

УДК: 539.3

Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения

Н. Г. Бураго¹, И. С. Никитин^{2,а}

¹ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

² Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, Москва, ул. 2-ая Брестская, д. 19/18

E-mail: ^а i_nikitin@list.ru

*Получено 11.05.2018, после доработки — 19.07.2018.
Принято к публикации 21.09.2018.*

В работе проведен краткий обзор имеющихся подходов к расчету разрушения твердых тел. Основное внимание уделено алгоритмам, использующим единый подход к расчету деформирования и для неразрушенного, и для разрушенного состояний материала. Представлен термодинамический вывод единых реологических соотношений, учитывающих упругие, вязкие и пластические свойства материалов и описывающих потерю способности сопротивления деформации по мере накопления микрповреждений. Показано, что рассматриваемая математическая модель обеспечивает непрерывную зависимость решения от входных параметров (параметров материальной среды, начальных и граничных условий, параметров дискретизации) при разупрочнении материала.

Представлены явные и неявные безматричные алгоритмы расчета эволюции деформирования. Неявные схемы реализованы с использованием итераций метода сопряженных градиентов, при этом расчет каждой итерации в точности совпадает с расчетом шага по времени для двухслойных явных схем. Так что алгоритмы решения являются очень простыми.

Приведены результаты решения типовых задач разрушения твердых деформируемых тел для медленных (квазистатических) и быстрых (динамических) процессов деформации. На основании опыта расчетов даны рекомендации по моделированию процессов разрушения и обеспечению достоверности численных решений.

Ключевые слова: разрушение, повреждаемость, упругость, вязкость, пластичность, термодинамика, определяющие соотношения, разупрочнение, сеточные методы, сквозной счет

UDC: 539.3

Algorithms of through calculation for damage processes

N. G. Burago¹, I. S. Nikitin^{2,a}

¹ Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS,
101-1 Prospekt Vernadskogo, Moscow, 119526, Russia

² Institute for Computer Aided Design of RAS,
19/18 Vtoraya Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

E-mail: ^a i_nikitin@list.ru

*Received 11.05.2018, after completion — 19.07.2018.
Accepted for publication 21.09.2018.*

The paper reviews the existing approaches to calculating the destruction of solids. The main attention is paid to algorithms using a unified approach to the calculation of deformation both for nondestructive and for the destroyed states of the material. The thermodynamic derivation of the unified rheological relationships taking into account the elastic, viscous and plastic properties of materials and describing the loss of the deformation resistance ability with the accumulation of microdamages is presented. It is shown that the mathematical model under consideration provides a continuous dependence of the solution on input parameters (parameters of the material medium, initial and boundary conditions, discretization parameters) with softening of the material.

Explicit and implicit non-matrix algorithms for calculating the evolution of deformation and fracture development are presented. Non-explicit schemes are implemented using iterations of the conjugate gradient method, with the calculation of each iteration exactly coinciding with the calculation of the time step for two-layer explicit schemes. So, the solution algorithms are very simple.

The results of solving typical problems of destruction of solid deformable bodies for slow (quasistatic) and fast (dynamic) deformation processes are presented. Based on the experience of calculations, recommendations are given for modeling the processes of destruction and ensuring the reliability of numerical solutions.

Keywords: destruction, damage, elasticity, viscosity, plasticity, thermodynamics, constitutive relations, softening, grid methods, through calculations

1. Введение

Численное моделирование процессов разрушения проводится уже более полувека, начиная с появления компьютеров и численных алгоритмов. Имеется много разнообразных подходов к получению ответов на вопросы о возможных сценариях процессов разрушения, о времени и местах возникновения повреждений, о продолжительности работоспособного и безопасного состояния конструкций и природных объектов. В случае когда требуется большой запас прочности, например при эксплуатации зданий, вполне достаточно определить места с максимально возможными уровнями напряжений и позаботиться о том, чтобы такие напряжения были в несколько раз меньшими, нежели разрушающие напряжения для строительных материалов. Такие рекомендации сформулированы в так называемых теориях прочности в рамках теории сопротивления материалов [Феодосьев, 1967].

Следующим уровнем изучения процессов разрушения является исследование распространения отдельных трещин для прогнозирования возможности и времени продолжения безопасной эксплуатации конструкций в тех случаях, когда упомянутые дефекты уже обнаружены. Такие задачи решаются аналитическими и численно-аналитическими методами механики хрупкого разрушения [Черепанов, 1974]. На протяжении всей истории приложения численных методов в этом направлении было выполнено очень большое количество исследований. Надо признать, что даже для уединенной трещины формулировка условий ее распространения и учет (возможно, контактных) условий на вновь образующихся свободных поверхностях при ее развитии являются весьма непростой математической задачей, реализовать которую в случае множественных трещин практически невозможно. Вычислительные трудности здесь вполне аналогичны трудностям расчета разрывных течений газа при наличии множественных ударных волн и контактных разрывов. Количество подобластей между трещинами и между ударными волнами в обоих классах задач катастрофически нарастает, и их расположение заранее непредсказуемо.

Представляется, что выход из указанного затруднения для механики разрушения, как и для газовой динамики, заключается в использовании методов сквозного счета с улавливанием узких зон больших градиентов решения, а именно зон локализации деформаций, имитирующих трещины в твердых телах, зон ударных волн и контактных разрывов в газовой динамике. Первые методы сквозного счета к моделированию разрушения были описаны в статье Майнчена–Сака полвека назад [Maenchen, Sack, 1964]. Однако долгое время недостаточное быстродействие компьютеров не позволяло эффективно использовать такие методы сквозного счета. Сейчас, благодаря более чем на 3–4 порядка возросшему быстродействию вычислительных машин, методы сквозного счета начинают доминировать и позволяют не только значительно расширить круг решаемых актуальных задач, но еще и упростить процессы решения.

Майнчен и Сак в своей работе рассматривали случай, при котором материал в бесконечно малом объеме разрушался мгновенно при выполнении некоторого критерия разрушения. Разрушение математически выражалось в замене обычной связи напряжений и деформаций в рамках теории упругости и пластичности на связь, описывающую поведение разрушенного материала. А именно, в главных осях тензора напряжений новая связь обеспечивала отсутствие сопротивления растяжению при сохранении сопротивления сжатию. Тут важной является следующая особенность. Поскольку свойства материалов зависят от истории нагружения, алгоритмы решения, независимо от скорости нагружения за пределами текучести, являются пошаговыми во времени. В постановке Майнчена–Сака в краевых задачах для приращений искомых функций на каждом шаге по времени сохраняется важное свойство положительной определенности линеаризованного оператора задачи, то есть выполняется критерий корректности краевых задач по Адамару [Hadamard, 1902] (подробное обсуждение критерия и его обобщения можно найти в работе [Tikhonov, Arsenin, 1977]). Данный критерий обеспечивает существование, единственность и непрерывную зависимость решения от входных данных.

В реальности материалы теряют способность сопротивления деформации не мгновенно, как в подходе Майнчена–Сака (хрупкое разрушение), а постепенно, то есть имеет место длительная стадия разупрочнения. При разупрочнении операторы пошагового во времени решения

задач упругопластичности в приращениях используют явно или неявно так называемые касательные модули упругости (производные от напряжения по деформации). При разупрочнении касательные модули упругости принимают отрицательные значения, и операторы задач упругопластичности на шаге по времени из-за этого теряют свойство положительной определенности, краевая задача становится некорректной по Адамару, численные решения становятся физически бессмысленными, и расчет оканчивается аварийно. В механике деформируемых сред это явление известно как нарушение критерия устойчивости материала по Драккеру [Drucker, 1964]. Таким образом, классические теории упругопластичности не годятся для описания постепенного разупрочнения.

Выход из данного затруднения был найден в работах [Качанов, 1958; Работнов, 1959], где экспериментально наблюдаемое падение напряжений при росте деформаций объяснялось деградацией (уменьшением) модулей упругости и предела текучести за счет роста плотности микротрещин, названной повреждаемостью. Это означало, что участки разупрочнения не отражают свойства материала в переменных напряжения — упругопластические деформации, а обусловлены внешними причинами (ростом микроповреждений). Поэтому использование отрицательных касательных модулей упругости, нарушающее корректность краевых задач, не требуется. Введение повреждаемости позволило рассчитывать процессы разупрочнения без нарушения условий Адамара и Драккера.

Для реализации моделей повреждаемости в алгоритмах сквозного счета требуется расширенная повреждаемостью формулировка определяющих соотношений для деформируемых твердых сред, пригодная к описанию поведения как исходного неповрежденного, так и разрушенного материалов, включая переходный процесс разупрочнения. Варианты определяющих уравнений и обзоры можно найти в работах [Кукуджанов, 1985; Kachanov, 1986; Коротин и др., 1989; Иванов и др., 1990; Lemaitre, 1996; Кукуджанов, 1999; Фомин и др., 1999; Бураго и др., 2000; Bazant, 2002; Кондауров, Фортов, 2002; Бураго, 2008].

В задачах расчета усталостного разрушения элементов конструкций наряду с формулировками многоосных критериев разрушения при циклическом нагружении (см. обзор [Бураго и др., 2011]) также предложены модели, учитывающие процесс накопления повреждений с ростом числа циклов нагружения [Lemaitre, Desmorat, 2005]. Соответствующие дифференциальные уравнения для функции повреждаемости сформулированы, например, в [Marmi et al., 2009].

Для задач о разрушении важными и перспективными вычислительными средствами повышения точности являются методы адаптивных подвижных расчетных сеток, применяемые для минимизации ошибок аппроксимации в зонах больших градиентов решения (обзоры и описания имеются в работах [Иванов и др., 1990; Лисейкин, 2010; Бураго и др., 2016]).

В настоящей работе рассмотрены перечисленные выше составляющие постановки и численного решения задач о разрушении твердых тел, показаны способы реализации соответствующих алгоритмов и приведены примеры решений типовых задач о разрушении твердых тел.

