Fractional Steps for the Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables]. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- Яненко Н. Н., Фролов В. Д., Неуважьев В. Е.* О применении метода расщепления для численного расчета движения теплопроводного газа в криволинейных координатах // Изв. СОАН СССР: серия техн. наук. — 1967. — Т. 2, № 8. — С. 74–82.  
*Yanenko N. N., Frolov V. D., Neuvazhayev V. E.* O primenении metoda rasshchepleniya dlya chislennogo rascheta dvizheniya teploprovodnogo gaza v krivolineinykh koordinatakh [On the application of splitting method for numerical

- simulation of heat conducting gas in curvilinear coordinates] // Proceedings of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences: Technical Sciences. — 1967. — Vol. 2, No. 8. — P. 74–82 (in Russian).
- Aziz Kh., Settari A.* Petroleum reservoir simulation. — London: Applied Science Publishers, 1979.
- Beraldo V. T., Blunt M. J., Schiozer D. J.* Compressible streamline-based simulation with changes in oil composition // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2009. — Vol. 12, No. 6. — P. 963–973.
- Blunt M. J., Lui K., Thiele M. R.* A Generalized Streamline Method to Predict Reservoir Flow // Petroleum Geoscience. — 1996. — Vol. 2 — P. 259–269.
- Bordbar A., Faroughi S., Faroughi S. A.* A Pseudo-TOF Based Streamline Tracing For Streamline Simulation Method In Heterogeneous Hydrocarbon Reservoirs // American Journal of Engineering Research. — 2018. — Vol. 7, No. 4. — P. 23–31.
- Cheng H., Osako I., Datta-Gupta A., King M.* A rigorous compressible streamline formulation for two- and three-phase black-oil simulation // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. — 2006. — Vol. 11, No. 4. — P. 407–417.
- Computer Modelling Group Ltd.* Advanced Process and Thermal Reservoir Simulator; CMG STARS, Version 2009. — Calgary, AB, Canada, 2009.
- Schlumberger Ltd.* Eclipse Version 2009 Software Manual. — 2009.
- Lake L. W., Johnston J. R., Stegemeier G. L.* Simulation and Performance Prediction of a Large-Scale Surfactant/Polymer Project // SPE Journal. — 1981. — Vol. 21 — P. 731–739.
- Mallison B. T.* Streamline-Based Simulation of Two-phase, Multicomponent Flow in Porous Media. — PhD thesis: Stanford University, 2004.
- Martin J. C., Wegner R. E.* Numerical Solution of Multiphase, Two-Dimensional Incompressible Flow Using Streamtube Relationships // SPE Journal. — 1979. — Vol. 19 — P. 313–323.
- Renard G.* A 2D Reservoir Streamtube EOR Model with Periodical Automatic Regeneration of Streamlines // In Situ. — 1990. — Vol. 14, No. 2. — P. 175–200.
- Pang Z. X., Liu H. Q.* The transient method and experimental study on threshold pressure gradient of heavy oil in porous media // Petroleum Engineering Journal. — 2012. — Vol. 5 — P. 7–13.
- Peaceman D. W.* Interpolation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // SPE Journal. — 1983. — Vol. 23, No. 3. — P. 531–543.
- Pollock D. W.* Semianalytical computation of path lines for finite-difference models // Ground Water. — 1988. — Vol. 26, No. 6. — P. 743–750.
- Shiralkar G. S., Stephenson R. E.* A General Formulation for Simulating Physical Dispersion and a New Nine-Point Scheme // SPE paper 16975 presented at the 62nd Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers. — Dallas, TX, 1987. — P. 115–120.
- Thiele M. R.* Modeling Multiphase Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes. — PhD thesis: Stanford University, 1994.
- Thiele M. R., Batycky R. P., Blunt M. J., Orr F. M.* Simulating Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes and Streamlines // SPE Reservoir Engineering. — 1996. — Vol. 10, No. 1. — P. 5–12.
- Usman P.* Development of Streamline-Based Simulators for Evaluation of Heavy Oil Recovery. — PhD Dissertation: Waseda University, Tokyo, 2007.
- Walas S.* Phase Equilibria in Chemical Engineering. — Boston, MA: Butterworth-Heinemann, 1985.
- Wilson G. M.* A Modified Redlich-Kwong EOS, Application to General Physical Data Calculations // Paper 15c presented at the AIChE National Meeting. — Cleveland, Ohio, 1968.
- Zhu Z.* Efficient simulation of thermal enhances oil recovery processes. — PhD dissertation: Stanford University, 2011.