КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 5 С. 667–678
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-5-667-678

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

УДК: 519.633

Параллельная реализация сеточно-характеристического метода в случае явного выделения контактных границ

А. М. Иванов[a], Н. И. Хохлов[b]

Московский физико-технический институт,
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: [a] ip-e@mail.ru, [b] k_h@inbox.ru

Получено 07.09.2018, после доработки — 20.09.2018.
Принято к публикации 21.09.2018.

В работе рассматривается применение технологии Message Passing Interface (MPI) для распараллеливания программного алгоритма, основанного на сеточно-характеристическом методе, применительно к численному решению уравнения линейной теории упругости. Данный алгоритм позволяет численно моделировать распространение динамических волновых возмущений в твердых деформируемых телах. К такого рода задачам относится решение прямой задачи распространения сейсмических волн, что представляет интерес в сейсмике и геофизике. В основе решателя лежит сеточно-характеристический метод. В работе предложен способ уменьшения времени взаимодействия между процессами MPI в течение расчета. Это необходимо для того, чтобы можно было производить моделирование в сложных постановках, при этом сохраняя высокую эффективность параллелизма даже при большом количестве процессов. Решение проблемы эффективного взаимодействия представляет большой интерес, когда в расчете используется несколько расчетных сеток с произвольной геометрией контактов между ними. Сложность данной задачи возрастает, если допускается независимое распределение узлов расчетных сеток между процессами. В работе сформулирован обобщенный подход для обработки контактных условий в терминах переинтерполяции узлов из заданного участка одной сетки в определенную область второй сетки. Предложен эффективный способ распараллеливания и установления эффективных межпроцессорных коммуникаций. Приведены результаты работы реализованного программного кода: получены волновые поля и сейсмограммы как для 2D-, так и для 3D-постановок. Показано, что данный алгоритм может быть реализован в том числе на криволинейных расчетных сетках. Рассмотренные постановки демонстрируют возможность проведения расчета с учетом топографии среды и криволинейных контактов между слоями. Это позволяет получать более точные результаты, чем при расчете только с использованием декартовых сеток. Полученная эффективность распараллеливания — практически 100 % вплоть до 4096 процессов (за основу отсчета взята версия, запущенная на 128 процессах). Далее наблюдается ожидаемое постепенное снижение эффективности. Скорость спада не велика, на 16384 процессах удается сохранить 80%-ную эффективность.

Ключевые слова: параллельное программирование, сеточно-характеристический метод, MPI, структурированные сетки

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00914 А. Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», http://ckp.nrcki.ru/.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2018 VOL. 10 NO. 5 P. 667–678
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-5-667-678

Ки&М

SPECIAL ISSUE

UDC: 519.633

Parallel implementation of the grid-characteristic method in the case of explicit contact boundaries

A. M. Ivanov[a], N. I. Khokhlov[b]

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

E-mail: [a] ip-e@mail.ru, [b] k_h@inbox.ru

Received 07.09.2018, after completion — 20.09.2018.
Accepted for publication 21.09.2018.

We consider an application of the Message Passing Interface (MPI) technology for parallelization of the program code which solves equation of the linear elasticity theory. The solution of this equation describes the propagation of elastic waves in demormable rigid bodies. The solution of such direct problem of seismic wave propagation is of interest in seismics and geophysics. Our implementation of solver uses grid-characteristic method to make simulations. We consider technique to reduce time of communication between MPI processes during the simulation. This is important when it is necessary to conduct modeling in complex problem formulations, and still maintain the high level of parallelism effectiveness, even when thousands of processes are used. A solution of the problem of effective communication is extremely important when several computational grids with arbirtrary geometry of contacts between them are used in the calculation. The complexity of this task increases if an independent distribution of the grid nodes between processes is allowed. In this paper, a generalized approach is developed for processing contact conditions in terms of nodes reinterpolation from a given section of one grid to a certain area of the second grid. An efficient way of parallelization and establishing effective interprocess communications is proposed. For provided example problems we provide wave fileds and seismograms for both 2D and 3D formulations. It is shown that the algorithm can be realized both on Cartesian and on structured (curvilinear) computational grids. The considered statements demonstrate the possibility of carrying out calculations taking into account the surface topographies and curvilinear geometry of curvilinear contacts between the geological layers. Application of curvilinear grids allows to obtain more accurate results than when calculating only using Cartesian grids. The resulting parallelization efficiency is almost 100% up to 4096 processes (we used 128 processes as a basis to find efficiency). With number of processes larger than 4096, an expected gradual decrease in efficiency is observed. The rate of decline is not great, so at 16384 processes the parallelization efficiency remains at 80%.

Keywords: parallel programming, grid-characteristic method, MPI, structured grids

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 667–678 (Russian).

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 18-07-00914 A. This work has been carried out using computing resources of the federal collective usage center Complex for Simulation and Data Processing for Mega-science Facilities at NRC “Kurchatov Institute”, http://ckp.nrcki.ru/.