2. Постановка общей задачи

Система уравнений, описывающая поведение термоупругопластической повреждающейся среды, используется здесь в варианте, описанном в работе [Бураго и др., 2000]. Система уравнений содержит законы сохранения массы, импульса и энергии, а также кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{e} : \mathbf{I} &= 0, & \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0, & \rho \frac{dU}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} + \nabla \mathbf{q} + \rho r = 0, \\ \mathbf{F}^{-1} &= \nabla \mathbf{x}^0, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}), & \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \\ \mathbf{e} &= \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, & \mathbf{L} &= \nabla \mathbf{u}, & \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1)$$

и определяющие соотношения, которые заслуживают более подробного рассмотрения, приводимого ниже. Здесь использованы традиционные обозначения: ρ — плотность, \mathbf{u} — скорость материальной сплошной среды, t — время, \mathbf{x} — эйлеров радиус-вектор (актуальная конфигурация), \mathbf{x}^0 — лагранжев радиус-вектор (начальная конфигурация), \mathbf{F} — градиент деформации, \mathbf{L} — градиент скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформации Альманси, \mathbf{e} — эйлеров тензор скорости деформации, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, U — внутренняя энергия единицы массы, \mathbf{q} — вектор теплового потока, T — температура, r — массовый источник тепла, d/dt — материальная временная производная, ∇ — оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации, \mathbf{I} — единичный тензор.

Определяющие соотношения представляют связи между характеристиками состояния бесконечно малого объема сплошной среды, накладываемые законами термодинамики. Образует минимальный набор взаимно независимых параметров состояния бесконечно малого объема сплошной среды: $T, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\chi}^0, \frac{dT}{dt}, \mathbf{e}^0, \frac{d\boldsymbol{\chi}^0}{dt}, \nabla T$, где $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\varepsilon}_p, \theta)$ — структурные параметры: тензор пластической деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_p^0$ и повреждаемость θ , определяемые далее и ответственные за изменение внутренней структуры сплошной среды, то есть за развитие дислокаций и микротрещин, соответственно. Нулики отмечают материальные тензоры, связанные с пространственными тензорами соотношениями

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{e}^0 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}, \quad \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}.$$

Из первого закона термодинамики, утверждающего закон сохранения энергии, и второго закона термодинамики, закона возрастания энтропии η ,

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0,$$

следует неравенство скорости диссипации:

$$D = -\rho \left(\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right) \frac{dT}{dt} + \left(\boldsymbol{\sigma}^0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} \right) : \mathbf{e}^0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\chi}^0} : \boldsymbol{\chi}_{,t}^0 + \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0.$$

Здесь $\varphi = U - T\eta$ — свободная энергия единицы массы.

Свободная энергия и скорость диссипации принимаются такими:

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right)^2 + \frac{\mu(T)}{\rho} (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_p) : (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_p),$$

$$D = H(\Phi_p) k_p \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}'_p : \boldsymbol{\varepsilon}'_p} + H(\Phi_\theta) k_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k_q}{\rho T} \nabla T \cdot \nabla T.$$

То есть полагается, что упругие составляющие девиатора деформации малы по сравнению с единицей. Эффект температурного расширения учитывается членом с коэффициентом β . Составляющая скорости диссипации, отвечающая за пластическое течение, полагается однородной функцией первого порядка от скорости пластической деформации, что соответствует случаю упругопластической среды. Пластическая деформация растет при выполнении условия активного нагружения $\Phi_p(T, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_p^0, \theta, \mathbf{e}) \geq 0$. Полагается также, что материал пластически не сжимаем (скорость диссипации зависит только от девиатора скорости пластической деформации, что обычно хорошо выполняется для металлов). Спротивляемость среды, представленная модулями упругости и пределом текучести, помимо температуры, деформации и пластической

деформации, зависит также от дополнительного структурного параметра состояния θ , называемого поврежденностью: $\mu = \mu_0 g_\mu(\theta)$, $K = K_0 g_K(\theta)$, $k_p = k_{p0} g_p(\theta)$, где μ_0 , K_0 — модули упругости, k_{p0} — предел текучести для неповрежденной сплошной среды. Убывающие от 1 до 0 функции g_μ , g_K , g_p обеспечивают спад сопротивления среды с ростом поврежденности, который происходит при выполнении условия разрушения $\Phi_\theta(T, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\varepsilon}_p^0, \theta, \mathbf{e}) \geq 0$. Кинетика процесса разрушения определяется зависимостью скорости диссипации от скорости роста поврежденности. Неотрицательные функции μ_0 , K_0 , k_{p0} , k_θ и k_q зависят от T , $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_p^0$. В результате определяющие соотношения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad U = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad \mathbf{q} = k_q \nabla T, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \\ \boldsymbol{\sigma}' &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p), \quad p = K \frac{\rho}{\rho_0} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0) \right), \\ \mathbf{e}'_p &= H(\Phi_p) \sqrt{\mathbf{e}'_p : \mathbf{e}'_p} \boldsymbol{\sigma}' / k_p, \quad \frac{d\theta}{dt} = -H(\Phi_\theta) k_\theta^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in S_{un}, t \geq 0: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= u_n^*, \\ \mathbf{x} \in S \setminus S_{un}, t \geq 0: \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= p_n^*, \\ \mathbf{x} \in S_{u\alpha}, t \geq 0: \quad \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha &= u_{\alpha}^*, \\ \mathbf{x} \in S \setminus S_{u\alpha}, t \geq 0: \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha &= p_{\alpha}^*, \\ \mathbf{x} \in S_T, t \geq 0: \quad T &= T^*, \\ \mathbf{x} \in S \setminus S_T, t \geq 0: \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) &= q_n^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = 1, 2$. Начальные условия имеют вид:

$$x \in V, t = 0: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad T = T_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = 0, \quad \theta = 0. \quad (4)$$

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу для системы уравнений (1)–(2) с граничными (3) и начальными (4) условиями.

Дополнение к § 2

Настоящее дополнение имеет своей целью пояснить, в чем смысл введения параметра поврежденности. Рассмотрим упрощенно систему уравнений классической нелинейной упруго-пластической модели Прандтля–Рейсса:

$$\begin{aligned} \rho d\mathbf{u} / dt &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p), \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))_s, \quad d\mathbf{x} / dt = \mathbf{u}, \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_p / dt &= H(\Phi_p) \boldsymbol{\lambda}_p : \boldsymbol{\sigma}, \quad \Phi_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = 0, \end{aligned}$$

где $(\mathbf{A})_s = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) / 2$ — оператор выделения симметричной части. Для приращений напряжений и деформаций на шаге по времени получаются следующие соотношения:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_t : \Delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

где тензор четвертого ранга E_t зависит от полных и пластических деформаций и от режима нагружения (активное или разгрузка). Соотношения для приращений можно переписать в виде

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_t : (\nabla \otimes \Delta \mathbf{x})_s.$$

Для скоростей на шаге по времени получается следующее уравнение:

$$\rho d\mathbf{u} / dt = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E}_t : (\nabla \otimes \mathbf{u})_s \Delta t).$$

Корректность этого уравнения определяется условием Адамара:

$$E_t = \partial_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} > 0$$

или его физическим эквивалентом, известным как условие Драккера:

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} : \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} > 0.$$

Разрушение сопровождается разупрочнением

$$E_t < 0$$

и приводит в рамках рассмотренной классической теории к потере корректности задачи (неограниченное экспоненциальное возрастание скорости, потеря непрерывной зависимости решения от входных данных, неустойчивость).

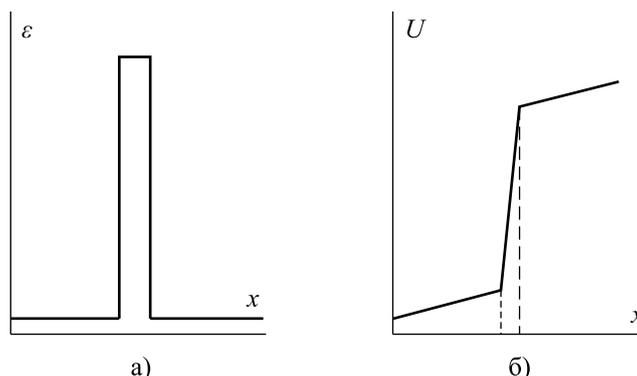


Рис. 1. Вид точного решения для растягиваемого стержня с ослабленной центральной частью: качественные графики распределения деформации (а) и смещения (б) вдоль стержня

Рассмотрим явление разрушения с помощью следующей одномерной задачи о растяжении стержня. Материал стержня упругий, с модулем Юнга E . Пусть в середине стержня есть маленький участок ослабленного сопротивления (зона разрушения) с маленьким модулем Юнга $E_1 \ll E$. Элементарное точное решение показывает, что в зоне разрушения имеется всплеск деформаций (рис. 1, а), а перемещения (и скорости) меняются почти скачкообразно (рис. 1, б).

Возникает вопрос: можно ли построить физически и математически корректную модель упругопластического материала, описывающую появление зон пониженного сопротивления материала, подобных зоне разрушения из рассмотренной модельной упругой задачи?

Теории повреждаемости [Качанов, 1958; Работнов, 1959] дают утвердительный ответ. Действительно, с введением дополнительного искомого параметра повреждаемости χ система уравнений упругопластичности принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho d\mathbf{u} / dt &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = E(\theta) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p), \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))_s, \quad d\mathbf{x} / dt = \mathbf{u}, \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_p / dt &= H(\Phi_p) \boldsymbol{\lambda}_p : \boldsymbol{\sigma}, \quad \Phi_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = 0, \\ d\theta / dt &= H(\Phi_\theta) \boldsymbol{\lambda}_\theta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \theta) \geq 0, \quad \Phi_\theta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \theta) = 0. \end{aligned}$$

Для приращений напряжений на шаге по времени получаем:

$$\Delta\sigma = \mathbf{E} : \Delta(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + (\mathbf{E}_\theta \Delta\theta) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p), \quad \mathbf{E}_\theta = \partial_\theta \mathbf{E}.$$

Спад напряжений, независимо от изменения деформации, обеспечивается вторым слагаемым в приведенном выше выражении для приращений напряжений. Коэффициент $E_\theta < 0$ отрицателен, что отражает тот факт, что модули упругости $E_i(\theta) > 0$ и напряжения убывают с ростом поврежденности. Иллюстрацией данного процесса может служить схема, представленная на рис. 2. Положительность модулей упругости обеспечивает выполнение необходимых условий корректности начально-краевых задач по Адамару и Драккеру. Отметим, что вместе с модулями упругости с ростом повреждаемости убывает также и предел текучести. Левая диаграмма на рис. 2 показывает наблюдаемую экспериментально зависимость в переменных напряжение-деформация, правая диаграмма показывает вид этого же процесса в расширенном повреждаемостью пространстве напряжений-деформаций. Видно, что при любом фиксированном значении повреждаемости никаких участков разупрочнения на диаграммах напряжение-деформация нет.

