

УДК 519.6, 524.3, 533

Математическое моделирование вихревого движения в астрофизических объектах на основе газодинамической модели

А. В. Бабаков^{1,a}, В. М. Чечёткин^{2,b}

¹ Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18

² Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

E-mail: ^a babakov@mail.ru, ^b chechetv@gmail.com

Получено 03.06.2018, после доработки — 22.08.2018.

Принято к публикации 21.09.2018.

Рассматривается применение консервативного численного метода потоков для изучения вихревых структур в массивных, быстровращающихся компактных астрофизических объектах, находящихся в условиях самогравитации. Моделирование осуществляется для объектов с различной массой и скоростью вращения. Визуализируются картины вихревой структуры объектов. В расчетах используется газодинамическая модель, в которой газ принимается совершенным и невязким. Численная методика основана на конечно-разностной аппроксимации законов сохранения аддитивных характеристик среды для конечно-го объема. При этом используются *upwind*-аппроксимации плотностей распределения массы, компонент импульса и полной энергии. Для моделирования объектов, обладающих быстрым вращением, при эволюционном расчете осуществляется контроль сохранения компонент момента импульса, законы сохранения для которых не входят в систему основных уравнений. Эволюционный расчет осуществляется на основе параллельных алгоритмов, реализованных на вычислительном комплексе кластерной архитектуры. Алгоритмы основаны на стандартизированной системе передачи сообщений Message Passing Interface (MPI). При этом используются как блокирующие, так и неблокирующие процедуры обмена с контролем завершения операций. Осуществляется распараллеливание по пространству по двум или трем направлениям в зависимости от размера области интегрирования и параметров вычислительной сетки. Одновременно с распараллеливанием по пространству для каждой подобласти осуществляется распараллеливание по физическим факторам: расчет конвективного переноса и гравитационных сил реализуется параллельно на разных процессорах, что позволяет повысить эффективность алгоритмов. Показывается реальная возможность прямого вычисления гравитационных сил посредством суммирования взаимодействия между всеми конечными объемами в области интегрирования. Для методов конечного объема такой подход кажется более последовательным, чем решение уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Численные расчеты осуществлялись на вычислительном комплексе кластерной архитектуры с пиковой производительностью 523 TFlops. В расчетах использовалось до тысячи процессоров.

Ключевые слова: математическое моделирование, консервативные разностные схемы, параллельные алгоритмы, газовая динамика, астрофизика, массивные звезды, гравитация, конвекция, вихревые структуры, сверхновые

UDC 519.6, 524.3, 533

Mathematical simulation of vortex motion in the astrophysical objects on the basis of the gas-dynamic model

A. V. Babakov^{1,a}, V. M. Chechetkin^{2,b}

¹ Institute for Computer Aided Design of RAS,
19/18 Vtoraya Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia

² Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS,
4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia

E-mail: ^a babakov@mail.ru, ^b chechetv@gmail.com

Received 03.06.2018, after completion — 22.08.2018.

Accepted for publication 21.09.2018.

The application of a conservative numerical method of fluxes is examined for studying the vortex structures in the massive, fast-turned compact astrophysical objects, which are in self-gravity conditions. The simulation is accomplished for the objects with different mass and rotational speed. The pictures of the vortex structure of objects are visualized. In the calculations the gas-dynamic model is used, in which gas is accepted perfected and nonviscous. Numerical procedure is based on the finite-difference approximation of the conservation laws of the additive characteristics of medium for the finite volume. The “upwind” approximations of the densities of distribution of mass, components of momentum and total energy are applied. For the simulation of the objects, which possess fast-spin motion, the control of conservation for the component of moment of momentum is carried out during calculation. Evolutionary calculation is carried out on the basis of the parallel algorithms, realized on the computer complex of cluster architecture. Algorithms are based on the standardized system of message transfer Message Passing Interface (MPI). The blocking procedures of exchange and non-blocking procedures of exchange with control of the completion of operation are used. The parallelization on the space in two or three directions is carried out depending on the size of integration area and parameters of computational grid. For each subarea the parallelization based on the physical factors is carried out also: the calculations of gas dynamics part and gravitational forces are realized on the different processors, that allows to raise the efficiency of algorithms. The real possibility of the direct calculation of gravitational forces by means of the summation of interaction between all finite volumes in the integration area is shown. For the finite volume methods this approach seems to more consecutive than the solution of Poisson’s equation for the gravitational potential. Numerical calculations were carried out on the computer complex of cluster architecture with the peak productivity 523 TFlops. In the calculations up to thousand processors was used.