Введение

Решение уравнений линейной теории упругости широко используется для моделирования распространения сейсмических волн в гетерогенных средах. Разведочная геофизика, в особенности сейсмическая томография, и сейсмология полагаются на методы моделирования этих волн, которые инициируются источником деформаций и распространяются вглубь земли. Решение прямой задачи может помочь уточнить положение, размеры и форму искомого объекта с помощью построения синтетических сейсмограмм.

В настоящее время существует ряд методов для моделирования распространения упругих волн. Среди них методы конечных разностей [Virieux, 1986; Moczo et al., 2010], конечных элементов [Moczo et al., 2010], спектральных элементов [Komatitsch et al., 1999], разрывный метод Галёркина [Kaser, Dumbser, 2006] привлекают наибольшее внимание. В этой работе рассматривается сеточно-характеристический метод, предложенный в [Магомедов, Холодов, 1988], реализованный на регулярной расчетной сетке. Данный метод широко применяется для решения задач распространения динамических волновых возмущений в гетерогенных средах [Петров, Холодов, 1984; Петров и др., 1990; Favorskaya, Petrov, 2018]. Сравнение разрывного метода Галёркина с сеточно-характеристическим методом на структурированных и неструктурированных сетках приведено в работе [Бирюков и др., 2016], где показаны преимущества сеточно-характеристического метода для рассматриваемых задач. Это явный метод, в котором на каждом шаге итерации производится пересчет значений сетки на следующий слой во временной области. Каждый узел сетки при этом вычисляется на основе соседних узлов с предшествующего временного слоя. Следовательно, метод позволяет произвести разбиение сетки на блоки (параллелизм по данным), с которыми разные процессы или потоки могут работать одновременно.

Большое количество работ описывает применение технологий параллельного программирования для ускорения данного типа методов. Например, авторы [Liu et al., 2018] описывают применение векторных инструкций AVX совместно с помощью OpenMP для ускорения уравнения акустики с использованием ядер центрального процессора (CPU). В работе [Micikevicius, 2009] приводятся примеры применения графических ускорителей (GPU) для ускорения метода конечных разностей с использованием технологии CUDA. В другой работе [Martin et al., 2008] технология MPI применяется для сейсмического моделирования с методом спектральных элементов. В дополнение к прямой задаче, упомянутой выше, решение обратной задачи также может быть эффективно распараллеленно [Voinov et al., 2016].

Кроме этого, в ряде работ говорится о применении технологий параллельного программирования в гетерогенных средах, в которых используется несколько CPU или GPU на физически разделенных машинах, решающих задачу и синхронизирующих данные путем взаимодействия по сети. В работе [Mu et al., 2013] представлено применение CUDA и MPI для ускорения разрывного метода Галёркина. Другая работа [Komatitsch, 2011] демонстрирует применение метода спектральных элементов в гетерогенной среде.

Примеры распараллеливания сеточно-характеристического метода с использованием разных технологий были предложены в ряде работ. В [Khokhlov et al., 2016] мы представили способ использования OpenCL для запуска сеточно-характеристического метода на GPU. В работе [Khokhlov et al., 2015] описано применение векторных инструкций SSE и AVX совместно с технологией MPI.

Из-за высокой степени масштабируемости [Gabriel et al., 2004] параллельных программ, написанных с использованием MPI, и возможности включения в них других технологий распараллеливания, которые используют несколько CPU или GPU на один хост MPI, крайне важно установить эффективный обмен данными между отдельными машинами. Данная работа нацелена на проблему установления эффективных (с точки зрения производительности) связей между процессами MPI для синхронизации узлов сеток на контактах и границах. В качестве примера приводится задача с большим объемом контактов между сетками. Для данной задачи представлены результаты вычисления, полученные с помощью реализации сеточно-характеристического метода, распараллеленного с использованием MPI.

Границы между различными материалами могут быть смоделированы с использованием только одной декартовой сетки, без явного выделения границ. Это может быть сделано путем задания различных параметров среды в различных узлах сетки, однако численная ошибка на таким образом заданных границах будет зависеть от шага пространственной дискретизации. В работе использованы криволинейнейные сетки для получения более точных значений на контактах. Это также усложняет установление эффективной передачи данных между контактирующими сетками.

Модель упругой среды

Рассматривается модель линейно-упругого материала [LeVeque, 2002] для описания динамики распространения волн. Поведение бесконечно малого объема определяется уравнением движения и законом Гука.

Уравнение движения:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \tag{1}$$

где ρ — упругость, υ_i — компоненты вектора скорости, t — время, σ_{ij} — компоненты тензора упругости, x_j — пространственные координаты, f_i — внешняя сила.