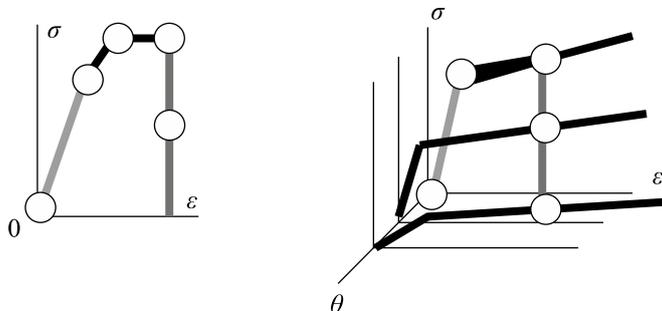


Рис. 2. Влияние поврежденности на диаграммы деформирования

В теории поврежденности ответственность за разупрочнение не возлагается более на условие пластичности или на условие активного нагружения, а возлагается на уравнение поврежденности. Разупрочнение, или, в более общем смысле, разрушение, рассматривается как потеря материалом способности к сопротивлению деформации, выражающаяся в уменьшении значений модулей упругости и предела текучести из-за разрыва упругих связей, или, что то же самое, из-за роста числа микротрещин в единице объема. Разрушение описывается как независимый от деформации процесс (именно независимый, это важно), поэтому характеристика разрушения, называемая параметром поврежденности, связана с деформацией, температурой и другими параметрами состояния лишь постольку, поскольку они все вместе участвуют в общей системе уравнений и начально-краевых условий термомеханики. На самом деле разрушение можно произвести вообще без всякой деформации, например с помощью лазерного излучения и другого внешнего воздействия немеханической природы.

Важно отметить, что участки разупрочнения экспериментальных диаграмм деформирования материала нельзя использовать для определения свойств упругопластических материалов, так как на этих участках процессы деформации управляются растущей повреждаемостью через изменение коэффициентов упругости материала и предела текучести.

В данном комментарии формулировка теорий и рассуждения намеренно были огрублены, например, температура не участвовала в рассуждениях, параметры упрочнения не рассматривались, скоростное упрочнение не фигурировало, членами, обусловленными большими деформациями пренебрегалось. Это было сделано для более отчетливого описания основной идеи теорий поврежденности. Полагаем, что это не будет понято так, что эти упрощения используются далее в качестве основы для численных расчетов.

Отметим, что имеется другой, отличный от теорий повреждаемости, но весьма распространенный метод регуляризации уравнений упругопластической среды при описании явления

разупрочнения (падения интенсивности напряжений с ростом интенсивности деформаций). А именно, для регуляризации классической теории упругопластичности применяется переход к уравнениям упруговязкопластичности.

Рассмотрим связь уравнений повреждающейся упругопластической среды и уравнений упруговязкопластической среды на частном примере пластически несжимаемой среды с изотропными упругими свойствами. Соотношения упруговязкопластичности для такой среды имеют хорошо известный вид:

$$d\sigma' / dt = 2\mu \left(d\varepsilon' / dt - \frac{1}{\tau} \Psi \left(\max \left(\frac{\sqrt{\sigma' : \sigma'}}{k_p (\sqrt{\varepsilon' : \varepsilon'})} - 1, 0 \right) \right) \frac{\sigma'}{\sqrt{\sigma' : \sigma'}} \right),$$

где k_p — функция статической диаграммы нагружения, имеющая участок разупрочнения; Ψ — неотрицательная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение; τ — время релаксации; штрихи выделяют девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций. Сравнивая соотношения упруговязкопластичности с уравнениями повреждающейся среды, которые для среды с изотропией упругих свойств имеют вид

$$d\sigma' / dt = 2\mu d(\varepsilon' - \varepsilon_p) / dt + 2\partial_\theta \mu d\theta / dt (\varepsilon' - \varepsilon_p),$$

можно заключить, что эти модели материала могут дать сходное описание процесса разрушения только в случае простого нагружения, при котором девиаторы деформаций, пластических деформаций и напряжений, а также их приращения и скорости коллинеарны. В этом случае кинетику роста поврежденности (эволюционное уравнение для θ) можно было бы согласовать с законом вязкопластического течения (уравнение для ε_p), требуя равенства выражений для скорости девиатора напряжений σ' по данным двум теориям. Для согласования других моделей повреждающейся среды с уравнениями упруговязкопластичности для простых нагружений пришлось бы также учесть пластическую сжимаемость (ввести необратимую объемную пластическую деформацию). Ясно, что в общем случае способы описания разрушения, заложенные в модели повреждающейся среды и в модели упруговязкопластичности, не совпадают, поэтому нет большого смысла в согласовании этих подходов даже для частного случая.

Представляет интерес численное сравнение результатов, полученных в соответствии с различными имеющимися подходами к расчету разрушения при использовании одних и тех же входных физических данных. Прежде, однако, желательно убедиться в том, что соответствующие модели разрушения и численные алгоритмы приводят к устойчивым решениям без патологической зависимости от параметров дискретизации и входных данных.

3. Численный метод

Алгоритм решения основан на модификации неявной конечно-элементной схемы, построенной в работах [Бураго, Кукуджанов, 1988, 1991; Бураго и др., 2016], и реализован в рамках пакета прикладных программ «АСТРА». Основные черты этого алгоритма заключаются в следующем. Исходные уравнения задачи, включая определяющие и кинематические дифференциальные соотношения, применяются в интегральной вариационной форме Бубнова–Галёркина. По пространственным переменным вводится простейшая кусочно-линейная конечно-элементная аппроксимация решения на подвижной сетке, содержащей треугольные и четырехугольные ячейки в двумерном случае, тетраэдры, призмы и параллелепипеды в трехмерной геометрии. Кусочно-линейная аппроксимация применяется для всех искомых функций, включая перемещения, скорости, температуру, тепловые потоки, деформации, пластические деформации, напряжения, параметры упрочнения и поврежденность, дискретные значения которых представлены узловыми значениями.

Основными искомыми функциями являются те, которые дифференцируются по времени в исходной системе уравнений, а именно перемещения, скорости, температура, пластические деформации, пластическая работа (параметр упрочнения) и поврежденность. Остальные искомые функции всегда можно определить для данного момента времени по основным с помощью дифференцирования по пространству и недифференциальных по времени соотношений.

Точки численного интегрирования расположены в узлах сетки, таким образом, матрица масс диагональна. На шаге по времени нелинейные члены уравнений линеаризованы по методу Ньютона относительно малых приращений искомых функций на временном шаге. Для решения вспомогательных линеаризованных алгебраических задач применен итерационный метод сопряженных градиентов, реализуемый без матричных операций и работающий на каждой итерации как явная двухслойная центрально-разностная схема. При уменьшении величины шага по времени число итераций метода сопряженных градиентов для решения вспомогательных задач уменьшается (за счет лучшего начального приближения), и для временных шагов в пределах курантовского ограничения неявная схема работает асимптотически так же быстро, как обычные явные схемы. При самом неудачном начальном приближении для определения решения требуется не более чем \sqrt{N} итераций, где N — число узловых значений искомых переменных. Поскольку применяется расщепление по физическим процессам, то скорости, температура, пластические деформации, повреждаемость и координаты узлов подвижной сетки определяются по очереди и число дискретных переменных не слишком велико. Шаг по времени выбирается в неявных схемах из условий точности с тем, чтобы ограничить максимальное приращение деформации величиной порядка одной десятой деформации, отвечающей пределу текучести, или, для упругих материалов, величиной много меньшей единицы. В явных схемах применяются обычные условия устойчивости для случаев гиперболических и параболических уравнений.

Для предобусловливания алгебраических задач (умножения системы уравнений на приближенную обратную матрицу) использовались диагональные приближения матриц жесткости, что соответствует масштабированию неизвестных. Этого вполне достаточно для обеспечения устойчивости итерационного процесса метода сопряженных градиентов даже при учете ухудшающих обусловленность задачи штрафных членов, включающих контактные условия или условия несжимаемости.

Вследствие погрешностей дискретизации и приближенности используемых алгоритмов и условий их устойчивости, заимствованных из упрощенных модельных задач, в численных решениях нелинейных задач местами возникают нефизические осцилляции, характерными признаками которых являются их длина волны, совпадающая с размерами ребер сетки, и частота с полупериодом, равным шагу по времени. Для устранения таких возмущений известно большое количество разнообразных рецептов, отражающих различные способы введения явных или аппроксимационных вязкостей, монотонизирующих решение. Для задач о разрушении такие способы сглаживания должны вводиться очень осторожно, поскольку физическое явление разрушения очень чувствительно к малым возмущениям и, следовательно, слишком грубая монотонизация (например, по схеме Лакса) или, наоборот, ее отсутствие могут сильно исказить решение. Локализация деформаций не состоится, если нефизическая вязкость схемы велика, или, наоборот, расположение зон разрушения окажется сильно и явно зависимым от шагов сетки по времени и пространству, если нефизическая вязкость недостаточна.

В настоящей работе рекомендуется и используется следующий способ монотонизации численных решений. По окончании расчета каждого шага по времени монотонизируемая функция f дважды дифференцируется по каждой из пространственных независимых переменных. Сглаживание осуществляется покоординатно, хотя сетка может содержать ячейки с произвольно расположенными в пространстве ребрами. При использовании кусочно-линейной аппроксимации значения вторых производных f_{xx} вычисляются в смысле обобщенных решений из вариационного уравнения:

$$\int_V \left(f_{xx} \delta f_{xx} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \delta f_{xx}}{\partial x} \right) dV = 0.$$

В уравнении для вторых производных интегралы по границе области решения отброшены, поскольку полагается, что в граничных точках первые или вторые производные пренебрежимо малы.