Keywords: mathematical simulation, conservative difference schemes, numerical methods, parallel algorithms, gas dynamics, astrophysics, massive stars, gravity, convection, vortex structures, supernovae

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 631–643 (Russian).

1. Введение

Проблема изучения вихревого движения в настоящее время остается по-прежнему актуальной. Вихревые течения появляются во многих природных явлениях, струйных потоках, при движениях сплошной среды около аппаратов аэрокосмической техники. Для гидродинамических течений сущность вихревых потоков нашла свое отражение в теореме Гельмгольца [Кочин и др., 1963] еще много лет назад. В астрофизике вихревое движение свойственно аккреционным звездным дискам [Sawada et al., 1986; Velikhov et al., 2007], при аккреции вещества на компактные гравитирующие объекты [Pudritz, Norman, 1986; Kuznetsov et al., 1999], в галактиках [Chakrabarti et al., 2003; Lugovskii, Filistov, 2000] и атмосферах планет [Mingaleva et al., 2015] создается при взрыве сверхновых [Chechetkin et al., 1997; Couch, Ott, 2015; Wongwathanarat et al., 2015]. Важное значение для атмосфер планет имеет образование крупных вихрей [Mingalev et al., 2012; Belotserkovskii et al., 2012; Belotserkovskii et al., 2005]. Возникновение вихревого движения может иметь различную природу. Применительно к астрофизическим задачам при сжатии или расширении вращающейся звезды согласно [Кочин и др., 1963] появляется крупномасштабное вихревое движение из-за вмерзнутости вихревых линий. В настоящей работе внимание будет уделено этому механизму развития вихревого движения в компактных астрофизических объектах.

Развитие многопроцессорных вычислительных комплексов и применение современных эффективных численных методов позволяют осуществлять математическое моделирование пространственно-нестационарного движения сплошной среды, в частности, при изучении эволюции компактных астрофизических объектов [Schwabosiah et al., 2017; Müller et al., 2017; Dolence et al., 2015; Couch, Ott, 2015].

Данная работа является продолжением исследований [Бабаков и др., 2017].

2. Методика численного моделирования

В основу моделирования положен консервативный численный метод [Белоцерковский, Северинов, 1973]. Первоначально метод разрабатывался для исследования стационарного внешнего сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким теплопроводным газом. Дальнейшее развитие метода позволило проводить численные исследования пространственно-нестационарных дозвуковых и сверхзвуковых струйных течений с вихревыми структурами и крупномасштабной турбулентностью [Belotserkovskii, Babakov, 1990; Бабаков, 2011; Babakov, 2007], течений с внутренним отрывом потока, трансзвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых течений [Бабаков, 2016].

В настоящей статье метод потоков используется для изучения газодинамических и конвективных процессов в газовых звездах, находящихся в условиях самогравитации. При моделировании используется модель совершенного газа.

Метод потоков основан на конечно-разностной аппроксимации законов сохранения аддитивных характеристик среды, записанных в интегральной форме для конечного объема.

Рассматриваются законы сохранения массы M , компонент импульса P_k и полной энергии E .

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \oint_{S_\Omega} \mathbf{Q}_F \mathbf{n} dS + G, \quad F = \oint_{\Omega} f d\Omega, \quad (1)$$

$$F = (M, P_k, E), \quad f = (\rho, \zeta_k, \varepsilon).$$

Законы сохранения (1) записываются для каждой аддитивной характеристики F для каждого конечного объема Ω с ограничивающей поверхностью S_Ω , возникающего при дискретизации области интегрирования введением расчетной сетки.

В (1) \mathbf{Q}_F — вектор плотности потока аддитивной характеристики F , $f = (\rho, \zeta_k, \varepsilon)$ — плотности распределения массы, компонент импульса и полной энергии.

Учет силы гравитации, действующей на конечный объем, осуществляется посредством введения в законы сохранения импульса и полной энергии члена G . В дальнейшем для компонент векторных величин (векторов плотностей потоков, импульса, скорости, гравитационной силы, нормали) используется декартова система координат (x_k) .