Закон сохранения:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = q_{ijkl}\frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t}, \tag{2}$$

где q_{ijkl} — тензор 4-го порядка:

$$q_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{3}$$

ϵ_{kl} — тензор деформаций, δ_{ij} — дельта Кронекера. λ и μ — параметры Ламе. Связь между тензором деформаций и скоростью следующая:

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Уравнения (1), (2) могут быть также записаны в тензорной форме:

$$\rho\dot{\upsilon} = \nabla \cdot T, \tag{5}$$

$$\dot{T} = \lambda\,(\nabla \cdot \upsilon)\,I + \mu(\nabla \otimes \upsilon + \upsilon \otimes \nabla), \tag{6}$$

где υ — вектор скорости, T — тензор упругости, $\otimes$ — тензорное произведение векторов, I — единичный тензор.

Для корректной обработки контактов между сетками с разными свойствами, или, другими словами, между геологическими слоями из разных материалов, должны быть выполнены следующие равенства на контактах (в предположении, что слои полностью прилегают друг к другу): $\upsilon^a = \upsilon^b$, $f^a = -f^b$.

Сеточно-характеристический метод

Уравнения (1), (2) могут быть переписаны в матричном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{7}$$

где вектор u состоит из компонентов вектора скорости υ и тензора упругости σ. A_i — матрицы, явный вид которых может быть найден в [LeVeque, 2002].

Применяя метод расщепления по направлениям [Nakamura et al., 2001], решение первоначального матричного уравнения заменяется на решения нескольких уравнений похожей формы, где сумма в правой части (7) заменена на одиночные члены этой суммы. В трехмерном случае решаются следующие 3 уравнения в порядке их появления:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}. \tag{10}$$

Здесь используется одно и то же u, при вычислении значений на следующем шаге по времени, так что на каждый шаг итерации по времени приходится 3 составных шага: $u' = F_1(u^n)$, $u'' = F_2(u')$, $u^{n+1} = F_3(u'')$. С помощью n обозначено число шагов по времени, а с помощью F_i — операторы, решающие уравнения, приведенные выше.

Далее будет рассмотрено только одно уравнение (8), остальные решаются аналогично. По определению, A_1 — гиперболическая, поэтому может быть преобразовано к диагональному виду: $A_1 = \Omega\Lambda\Omega^{-1}$. Здесь Ω — матрица из собственных векторов A_1, а Λ — диагональная матрица с собственными числами A_1 на диагонали.

Далее, вводятся инварианты Римана. Они имеют вид $\omega = \Omega^{-1}u$. Это позволяет переписать (8) как

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial \omega}{\partial x_1}. \tag{11}$$

Это приводит к независимым одномерным уравнениям переноса, причем их число равно рангу Λ. После численного решения каждого уравнения производится обратная замена: $u = \Omega\omega$.

Для решения одного одномерного уравнения переноса $u_t + \alpha u_x = 0$ ($\alpha > 0$) используется сеточно-характеристический метод [Холодов, Холодов, 1984]. Итоговая схема имеет 3 порядок точности по пространству:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma(\Delta_0 + \Delta_2)/2 + \sigma^2(\Delta_0 - \Delta_2)/2 + \sigma(\sigma^2 - 1)(\Delta_1 - 2\Delta_0 + \Delta_2)/6, \tag{12}$$

где $\Delta_0 = u_{m-1}^n - u_m^n$, $\Delta_1 = u_{m-2}^n - u_{m-1}^n$, $\Delta_2 = u_m^n - u_{m+1}^n$ и $\sigma = \alpha\tau/h$. Альтернативный подход к решению получившихся уравнений переноса — использование компактных схем высокого порядка [Голубев и др., 2016].

Монотонность обеспечивается критерием, основанным на свойстве точного решения:

$$\min(u_m^n, u_{m-1}^n) \le u_m^{n+1} \le \max(u_m^n, u_{m-1}^n). \tag{13}$$

Когда этот критерий применяется, точность решения понижается до 2 порядка.

В конце, когда значение u на следующем временном шаге $n + 1$ найдено, производится коррекция скоростей и сил на контактных границах.

Стратегия распараллеливания

Поскольку в нашей реализации сеточно-характеристического решателя используются регулярные сетки, узлы могут храниться в 2D/3D-массивах (в памяти они хранятся в виде непрерывных одномерных массивов). На вход решателю поступают номера процессов для каждой сетки, которые будут пересчитывать узлы внутри этих сеток. Решатель определяет наилучшее разбиение массивов на равные по размеру блоки для распределения работы между процессами путем вызова MPI_Dims_create. Кроме этого, возможно вручную задать желаемое распределение процессов. Количество блоков, на которые разбита сетка, такое же, как и число процессов, ассоциированное с сеткой. Это значит, что каждый процесс пересчитывает узлы на следующий временной шаг не более чем для одного блока сетки. В то время как процессы могут быть ответственны не более чем за один блок сетки, они могут одновременно обрабатывать несколько блоков с разных сеток.