Затем для каждого узла сетки вычисляется осредненное по соседям значение монотонизируемой функции \tilde{f} . Это значение также зависит от координатного направления (попросту говоря, это среднее от значений функции в точках пересечения границы окрестности узла с данной координатной линией). Окончательно старые значения f заменяются на новые, $(f + \tilde{f})/2$, только в тех немногочисленных узлах сетки (точках немонотонности), в которых вторая производная f_{xx} меняет знак в узлах одного ребра. Подчеркнем, что старое значение не заменяется на среднее, как в схеме Лакса, а лишь наполовину сдвигается в сторону среднего, это важно.

Отметим, что описанная процедура монотонизации, в отличие от большинства других способов, действует не во всех узлах сетки, а изменяет решение только в точках немонотонности. Действуя более избирательно, она при этом даже может превратить неустойчивую схему в устойчивую и сходящуюся к верному решению. Она, например, хорошо регуляризует стандартные двухслойные центрально-разностные явные схемы не только для задач динамики твердых деформируемых тел, но и для задач эйлеровой механики жидкости и газа. Конечно, при записи таких схем элементарные требования к описанию диссипативных процессов на скачках должны быть учтены, то есть дестабилизирующие члены с отрицательными коэффициентами вязкости, обнаруживаемые в первых дифференциальных приближениях таких разностных схем, должны быть уравновешены адекватной искусственной вязкостью. И тогда данный способ монотонизации как дополнение сработает отлично. В данном случае процедура монотонизации применяется в паре с неявной схемой как контроль монотонности решения. Если решение монотонно, то она ничего не делает. Если появляется нефизическая осцилляция, она немедленно устраняется.

Заметим еще, что покоординатное расщепление процедуры монотонизации позволяет сделать монотонизацию более точной. Применение более грубых индикаторов немонотонности, например, по выходе узлового значения функции за границы диапазона ее изменения в соседних узлах, а также корректировка осреднением по всей окрестности приводят к пропуску немонотонностей и к сглаживанию физических минимумов и максимумов.

Комментируя выбор единого способа аппроксимации для всех искомым функций, отметим следующее. Традиционно в конечно-элементных схемах деформации и напряжения относятся к гауссовым точкам численного интегрирования, расположенным внутри ячеек, например в центрах треугольных симплекс-элементов. Такой способ аппроксимации затрудняет обобщение схем на случай произвольно подвижных нелагранжевых сеток, в которых надо учитывать конвекцию, то есть движение сплошной среды относительно системы координат и соответствующей сетки. Поэтому предпочтение отдано единообразной аппроксимации всех искомым функций. Необходимые изменения в эволюционных уравнениях, которые при этом надо сделать для получения устойчивых алгоритмов, подсказываются анализом первых дифференциальных приближений.

4. Примеры расчетов

4.1. Разрушение плоского стандартного образца при растяжении

Расчетная область видна на рис. 3 и представляет собой 1/4 часть стандартного образца, на нижней и левой границах ставятся условия симметрии. Начальная длина расчетной области равна 3.0, высота — 2.0. Правая граница движется вправо с постоянной скоростью V_0 , верхние

горизонтальные и вертикальные границы свободны. Для обезразмеривания использованы следующие характерные значения переменных, помеченные индексом s :

$$\begin{aligned} x_s = h, \quad u_s = h, \quad v_s = 0.001c_0, \quad t_s = \frac{x_s}{v_s}, \\ \sigma_s = p_s = K_s = \mu_s = k_{p0}, \quad \rho_s = k_{p0}v_s^{-2}, \quad T_s = v_s^2c_V^{-1}, \quad \beta_s = T_s^{-1}, \\ U_s = \varphi_s = v_s^2, \quad \eta_s = v_s^2T_s^{-1}, \quad r_s = v_s^2t_s^{-1}, \quad q_s = \rho_s v_s^2 t_s^{-1} x_s, \\ \varepsilon_s = (\varepsilon_p)_s = 1, \quad e_s = (e_p)_s = t_s^{-1}, \quad \theta_s = 1, \quad (k_\theta)_s = x_s v_s. \end{aligned}$$

Уравнения задачи, начальные и граничные условия в безразмерных переменных сохраняют свой вид. Безразмерные входные данные приведены ниже:

$$\begin{aligned} K_0 = 975, \quad \mu_0 = 369, \quad k_{p0} = 1, \quad c_0 = \frac{3K_0 + 4\mu_0}{3\rho_0}, \quad k_\theta = 10^3, \\ \Phi_p = \sigma' : \sigma' - k_p^2, \quad \Phi_\theta = \varepsilon_{\max} - 10^{-2}, \quad U \approx c_V T, \quad c_V = 1, \\ k_q = 1, \quad g_K = g_\mu = g_p = e^{-10^3 \theta}, \quad \beta = 0.0001, \quad V_0 = 10^{-4}, \quad c_0 = 10^3, \end{aligned}$$

где ε_{\max} — максимальная главная деформация, c_0 — безразмерная скорость звука.

В начальный момент времени образец находится в недеформированном состоянии, с нулевыми значениями скоростей, перемещений, пластических деформаций и поврежденности, при безразмерной температуре $T_0 = 100$. Безразмерный массовый источник/сток тепла, $r = 1$, действовал в прямоугольной зоне (1.9, 0, 2.1, 1). Тепловые потоки на границах занулялись. Использовались лагранжевы подвижные конечно-элементные сетки, состоящие из первоначально одинаковых (квадратных или лево-, право-ориентированных треугольных) ячеек с шагом 1/15, 1/30 и 1/60 в разных вариантах.

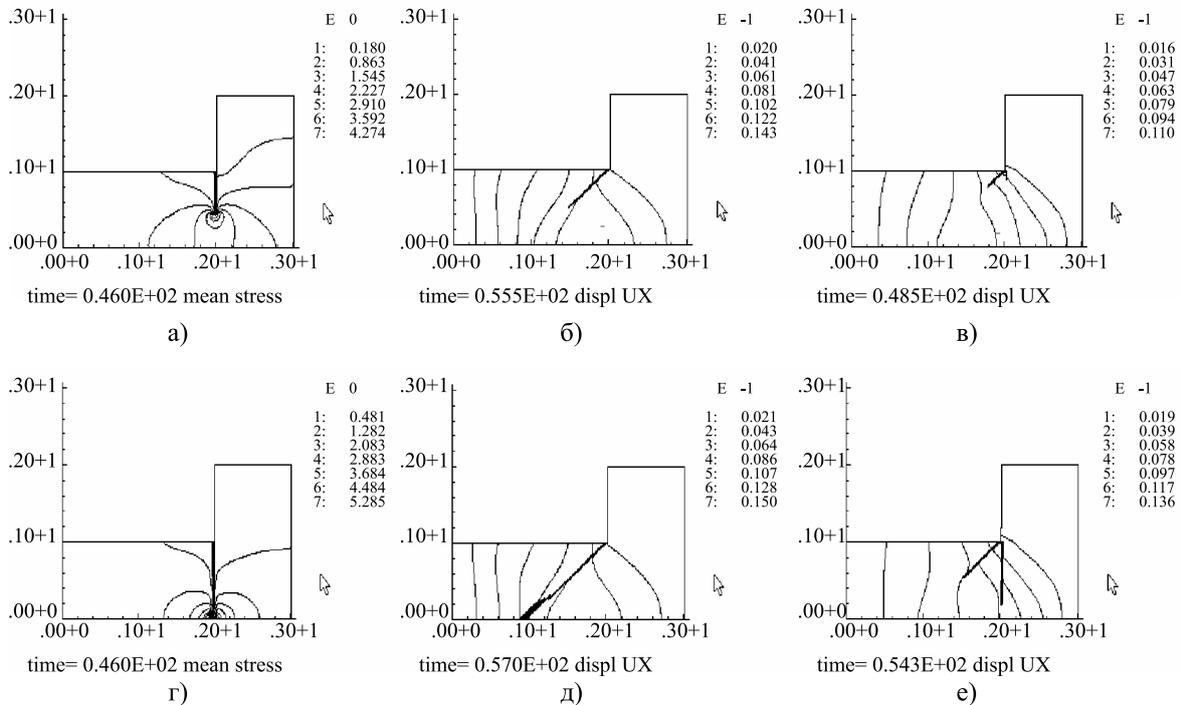


Рис. 3. Моды процесса разрушения для случаев упругого материала (а, г), упругопластического материала (б, д), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в, е)

Развитие узких зон локализации деформаций можно видеть на рис. 3 для трех случаев процесса: разрушение упругого материала (а), упругопластического материала (б), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в). Видно, что пластичность навязывает свое предпочтительное направление распространения зоны локализации деформаций.

При достаточно интенсивном локальном нагреве разрушение упругопластического материала происходит как в упругом материале, а в режиме умеренного нагрева развиваются две трещины: сначала косая, которая затем останавливается, а завершает разрушение вертикальная трещина, развивающаяся в зоне интенсивного нагрева. Интенсивный нагрев ускоряет процесс разрушения, в то время как локальное охлаждение зоны предполагаемого разрушения замедляет ее развитие.

На рис. 4 показаны графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной главной деформации (в) вдоль горизонтальной линии, пересекающей узкие зоны разрушения. Поведение этих характеристик типично для внутренних контактных границ и имитирует магистральную трещину в рамках континуального подхода.

Поврежденность и деформация в зоне разрушения имеют очень большой всплеск типа дельта-функции, напряжения падают до нуля, а смещения претерпевают резкий скачок.

С ростом зон разрушения приложенные нагрузки вызывают все большие деформации, и поэтому шаг по времени уменьшается из-за ограничения приращения деформации в связи с требованиями к точности расчета. Процесс развития зон разрушения постепенно становится динамическим.

Моды разрушения сохраняются при измельчении шага сетки и смене формы ячеек. Но надо отметить, что при отключении или уменьшении регуляризации, например за счет отключения инерционных членов или за счет проведения расчета с увеличенными шагами по времени, появляется anomalous зависимость решения от малых возмущений, в том числе и от сетки.