Как указывалось выше, для моделирования конвективных процессов в астрофизических объектах используется газодинамическая модель. При этом для замыкания системы уравнений (1) используется уравнение состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad e = c_v T. \quad (2)$$

В (2) p — давление, γ — отношение удельных теплоемкостей, e — удельная внутренняя энергия, c_v — теплоемкость при постоянном объеме.

Конечно-разностный аналог законов сохранения (1) строится посредством замены интегрирования по конечному объему Ω умножения средних по объему значений плотностей распределения величин f и замены интегрирования по ограничивающей конечный объем Ω поверхности S_Ω на суммирование по боковым поверхностям произведения вычисляемых в характерных точках боковых поверхностей векторов плотностей потоков на значение боковой поверхности. При этом используется первый порядок аппроксимации по времени t :

$$\Omega_m \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\tau} = - \sum_{S_i} (\mathbf{Q}_F \mathbf{n} dS)_{S_i} + \rho_m \Omega_m g, \quad g = \left(0, (g_k)_m, \sum_{j=1}^3 (v_j g_j)_m \right). \quad (3)$$

В (3) индекс m указывает на значение функции в характерной внутренней точке объема Ω_m , индекс n — номер временного слоя, τ — шаг интегрирования по времени. v_k , g_k — декартовы компоненты скорости и гравитационного ускорения соответственно, S_i — боковые поверхности Ω_m .

Построенный таким образом конечно-разностный аналог законов сохранения обладает свойством консервативности вне зависимости от способа вычисления значений векторов плотностей распределения на границах Ω_m .

Не останавливаясь подробно на аппроксимации векторов потоков на границах поверхностей S_i объема $\bar{\Omega}$, отметим, что при их вычислении для плотностей распределения аддитивных характеристик среды используются направленные разности (так называемые upwind-аппроксимации). Для значений скоростей переноса и давления в характерных точках поверхностей S_i применяются симметричные аппроксимационные соотношения. В зависимости от аппроксимации плотностей распределения на гранях конечного объема реализуются конечно-разностные схемы первого или второго порядка аппроксимации по пространству. Более подробное описание соответствующих аппроксимаций представлено в [Belotserkovskii, Babakov, 1990; Babakov, 2011].

Система уравнений (3) вместе с уравнением состояния (2), дополненная краевыми условиями на границах области интегрирования (их конечно-разностными аналогами), является замкнутой относительно значений плотности $(\rho)_m$, компонент скорости $(v_k)_m$ и температуры $(T)_m$ в характерных точках объемов Ω_m .

Отметим еще одну особенность моделирования быстровращающихся газовых объектов, для которых вращение является существенно доминирующим движением. Используемая конечно-разностная модель основана на законах сохранения массы, компонент импульса и полной энергии. При этом в рассматриваемой постановке должны выполняться и законы сохранения компонент импульса, которые не входят в определяющую систему уравнений (1). Сохранение компонент момента импульса в области интегрирования в эволюционном расчете при исполь-

зовании конечно-разностного аналога не очевидно. В связи с этим при эволюционном расчете осуществлялся контроль сохранения компонент момента импульса. При интегрировании даже на большие времена компонента момента импульса, связанная с вращением, сохранялась с точностью 1 %. При этом для двух других компонент ошибка не превышала 10^{-12} .

Остановимся на особенностях разработанных параллельных алгоритмов. Учитывая геометрию задачи, вычислительная сетка строится в сферической системе координат (r, θ, ϕ) . При этом область интегрирования разбивается по угловым (и радиальному) направлениям на P подобластей, то есть распараллеливание по пространству реализуется по двум (трем) направлениям. Распараллеливание по пространству по двум или трем направлениям определяется размером области интегрирования и параметрами вычислительной сетки. Наибольшая эффективность параллельных алгоритмов при реальных расчетах достигается в случае, когда число конечных объемов в каждой подобласти по каждому из направлений по возможности одинаково.