Для упрощения синхронизации узлов на границах блоков внутри одной сетки создается специальный коммуникатор (MPI_Comm) и специальная группа (MPI_Group) для этой сетки. Конфигурационный файл, который поступает на вход программе, определяет процессы из коммуникатора MPI_COMM_WORLD, на основе которых создается новый коммуникатор. Синхронизация внутри сетки производится между шагами по времени, и каждый процесс может получить информацию о процессах, обрабатывающих соседние блоки. Зная точные номера процессов, которые готовы обмениваться пересчитанными узлами на границах блоков, процессы могут выполнять асинхронные операции приема и передачи (MPI_Isend, MPI_Irecv).

В противоположность синхронизации на границе блоков, при синхронизации на границах контактов между двумя сетками, процессы не знают номера процессов, с которыми обмениваться данными, так как геометрия контактов может быть произвольной. В первоначальной реализации использовалась функция MPI_Alltoall для того, чтобы все процессы коммуникатора MPI_COMM_WORLD содержали одинаковую информацию о декомпозиции. Основной причиной неэффективности такой стратегии являлось то, что процессы, которые не нуждаются в синхронизациях для продолжения расчета, все равно были обязаны участвовать в этом взаимодействии. Другими словами, была создана точка глобальной синхронизации на каждом временном шаге, которую можно было устранить.

Тогда были введены доступные всем процессам списки со свойствами всех сеток. Эти свойства содержат информацию о размерах сеток, номерах процессов, связанных с сетками, точных положениях блоков и их размерах для каждого из этих процессов. Списки свойств создаются в начале инициализации решателя, синхронизируются между всеми процессами и далее остаются неизменными. Для каждой сетки возможно получить номера процессов из MPI_COMM_WORLD, которые обрабатывают каждый блок. Следовательно, когда некоторый процесс должен обновить узлы на контактной границе для синхронизации с другим процессом, он знает, какой именно процесс содержит данные из другой сетки с этим контактом, поэтому он может установить обмен данными только с этим процессом. Более того, данный подход позволяет учитывать случай, в котором несколько процессов на границе одной сетки обмениваются данными с независимо распределенными процессами на границе другой сетки. Это значит, что декомпозиции сеток могут быть независимы друг от друга.

Информация о контактах на границах сеток задается обобщенным способом. Положение области в одной сетке, которая должна быть отправлена в заданную область другой сетки, поступает на вход решателю. Список таких указаний содержит полную информацию о контактах в модели с несколькими сетками. Данная информация используется на каждом шаге по времени, когда происходит синхронизация. Если положения узлов сетки не совпадают в точности, то производится переинтерполяция.

Топография поверхности

Здесь демонстрируется пример двумерной задачи, в которой важно использовать структурированную (криволинейную) сетку для получения корректных сейсмограмм. В данной искусственной постановке сравниваются волновые поля и сейсмограммы, посчитанные на двух моделях. Обе модели имеют одинаковые начальные условия, однако одна использует декартову сетку, в то время как другая — структурированную. Вычисленные волновые поля в момент времени t = 150 мс представлены на рис. 1, 2, а сейсмограммы — на рис. 3, 4. Размер шага по времени — dt = 0.2 мс. Всего произведено 1000 шагов по времени, что соответствует 200 мс.

Длина расчетной области — 800 м. Высота — 500 м. Скорость P-волны — c_p = 2500 м/с, S-волны — c_s = 1500 м/с. Плотность среды — ρ = 1500 г/см^3. Начальное возмущение в среде задано на глубине 80 м под землей. 300 приемников расположены симметрично по отношению к центру источника взрыва, на глубине 50 м, с шагом 2 м между соседними приемниками.

Этот пример четко демонстрирует разницу между двумя решениями. Можно заметить дополнительные отражения начальной волны от криволинейной границы как на волновом поле (рис. 2), так и на сейсмограмме (рис. 4). Это подтверждает возможность получать более точные решения на структурированных сетках.