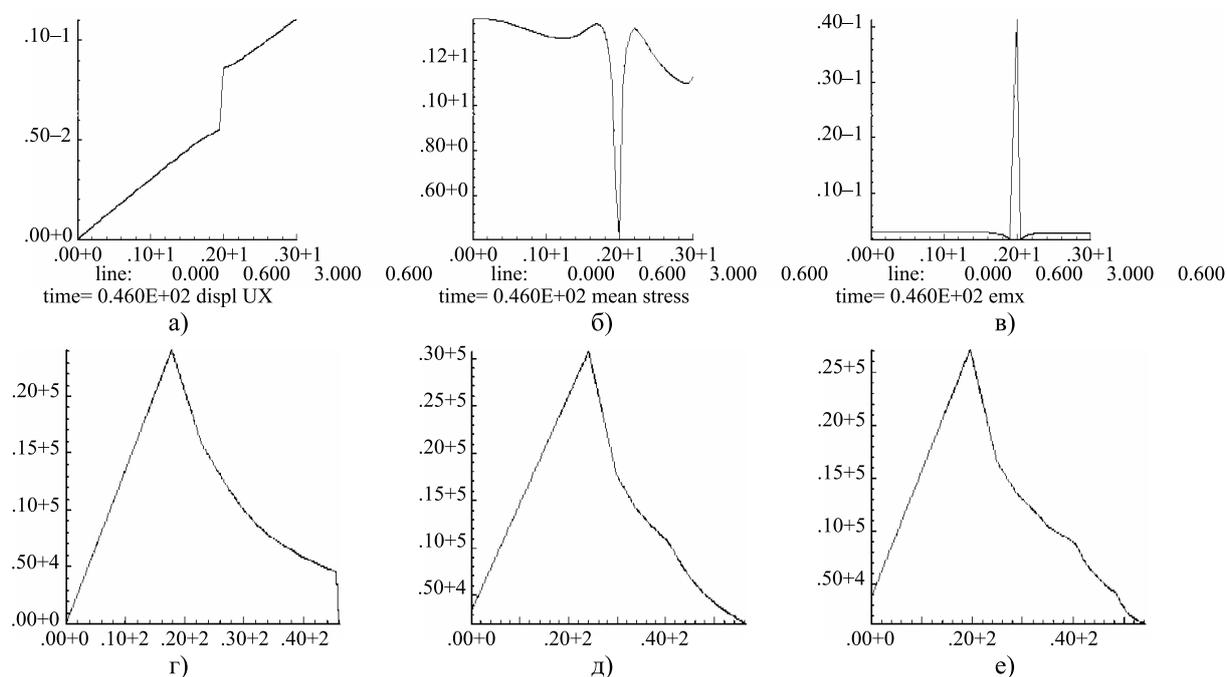


Рис. 4. Графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной деформации (в) вдоль горизонтальной линии (0, 0.6, 3, 0.6) для случая разрушения упругого материала. В остальных случаях качественное поведение этих функций такое же. Далее (г, д, е) для всех трех вариантов показано изменение безразмерного шага по времени, отнесенного к величине шага Куранта для явных схем и выбираемого из условий точности, от величин 10^4 для квазистатики в начале процесса до величин порядка 1 при наличии развитых зон разрушения

4.2. Задача об оползне склона под действием веса сооружения

Пусть на крутом склоне строится некоторое сооружение. По мере возрастания нагрузки деформации максимального растяжения концентрируются у дальней от края склона границы строящегося сооружения, где и возникают зоны разрушения и локализации деформаций. По мере их роста такие зоны занимают некоторую окрестность наклонной поверхности, эволюция которой показана на рис. 5. С выходом зон разрушения на свободную поверхность склона процесс деформации ускоряется и становится динамическим. Часть грунта между дневной поверхностью и зоной разрушения приходит в движение как жесткое целое и оползает вниз под действием сил тяжести.

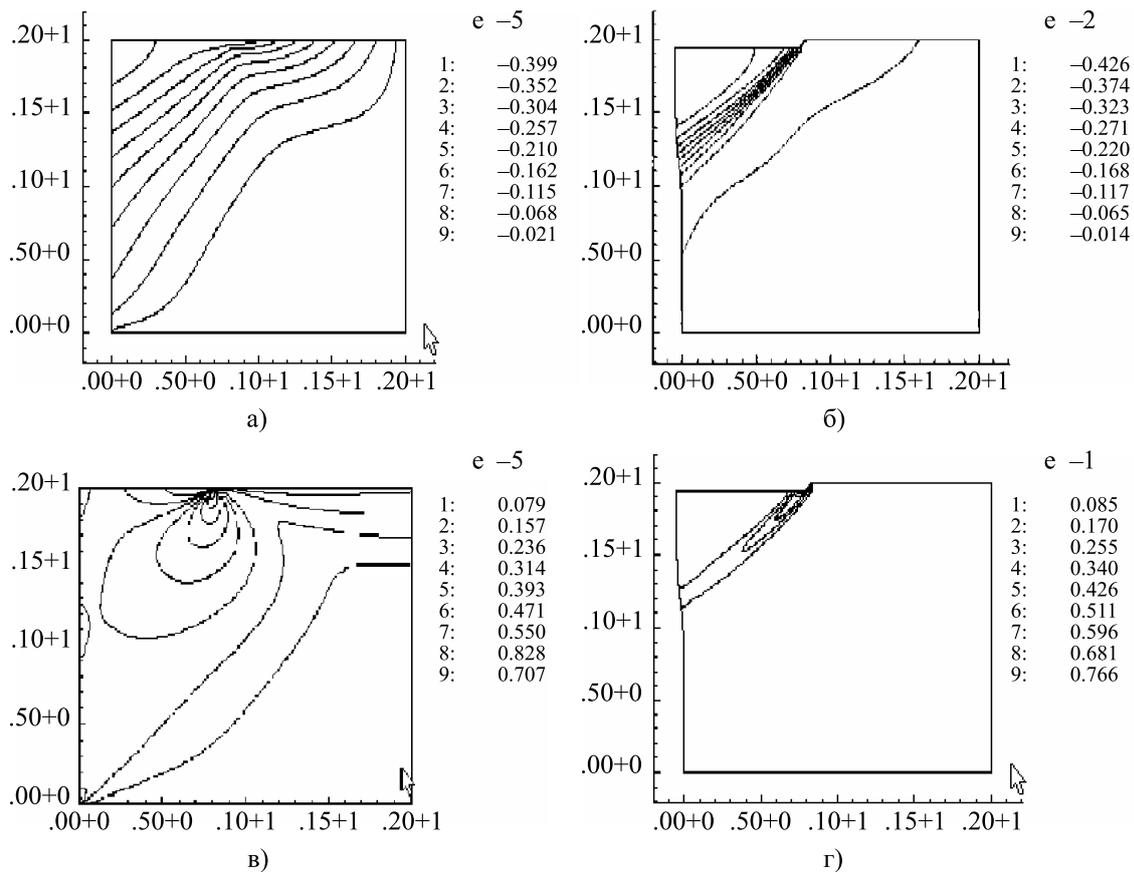


Рис. 5. Оползень склона от действия веса сооружения. Показано распределение горизонтального смещения и максимальной деформации для начальной (а, в) и конечной (б, г) стадий процесса

Данная задача рассматривалась теоретически в различных постановках и экспериментально во множестве исследований, с которыми можно познакомиться по работам [Drucker, Prager, 1962; Ляхов, 1974; Goodman, 1980; Коротков, 1982; Соколовский, 1991]. Основой теоретического изучения являются варианты теории пластичности. Модели жесткопластической среды для данной задачи рассмотрены в работах [Drucker, Prager, 1962; Соколовский, 1991]. Упругопластические модели для малых деформаций реализованы в [Коротков, 1982; Zienkiewicz, Nayak, 1972; Owen, Hinton, 1984]. Попытки учета разупрочнения в рамках теории пластичности были сделаны в работах [Zienkiewicz, Nayak, 1972; Коротков, 1982; Глушко, Нещеретов, 1986], были отмечены ныне хорошо известные факты ухудшения обусловленности и потери корректности краевых задач. Варианты специальных способов регуляризации для преодоления этих трудностей предложены в работах [Goodman, 1980; Ortiz et al., 1987; Ortiz, Quigly, 1991; Larsson, Runesson, 1993].

4.3. Задача о разрезании листа

Рассмотрим задачу о разрезании листа двумя жесткими штампами при неподвижном нижнем штампе и равномерном движении вниз верхнего штампа. На контакте реализованы условия свободного скольжения. Левый и правый края листа закреплены. На рис. 6 показано распределение смещений, интенсивности напряжений, касательного и среднего напряжений для начала процесса. На финальной стадии процесса наблюдается сильная локализация деформаций вдоль узкой зоны намечающегося среза, которую можно видеть на рис. 7, где показаны распределения смещений, интенсивности напряжений, касательного напряжения и пластической работы.

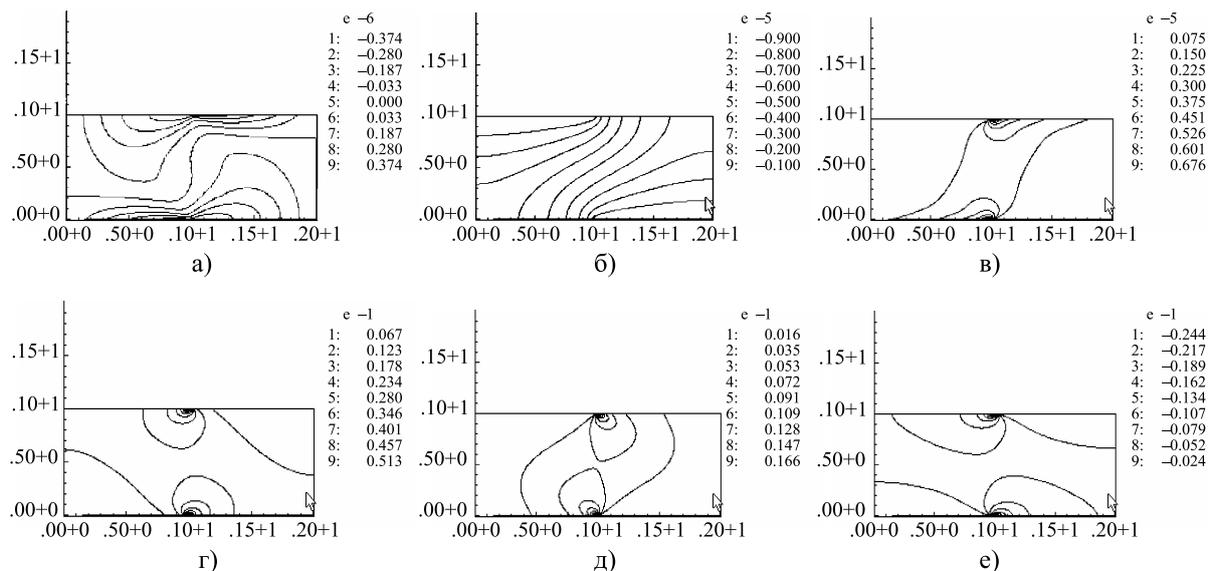


Рис. 6. Распределение горизонтального (а) и вертикального (б) смещений, а также максимальной деформации (в), интенсивности напряжений (г), касательного (д) и среднего (е) напряжений для начала процесса

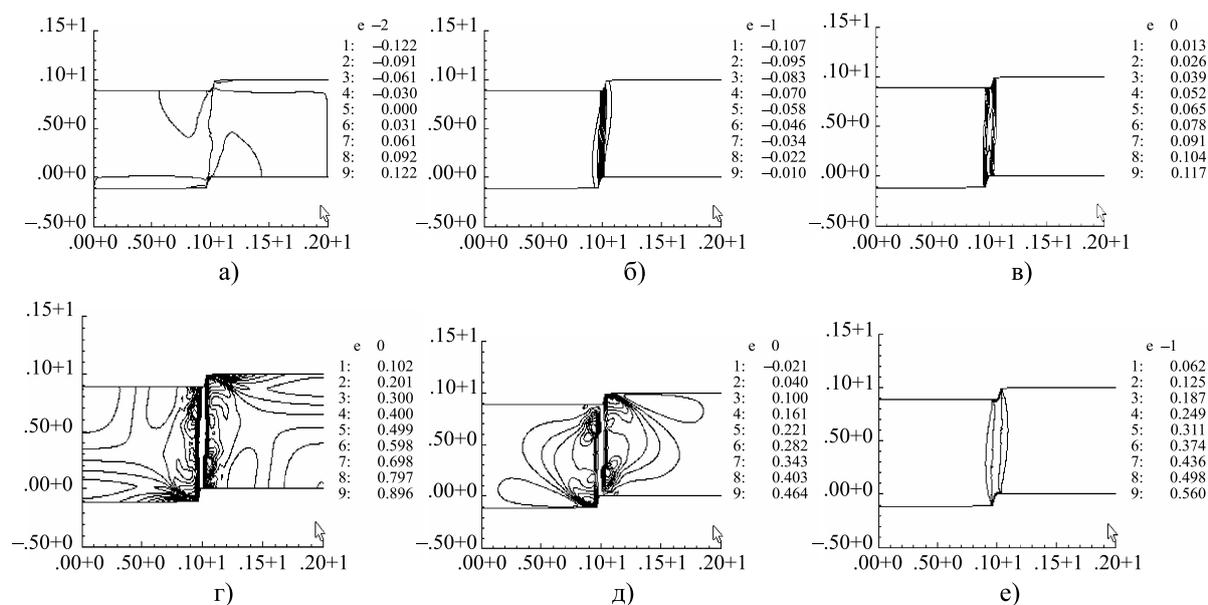


Рис. 7. Распределение горизонтального (а) и вертикального (б) смещений, а также максимальной деформации (в), интенсивности напряжений (г), касательного напряжения (д) и пластической работы (е) для конца процесса

4.4. Разрушение диска с дыркой при сжатии жесткими штампами

Плоская круглая пластина с круглой концентрической дыркой сжимается двумя жесткими штампами. Проскальзывание в зоне контакта не допускается. Максимальные растягивающие деформации наблюдаются в окрестности внутренней границы, в ближайшей к штампам ее части. Результаты решения представлены на рис. 8, где показаны сетка (а), распределение среднего напряжения (б), главная деформация (в, г), а также распределение горизонтального смещения (д, е). Как и в предыдущих случаях, никаких начальных повреждений не вводилось, они возникали и развивались в соответствии с теоретической континуальной моделью повреждающегося материала.

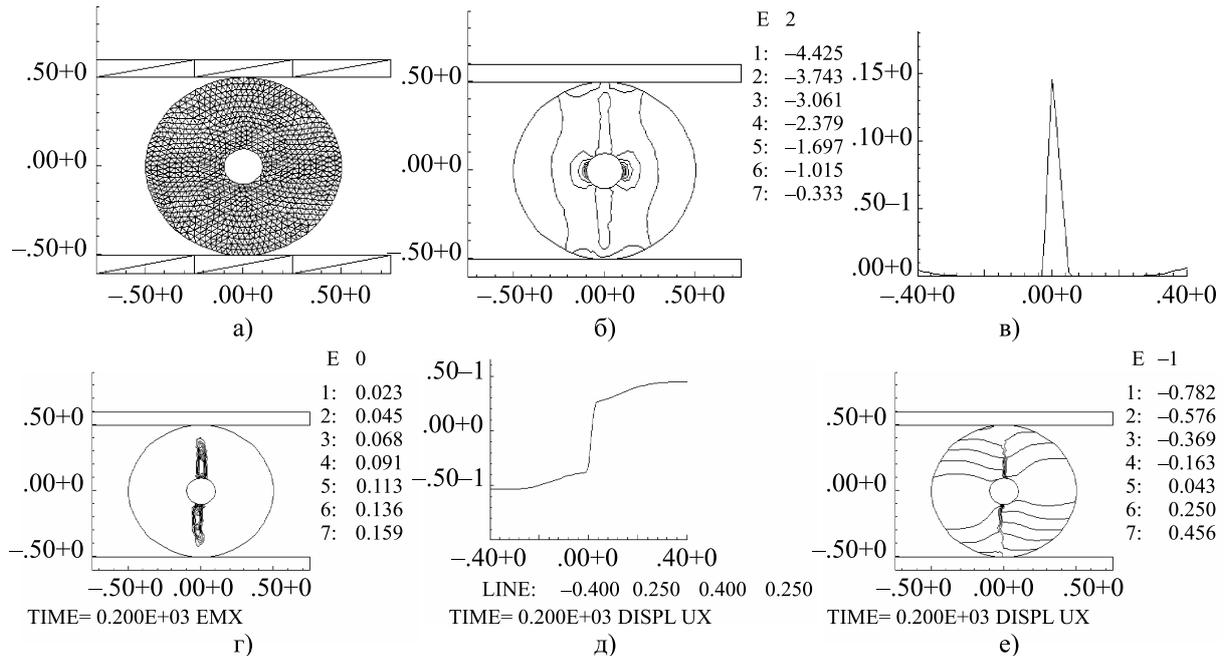


Рис. 8. Разрушение диска с дыркой при сжатии жесткими штампами

4.5. Удар двух тел под углом с учетом разрушения

Пластина-ударник ударяет пластину-преграду со скоростью $u_0 / c^{(1)} = 0.2$, где $c^{(1)}$ — скорость звука в материале ударника, который имел следующие свойства:

$$K^{(1)} = 975, \quad \mu^{(1)} = 369, \quad \sigma_s^{(1)} = 1.0, \quad d\sigma_s^{(1)} / da_p = 0.0, \quad c^{(1)} = 1, \\ k_\omega^{(1)} = 0.0, \quad k_\theta^{(1)} = 10^3, \quad F = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\lim}^{(1)}, \quad \varepsilon_{\lim}^{(1)} = 0.01.$$

Материал преграды обладал следующими свойствами:

$$K^{(2)} = 243, \quad \mu^{(2)} = 92, \quad \sigma_s^{(2)} = 0.25, \quad d\sigma_s^{(2)} / da_p = 0, \quad c^{(2)} = 1, \\ k_\omega^{(2)} = 0.0, \quad k_\theta^{(2)} = 10^6, \quad F = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\lim}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\lim}^{(2)} = 0.01,$$

где ε_{\max} — максимальная главная деформация.

Начальная сетка видна на рис. 9, а. Последующие картинки (рис. 9, б–е) демонстрируют вычисленную эволюцию зон разрушения (узкие черные зоны). Окончательно преграда раскалывается на три части,двигающиеся независимо. Ударник рикошетирует и полностью разрушается.