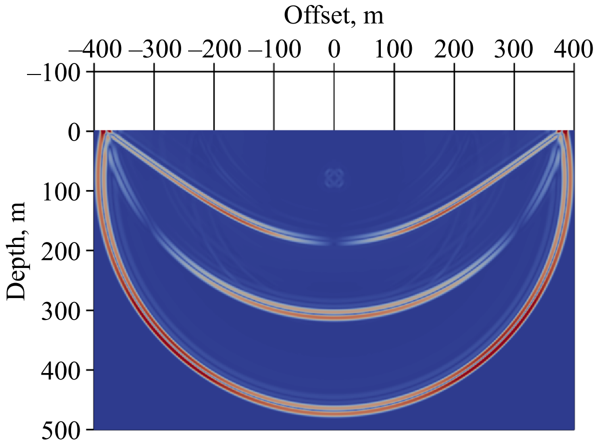

Рис. 1. Волновое поле при расчете на декартовой сетке

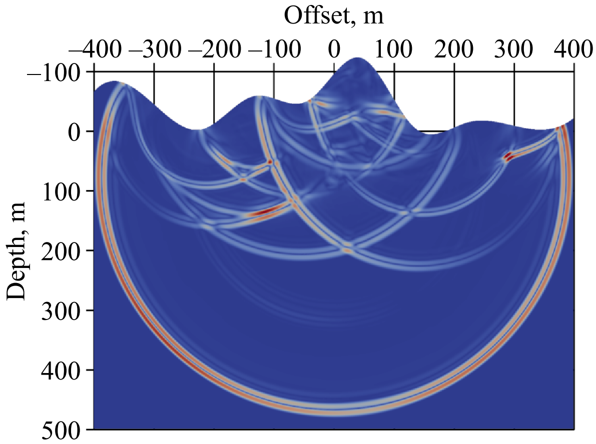

Рис. 2. Волновое поле при расчете на криволинейной сетке

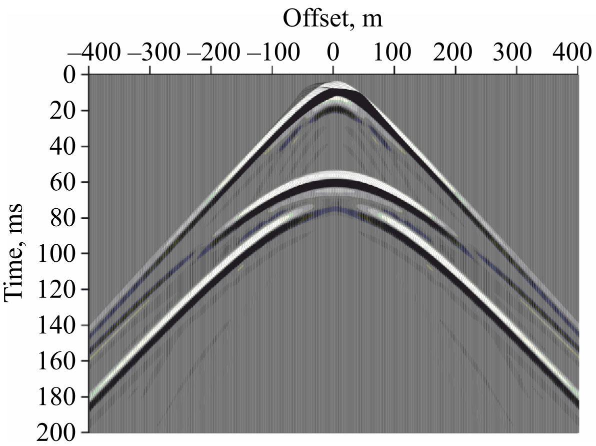

Рис. 3. Сейсмограмма при расчете на декартовой сетке

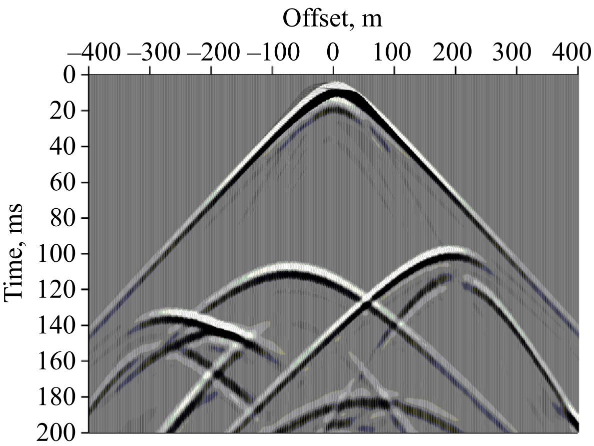

Рис. 4. Сейсмограмма при расчете на криволинейной сетке

Криволинейная 3D-модель с контактами

Используется модель слоистой среды с криволинейными контактами между слоями. Модель имеет 8 слоев, каждый из которых обозначен отдельным цветом на рис. 5. Параметры каждого слоя даны в таблице 1. Эти параметры соответствуют реальной местности [Голубев и др., 2017]. υ_p и υ_s — скорости P- и S-волн внутри каждого слоя, а ρ — плотность.

Источник волн задан в виде взрыва с помощью применения вертикальной силы в объеме верхнего слоя. Изменение этой силы во времени задано с помощью импульса Рикера с частотой 30 Гц.

Поверхность верхнего слоя считается плоской. На дневной поверхности задано условие свободной границы, а на всех остальных границах — поглощающее граничное условие.

Количество узлов во всей расчетной области — $601 \times 601 \times 421$. Количество узлов по оси Z от каждого слоя указано в таблице 1. Всего рассчитано 40 000 шагов по времени, а размер одного шага — 0.05 мс.

На рис. 6 разными цветами изображены блоки с узлами, пересчитываемые разными процессами. Это упрощенный вариант с 16 процессами, каждый цвет обозначает один процесс. Для наглядности слои также были разделены по оси Z, хотя в реальном расчете для сеток с небольшим количество узлов по оси Z такое разбиение не производилось, поскольку значительно ухудшало производительность.

Таблица 1. Параметры геологических слоев

Слой	υ_p, м/с	υ_s, м/с	ρ, кг/м^3	Число узлов по оси Z
1	2170	674	2000	120
2	2130	795	2300	20
3	2500	1090	2200	60
4	2680	1220	2300	20
5	3000	1385	2400	106
6	5550	3144	2700	10
7	6000	1250	2800	20
8	6000	1550	2850	65