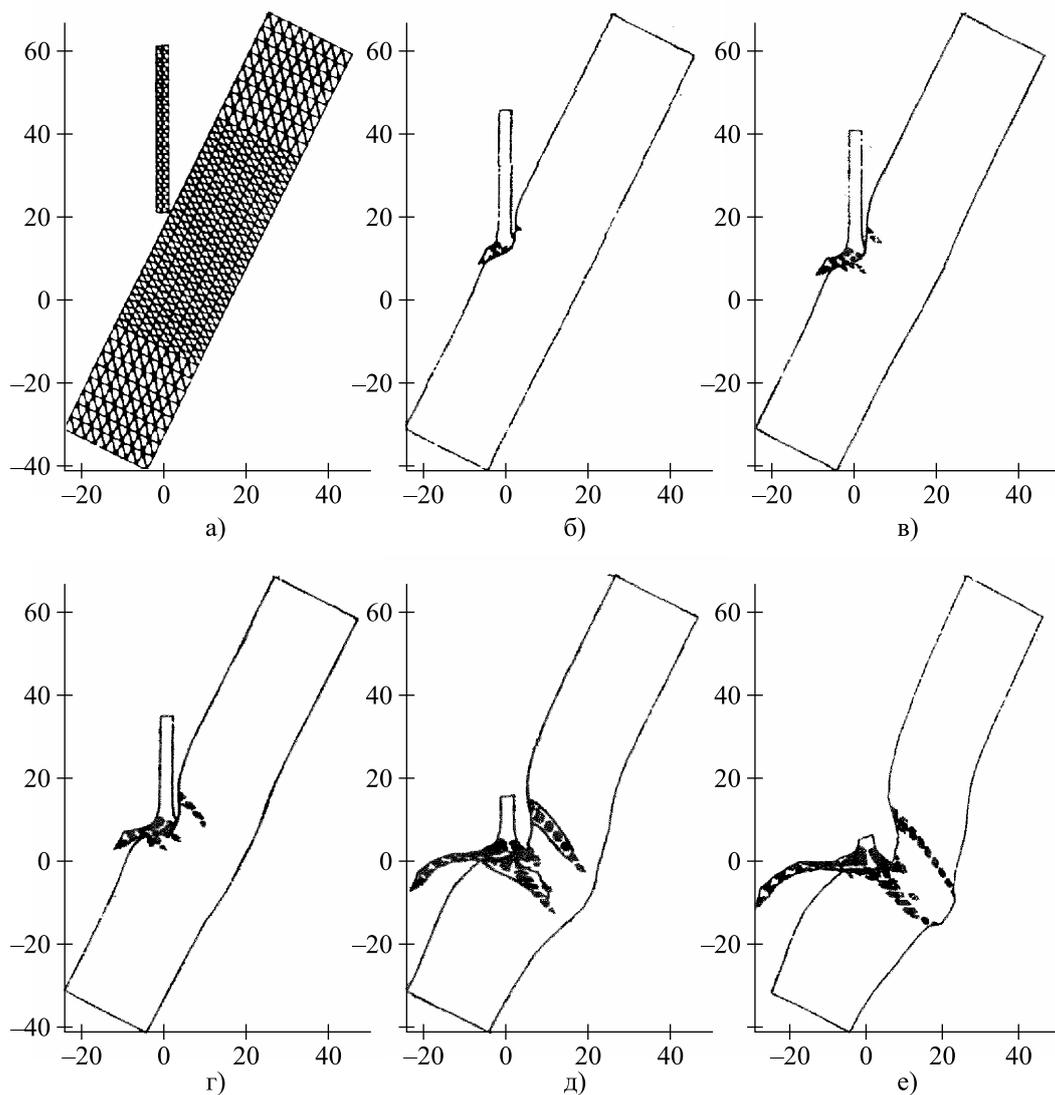


Рис. 9. Разрушение пластин при ударе под углом. Окончательно преграда раскололась на три части. Ударник разрушен полностью

Необходимо подчеркнуть, что попытки использовать пластическую работу и интенсивность касательных напряжений в качестве аргументов функции критерия разрушения F не позволили получить локализацию зон разрушения, подобную показанной на рис. 9.

Рассматривались и многие другие задачи о разрушении частей конструкций при квазистатических и динамических нагружениях. Общий вывод таков: критерии максимальной деформации сдвига работают удовлетворительно в подавляющем числе различных случаев напряженно-деформированного состояния. Узкие зоны разрушения образуются в условиях квазихрупкого разрушения, когда предельная деформация достигается ранее, чем зоны пластичности охватывают значительную часть конструкции. Во многих случаях первоначально квазистатический режим деформации сменяется быстрым динамическим процессом деформации и ростом узких зон разрушения. Алгоритмы расчета, реализующие модели континуального разрушения, должны иметь контроль точности по максимальному приращению деформации на шаге по времени и учитывать инерционные члены даже для первоначально квазистатических процессов деформации, иначе сходимость решений теряется при появлении зон разрушения и появляется аномальная зависимость решения от особенностей дискретизации.

Размывание зон разрушения и искажение решений могут происходить также в схемах с повышенной вязкостью. Схемная вязкость должна быть минимизирована в окрестности зон разрушения. Резкая потеря способности сопротивления деформации также является необходимым условием возникновения узких зон локализации деформаций.

Для обеспечения сходимости результатов при дроблении временных и пространственных шагов критерий разрушения должен содержать масштабный множитель, вид которого подсказывается теорией трещин и механикой хрупкого разрушения. Известно, что в кончике трещины теория упругости предсказывает коренную особенность решения и неограниченный рост напряжений и деформаций. Поэтому критерий разрушения должен формулироваться в терминах коэффициентов концентрации напряжений и деформаций. В численной реализации настоящей работы удовлетворительные результаты для сходимости предельных значений средней деформации разрушения растягиваемых образцов были получены с модификациями критерия разрушения следующего вида:

$$\varepsilon_1 \sqrt{\min(h_x, h_y) / \max(x_{\max} - x_{\min}, y_{\max} - y_{\min})} \leq \varepsilon_{\max},$$

где множитель с корнем как раз и учитывает асимптотику, подсказываемую теорией упругости.

Представленное исследование локализации деформаций позволило реализовать континуальный подход к численному описанию распространения узких зон разрушения, имитирующих магистральные трещины. Это исследование показывает результаты, обещающие детальное моделирование явлений, сопровождающих фрагментацию разрушающихся тел.

4.6. Развитие зон скольжения и отрыва в слоистой среде с полостью при прохождении упругой волны

Также была рассмотрена динамическая задача прохождения плоской продольной упругой волны через свободную цилиндрическую полость в горизонтально ориентированной слоистой среде. В поджатом состоянии слои могут проскальзывать друг относительно друга с условием трения Кулона, дополненным малой вязкой составляющей для регуляризации. Растягивающих напряжений контактная граница слоев не выдерживает, возникают зоны отслоения (отрыва). Распределенные микроскольжения и микроотрывы слоев выступают в качестве дополнительных параметров повреждаемости модели слоистой среды, обоснованной в [Никитин, 2008]. Амплитуда нормального напряжения в волне равна p_0 , до подхода к полости при горизонтальной ориентации слоев волна не вызывает скольжений и отслоений в окружающей среде. При прохождении полости происходит развитие зон скольжения и отслоения в ее окрестности. Результаты численного моделирования этого процесса показаны на рис. 10 при следующих значениях безразмерных параметров: $p_0 = 0.001$, модули Ламе $\lambda = 0.33$, $\mu = 0.33$, коэффициент трения $q = 0.5$.

На рис. 10, *a–в* показаны изолинии нормальных напряжений, горизонтальных скольжений, вертикальных отслоений в момент $t = 3.3$, соответствующий моменту прохождения волны через полость и началу процесса развития зон скольжений и отслоений — во фронтальной окрестности полости. На рис. 10, *г–е* и рис. 10, *ж–и* показаны картины роста зон скольжения и отслоения во фронтальной части полости и их зарождение и развитие в теневой части в моменты времени $t = 4.3$ и $t = 5.3$. Эти значения соответствуют моментам удаления фронта волны от полости на расстояние ее диаметра и завершения процесса формирования зон разрушения.

Как видно из всех результатов расчетов, зоны скольжений представляют собой узкие локализованные полосы (рис. 10, *б, д, з*), расположенные между границами ненарушенной среды и зоны отслоений.

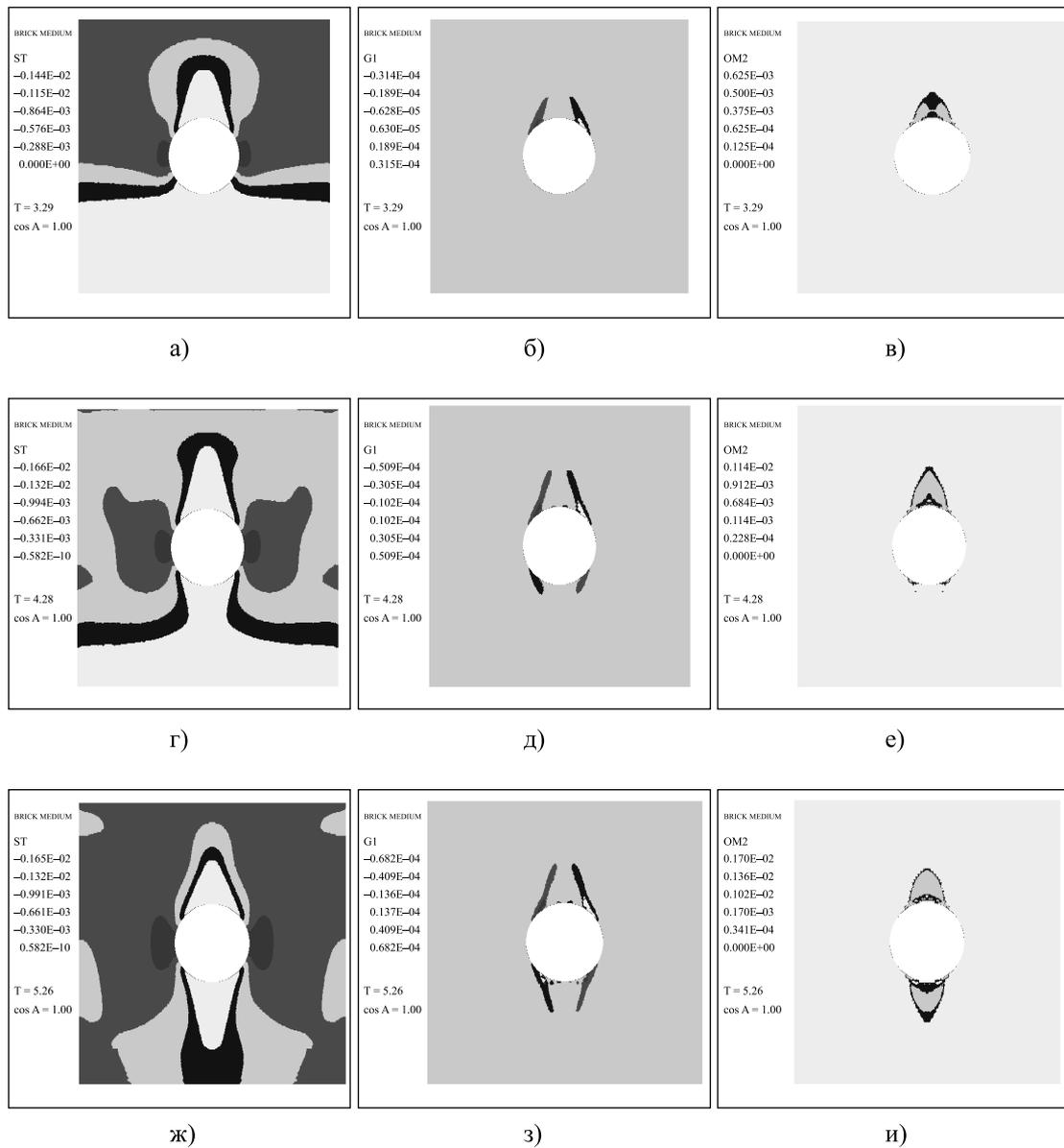


Рис. 10. Развитие зон скольжения и отрыва в слоистой среде с полостью при прохождении упругой волны

5. Выводы

Численные эксперименты показали, что критерии разрушения по предельным деформациям для упругопластических материалов работают лучше, чем критерии по предельным напряжениям. Для получения зон локализации в виде узких трещиноподобных лент важную роль играют также следующие свойства теоретической модели:

- резкий спад сопротивления среды с ростом поврежденности,
- контролируемая по приращениям деформаций точность расчета,
- учет сил инерции (естественная регуляризация задачи),
- минимальное сглаживание (особенно в зонах разрушения),
- сопротивление разрушенного материала сжатию (для обеспечения невырожденности закона движения).

Показано, что благодаря указанным выше свойствам обычная модель повреждающейся упругопластической среды хорошо описывает резкую локализацию деформаций вдоль тонких полос больших градиентов смещений и всплесков деформаций и поддерживает сходимость решения в процессе развития узких зон разрушения.

Вопросы приведения модели повреждающейся упругопластической среды в соответствие с данными физических экспериментов остаются открытыми и актуальными.

Программа «АСТРА», с помощью которой решены представленные примеры, позволяет уверенно проводить подобные расчеты, и количество рассчитанных примеров, а также степень подробности описания результатов легко могут быть увеличены. Используемая методика без принципиальных переделок обобщена на трехмерные нестационарные задачи, описание соответствующих решений готовится.

Список литературы (References)

- Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н.* Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ «АСТРА». — М.: ИПМ АН СССР, 1988. — Препринт № 326. — 68 с.
Burago N. G., Kukudzhanov V. N. Reshenie uprugoplasticheskikh zadach metodom konechnykh elementov. — Moscow: Ishlinsky Institute for problems in mechanics, 1988. — Preprint No. 326. — P. 1–68 (in Russian).
- Бураго Н. Г., Кукуджанов В. Н.* Решение упругопластических задач методом конечных элементов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1991. — Вып. 2. — С. 78–122.
Burago N. G., Kukudzhanov V. N. Reshenie uprugoplasticheskikh zadach metodom konechnykh elementov. Vychislitel'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. — Moscow: Nauka, 1991. — Vol. 2. — P. 78–122 (in Russian).
- Бураго Н. Г., Глушко А. И., Ковшов А. Н.* Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Известия РАН. МТТ. — 2000. — № 6. — С. 4–15.
Burago N. G., Glushko A. I., Kovshov A. N. Termodinamicheskii metod polucheniya opredelyayuschih uravnenii dlya modelei sploshnykh sred // Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela. — 2000. — No. 6. — P. 4–15 (in Russian).
- Бураго Н. Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычислительная механика сплошных сред. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 5–20.
Burago N. G. Modelirovanie razrusheniya uprugoplasticheskikh tel // Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred. — 2008. — Vol. 1, No. 4. — P. 5–20 (in Russian).
- Бураго Н. Г., Журавлев А. Б., Никитин И. С.* Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Известия РАН. МТТ. — 2011. — № 6. — С. 22–33.
Bourago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, No. 6. — P. 828–838.
- Бураго Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л.* Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1082–1092.
Burago N. G., Nikitin I. S., Yakushev V. L. Hybrid numerical method for unsteady problems of continuum mechanics using arbitrary moving adaptive overlap grids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1065–1074. (Original Russian paper: *Burago N. G., Nikitin I. S., Yakushev V. L.* Gibridnyi chislennyi metod resheniya nestatsionarnykh zadach mekhaniki sploshnoi sredy s primeneniem adaptivnykh nalozhennykh setok // Zhurnal Vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1082–1092.)
- Глушко А. И., Нещеретов И. И.* О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Известия АН СССР. МТТ. — 1986. — № 6. — С. 140–146.
Glushko A. I., Nescheretov I. I. O kineticheskom podkhode k razrusheniyu gornykh porod // Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela. — 1986. — No. 6. — P. 140–146 (in Russian).

- Иванов В. Д., Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 10–29.
Ivanov V. D., Kondaurov V. I., Petrov I. B., Kholodov A. S. Raschet dinamicheskogo deformirovaniya i razrusheniya uprugoplasticheskikh tel setochno-kharakteristicheskimi metodami // Matemematischeskoe modelirovanie. — 1990. — Vol. 2, No. 11. — P. 10–29 (in Russian).
- Качанов Л. М.* О времени до разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР, ОТН. — 1958. — № 8. — С. 26–31.
Kachanov L. M. O vremeni do razrusheniya v usloviyakh polzuchesti // Izvestiya AN SSSR. OTN. — 1958. — No. 8. — P. 26–31 (in Russian).
- Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. — М.: Наука, 1974. — 311 с.
Kachanov L. M. Osnovy mekhaniki razrusheniya. — Moscow: Nauka, 1974. — 311 p. (in Russian).
- Кондауров В. И., Мухамедиев Ш. А., Никитин Л. В., Рыжак Е. И.* Механика разрушения горных пород. — М.: Наука, 1987. — 218 с.
Kondaurov V. I., Mukhamediev S. A., Nikitin L. V., Ryzhak E. I. Osnovy mekhaniki razrusheniya gornyx porod. — Moscow: Nauka, 1987. — 218 p. (in Russian).
- Кондауров В. И., Фортвов В. Е.* Основы термодинамики конденсированной среды. — М.: МФТИ, 2002. — 336 с.
Kondaurov V. I., Fortov V. E. Osnovy termodinamiki kondensirovannoi sredy. — Moscow: MFTI, 2002. — 336 p. (in Russian).
- Коротин П. Н., Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное моделирование поведения упругих и упругопластических тел под воздействием мощных энергетических потоков // Математическое моделирование. — 1989. — Т. 1, № 7. — С. 1–12.
Korotin P. N., Petrov I. B., Kholodov A. S. Chislennoe modelirovanie povedeniya uprugikh i uprugoplasticheskikh tel pod vozdeystviem moshchnykh energeticheskikh potokov // Matemematischeskoe modelirovanie. — 1989. — Vol. 1, No. 7. — P. 1–12 (in Russian).
- Кукуджанов В. Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. — 1985. — Т. 8, № 4. — С. 21–65.
Kukudzhанov V. N. Chislennoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov deformirovaniya i razrusheniya uprugoplasticheskikh sred // Uspekhi mekhaniki. — 1985. — Vol. 8, No. 4. — P. 21–65 (in Russian).
- Кукуджанов В. Н.* Микроскопическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // Известия РАН, МТТ. — 1999. — № 5.
Kukudzhанov V. N. Mikroskopicheskaya model razrusheniya neuprugogo materiala i ee primenenie k issledovaniyu lokalizatsii deformatsii // Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela. — 1999. — No. 5 (in Russian).
- Ляхов Г. М.* Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных массивах. — М.: Наука, 1974.
Lyakhov G. M. Foundations of dynamics of explosive waves in soils and rocks. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
- Майнчен Дж., Сак С.* Метод расчета «Тензор» // Вычислительные методы в гидродинамике / под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М.: Мир, 1967. — С. 185–211.
Maenchen G., Sack S. The TENSOR code // Methods in Computational Physics. — Vol. 3. — Fundamental methods in Hydrodynamics. — New York: Academic Press, 1964.
- Никитин И. С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // Известия РАН, МТТ. — 2008. — № 4. — С. 154–165.
Nikitin I. S. Dynamic models of layered and block media with slip, friction, and separation // Mech. Solids. — 2008. — No. 4. — P. 652–661.
- Работнов Ю. Н.* Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций: сборник. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 5–7.
Rabotnov Yu. N. Mekhanizm dlitel'nogo razrusheniya // Voprosy prochnosti materialov i konstruktсии: sbornik. — Moscow: Izdatelstvo AN SSSR, 1959. — P. 5–7 (in Russian).
- Соколовский В. В.* Статика сыпучей среды. — 4-е издание. — М.: Наука, 1991.
Sokolovskii V. V. Statics of granular media. — IV edition. — Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).
- Феодосьев В. И.* Соппротивление материалов. — М.: Наука, 1967. — 552 с.
Feodosiev V. I. Soprotivlenie materialov. — Moscow: Nauka, 1967. — 552 p. (in Russian).

- Фомин В. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. — 600 с.
Fomin V. M., Gulidov A. I., Sapozhnikov G. A. et al. Vysokoskorostnoe vzaimodeistvie tel. — Novosibirsk: Izdatelstvo SO RAN, 1999. — 600 p. (in Russian).
- Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
Cherepanov G. P. Mekhanika khрупkogo razrusheniya. — Moscow: Nauka, 1974. — 640 p. (in Russian).
- Bazant Z. P. Reminiscences on four decades of struggle and progress in softening damage and size effect // *Concr. J. (Japan Concr. Inst.)*. — 2002. — Vol. 40. — P. 16–28.
- Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis on design // *Quart. Appl. Math.* — 1962. — Vol. 10. — P. 157–165.
- Drucker D. C. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua // *Mekhanika. Period. Sbornik Perevodov Inostr. Statei*. — 1964. — No. 3. — P. 115–128.
- Goodman R. E. Introduction to Rock Mechanics. — John Wiley and sons, 1980.
- Hadamard J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique // *Princeton University Bulletin*. — 1902. — P. 49–52.
- Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. — Kluwer Acad. Publ., 1986.
- Larsson R., Runesson K. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* — 1993. — Vol. 36, No. 12. — P. 2087–2105.
- Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. — 2nd edn. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1996.
- Lemaitre J., Desmorat R. Engineering Damage Mechanics. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.
- Liseikin V. D. Grid generation methods. — Springer, 2010.
- Marmi A. K., Habraken A. M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // *Int. J. of fatigue*. — 2009. — Vol. 31. — P. 2031–2040.
- Ortiz M., Leroy Y., Needleman A. A finite element method for localized failure analysis // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* — 1987. — Vol. 61. — P. 189–194.
- Ortiz M., Quigly J. J. Adaptive mesh refinement in strain localization problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* — 1991. — Vol. 90. — P. 781–804.
- Owen D., Hinton E. Finite elements in plasticity. — Swansea, U.K., 1984.
- Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of Ill-Posed Problems. — New York: Winston, 1977.
- Zienkiewicz O., Nayak G. C. Elastoplastic stress analysis: a generalization for strain softening // *Intern. J. Numer. Meth. Engng.* — 1972. — Vol. 5. — P. 113–135.