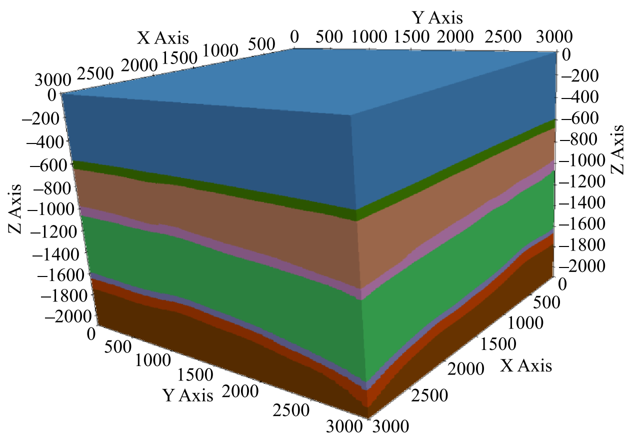

Рис. 5. Форма геологических слоев

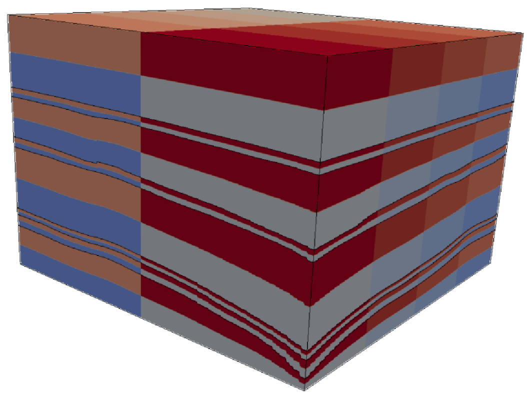

Рис. 6. Распределение 16 процессов по сеткам. Каждая сетка разделена на $4 \times 2 \times 2$ блоков

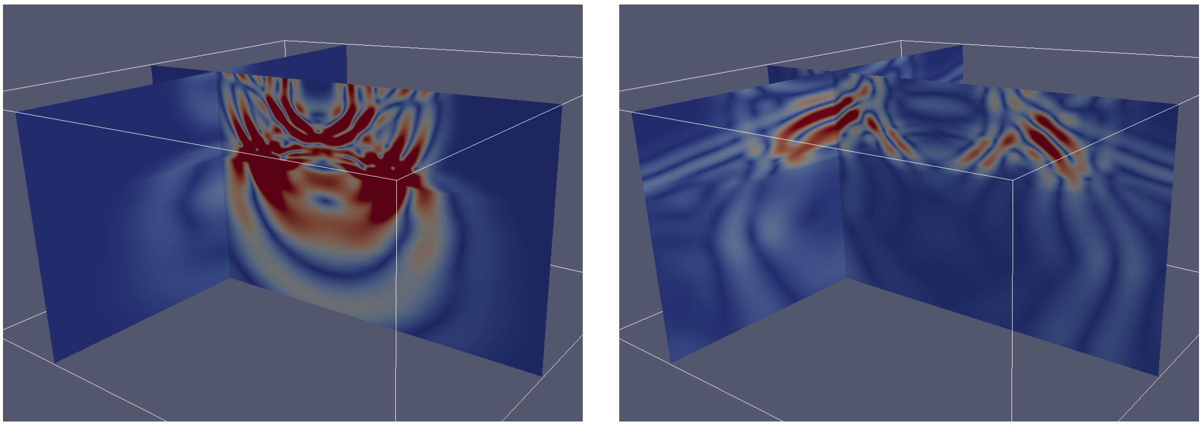

Рис. 7. Волновые поля в два разных момента времени

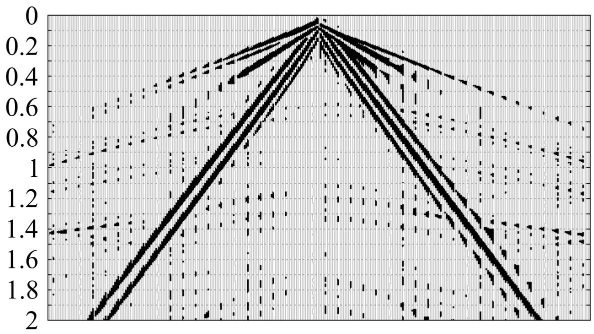

Рис. 8. Компонента вектора скорости v_x

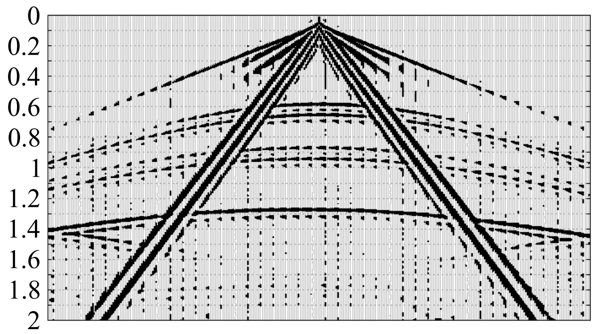

Рис. 9. Компонента вектора скорости v_z

Для части шагов по времени были получены волновые поля. Каждое волновое поле представляет абсолютное значение скорости в каждом узле сетки. На рис. 7 изображены две перпендикулярные плоскости (срезы волнового поля), на которых цвет обозначает величину абсолютного значения скорости.

Сейсмограммы с удаленным импульсом с источника изображены на рис. 8 и 9. Сигнал с источника намеренно вырезан, потому что его амплитуда намного выше, чем отражения от контактов между слоями.

Производительность

Была измерена производительность нашей параллельной реализации сеточно-характеристического метода. Результаты изображены на рис. 10. Ускорение на p процессах рассчитывалось по формуле T_p/T_{128}, где T_p — время расчета с использованием p процессов. Можно заметить, что представленная реализация масштабируется до 4096 процессов практически без потери эффективности. При увеличении числа процессов наблюдается ожидаемое снижение эффективности, однако алгоритм все еще демонстрирует хорошие показатели даже на 16 384 процессах.

Выводы

Был представлен подход к написанию параллельной реализации сеточно-характеристического метода. Он принимает во внимание структурированные гексаэдральные сетки, поэтому поверхностная топография и контакты между слоями упругой среды могут быть учтены с высокой

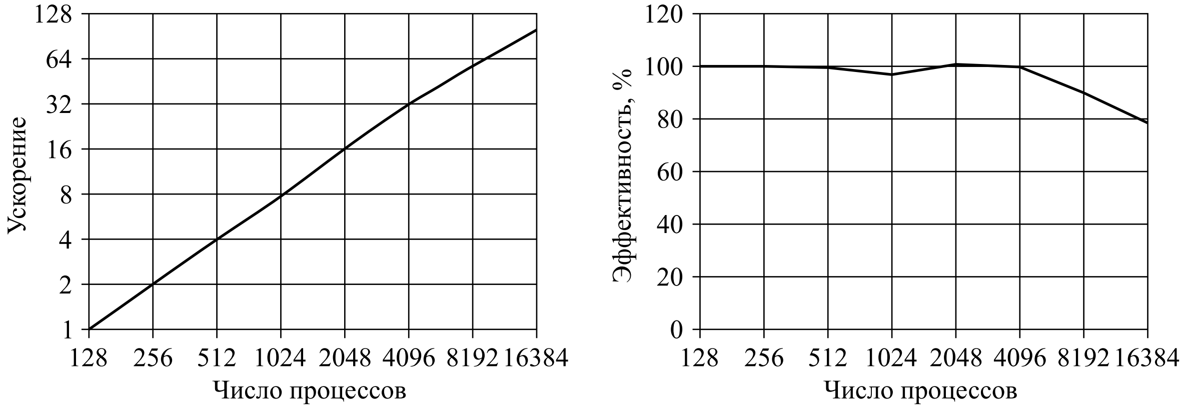

Рис. 10. Ускорение и эффективность распараллеливания с ростом числа процессов. Отсчет идет от времени работы на 128 процессах

точностью. Параллельная версия решателя основана на параллелизме по данным с возможностью вручную создать произвольную декомпозицию сеток или использовать декомпозицию, автоматически выбранную средствами MPI.

Задача синхронизации значений в узлах сетки между процессами в случае контактов между сетками решена с использованием коммуникаторов, связанных с сетками, и обменом данными о геометрии сеток между процессами.

Ускорение и эффективность данной реализации измерена для большого количества процессов. Достигнутая производительность делает эту реализацию подходящей для использования в случае сложных с вычислительной точки зрения постановок задач.

Список литературы (References)

Бирюков В. А., Миряха В. А., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Моделирование распространения упругих волн в геологической среде: сравнение результатов трех численных методов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1104–1114.

Biryukov V. A., Miryakha V. A., Petrov I. B., Khokhlov N. I. Simulation of elastic wave propagation in geological media: intercomparison of three numerical methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1086–1095. (Original Russian paper: *Biryukov V. A., Miryakha V. A., Petrov I. B., Khokhlov N. I.* Modelirovanie rasprostraneniya uprugikh voln v geologicheskoi srede: sravnenie rezul'tatov trekh chislennykh metodov // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1104–1114.)

Голубев В. М., Гилязутдинов Р. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И., Васюков А. В. Моделирование динамических процессов в трехмерных слоистых трещиноватых средах с использованием сеточно-характеристического численного метода // Прикладная механика и техническая физика. — 2017. — Т. 58, № 3. — С. 190–197.

Golubev V. I., Gilyazutdinov R. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I., Vasyukov A. V. Simulation of dynamic processes in three-dimensional layered fractured media with the use of the grid-characteristic numerical method // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2017. — Vol. 58, No. 3. — P. 539–545. (Original Russian paper: *Golubev V. M., Gilyazutdinov R. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I., Vasyukov A. V.* Modelirovanie dinamicheskikh protsessov v trekhmernykh sloistykh treshchinovatykh sredakh s ispol'zovaniem setochno-kharakteristicheskogo chislennogo metoda // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2017. — Vol. 58, No. 3. — P. 190–197.)

Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. — 2016. — Т. 28, № 2. — С. 123–132.

Golubev V. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I. Compact grid-characteristic schemes of higher orders of accuracy for a 3D linear transport equation // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016. — Vol. 8, No. 5. — P. 577–584. (Original Russian paper: *Golubev V. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I.* Kompaktnye setochno-kharakteristicheskie skhemy povyshennogo poryadka tochnosti dlya trekhmernogo lineinogo uravneniya perenosa // Matem. modelirovanie. — 2016. — Vol. 28, No. 2. — P. 123–132.)

Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988.

Magomedov K. M., Kholodov A. S. Setochno-kharakteristicheskiye chislennyye metody [Grid-characteristic numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).

Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С. Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.

Petrov I. B., Tormasov A. G., Kholodov A. S. On the use of hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of three-dimensional problems in the dynamics of a deformable solid // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 30, No. 4. — P. 191–196. (Original Russian paper: *Petrov I. B., Tormasov A. G., Kholodov A. S.* Ob ispol'zovanii gibridizirovannykh setochno-kharakteristicheskikh skhem dlya chislennogo resheniya trekhmernykh zadach dinamiki deformiruemogo tverdogo tela // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1990. — Vol. 30, No. 8. — P. 1237–1244.)

Петров И. Б., Холодов А. С. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1984. — Т. 24, № 8. — С. 1172–1188.

Petrov I. B., Kholodov A. S. Regularization of discontinuous numerical solutions of equations of hyperbolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 24, No. 4. — P. 128–138. (Original Russian paper: *Petrov I. B., Kholodov A. S.* O regulyarizatsii razryvnykh chislennykh reshenii uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 1984. — Vol. 24, No. 8. — P. 1172–1188.)

Холодов А. С., Холодов Я. А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667.

Kholodov A. S., Kholodov Y. A. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1560–1588. (Original Russian paper: *Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* O kriteriyakh monotonnosti raznostnykh skhem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1638–1667.)

Gabriel E. et al. Open MPI: Goals, concept, and design of a next generation MPI implementation // European Parallel Virtual Machine/Message Passing Interface Users' Group Meeting. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. — P. 97–104.

Favorskaya A. V., Petrov I. B. Grid-Characteristic Method // Innovations in Wave Processes Modelling and Decision Making. — Springer, Cham, 2018. — P. 117–160.

Kaser M., Dumbser M. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes — I. The two-dimensional isotropic case with external source terms // Geophysical Journal International. — 2006. — Vol. 166, No. 2. — P. 855–877.

Khokhlov N., Ivanov A., Zhdanov M., Petrov I., Ryabinkin E. Applying OpenCL Technology for Modelling Seismic Processes Using Grid-Characteristic Methods // International Conference on Distributed Computer and Communication Networks. — Springer, Cham, 2016. — P. 577–588.

Khokhlov N., Yavich N., Malovichko M., Petrov I. Solution of large-scale seismic modeling problems // Procedia Computer Science. — 2015. — Vol. 66. — P. 191–199.

Komatitsch D. Fluid-solid coupling on a cluster of GPU graphics cards for seismic wave propagation // Academie des Sciences. Comptes Rendus. Mecanique. — 2011. — Vol. 339, No. 2–3. — P. 125–135.

Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J. M., Sánchez-Sesma F. J. The spectral element method for elastic wave equations — Application to 2-D and 3-D seismic problems // International Journal for numerical methods in engineering. — 1999. — Vol. 45, No. 9. — P. 1139–1164.

LeVeque R. J. Finite volume methods for hyperbolic problems. — Cambridge university press, 2002. — Vol. 31.

Liu W., Wang F., Zhou H. Parallel Seismic Modeling Based on OpenMP+AVX and Optimization Strategy // Journal of Earth Science. — 2018. — P. 1–6.

Martin R., Komatitsch D., Blitz C., Le Goff N. Simulation of seismic wave propagation in an asteroid based upon an unstructured MPI spectral-element method: blocking and non-blocking communication strategies // International Conference on High Performance Computing for Computational Science. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. — P. 350–363.

Micikevicius P. 3D finite difference computation on GPUs using CUDA // Proceedings of 2nd workshop on general purpose processing on graphics processing units. — ACM, 2009. — P. 79–84.

Moczo P., Kristek J., Galis M., Pazak P., Balazovjech M. The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion // Acta Physica Slovaca. Reviews and Tutorials. — 2010. — Vol. 57, No. 2. — P. 177–406.

Mu D., Chen P., Wang L. Accelerating the discontinuous Galerkin method for seismic wave propagation simulations using multiple GPUs with CUDA and MPI // Earthquake Science. — 2013. — Vol. 26, No. 6. — P. 377–393.

Nakamura T., Tanaka R., Yabec T., Takizawa K. Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique // Journal of computational physics. — 2001. — Vol. 174, No. 1. — P. 171–207.

Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method // GEOPHYSICS. — Vol. 51, No. 4. — P. 889–901.

Voinov O. Y., Golubev V. I., Petrov I. B. Elastic imaging using multiprocessor computer systems // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1787. — P. 491–495.