В используемой численной методике учет самогравитации основан на прямом вычислении гравитационных сил посредством суммирования взаимодействия между всеми конечными объемами, находящимися в области интегрирования.

$$(g_j)_m = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^N \gamma_g \frac{\rho_k \Omega_k [(x_j)_m - (x_j)_k]}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_k|^3}, \quad (4)$$

где γ_g — гравитационная постоянная, N — полное число конечных объемов в области интегрирования, а суммирование осуществляется по всем объемам, за исключением Ω_m ; \mathbf{r}_m , $(x_j)_m$ — радиус-вектор и j -координата центра масс объема Ω_m .

Метод потоков является методом конечного объема, и для него использование соотношения (4) кажется более последовательным, чем применение алгоритмов, прямо не связанных с конечностью объемов и основанных на численном решении уравнения Пуассона для гравитационного потенциала (например, [Aksenov, 1999]). Однако такой подход связан с большими затратами вычислительного времени. При прямом расчете гравитационного поля число операций пропорционально N^2 . Причем N может достигать до нескольких десятков миллионов. Использование многопроцессорных вычислительных комплексов позволяет сократить число операций на каждом процессоре до N^2/P (P — число подобластей в области интегрирования), что при использовании вычислительных систем средней мощности уменьшает число операций на 3 порядка, и прямой численный расчет гравитационных сил при использовании нескольких миллионов конечных объемов в области интегрирования становится реальным. При возможности использовать большое количество процессоров эффективность параллельных алгоритмов можно повысить следующим образом. Как показала практика рассматриваемых ниже расчетов, перерасчет гравитационного поля без существенной потери точности можно осуществлять не на каждом временном шаге (в приведенных ниже расчетах разница не превышала 3 %). Поэтому одновременно с распараллеливанием по пространству для каждой подобласти осуществляется распараллеливание по физическим факторам, а именно, расчет конвективного переноса реализуется на одних процессорах, а расчет гравитационного поля параллельно на других. Более того, если позволяет конкретная задача, времена расчета конвективной части на множестве временных итераций и гравитационных сил можно сделать сопоставимыми. Повысить эффективность параллельных алгоритмов можно также следующим образом. Расчет действующей на каждый конечный объем гравитационной силы требует наличия поля плотности всей области интегрирования. Это реализуется выделением специального процессора, на который передаются поля плотности из каждой подобласти. Далее поле плотности всей области интегрирования с этого процессора передается на процессоры, вычисляющие гравитационные силы, действующие на конечные объемы в каждой подобласти. Следует отметить, что эффективность такого подхода и подхода, в котором реализуется обмен полями плотности между всеми процессорами, может зависеть от конкретной используемой вычислительной системы.

Для графической обработки результатов и визуализации в процессе вычислений картин течения выделяется специальный процессор, на который через заданный интервал времени передаются значения газодинамических переменных со всех подобластей. На нем осуществляется их графическая обработка в процессе вычислений (без замедления последнего). Таким образом реализуется возможность иметь визуализированные картины течения как после окончания расчета для всего временного интервала, так и в течение реальных вычислений.

Разработанные параллельные алгоритмы основаны на стандартизированной системе передачи сообщений Message Passing Interface (MPI). В алгоритмах используются как блокирующие, так и неблокирующие процедуры обмена с контролем завершения операций. В расчетах использовалось до тысячи вычислительных процессоров.

Расчеты осуществлялись на вычислительном комплексе кластерной архитектуры с пиковой производительностью 523 TFlops. В комплекс входят 207 вычислительных узлов, состоящих из 2-х процессоров Xeon E5-2690 (64Gb памяти) и 2-х сопроцессоров Intel Xeon Phi 7110X, объединенных сетями на базе FDR Infiniband и Gigabit Ethernet.

3. Постановка задачи об эволюции быстровращающихся астрофизических объектов на основе газодинамической модели

Рассматривается эволюционный расчет структуры быстровращающихся газовых объектов, находящихся в условиях самогравитации и имеющих различную массу и скорость вращения. В используемой газодинамической модели сжимаемый газ принимается совершенным, невязким и нетеплопроводным, с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 4/3$.

Область интегрирования D ограничивается сферической поверхностью радиусом R . Узловые точки конечных объемов Ω_m образуются координатными линиями с постоянными шагами по радиальной r и угловым θ , ϕ координатам. Вводится также декартова система координат (x, y, z) с началом координат, совпадающим с центром области интегрирования. В области D решается система уравнений (3), дополненная краевыми условиями на внешней границе области интегрирования $r = R$, которые определяются нулевыми значениями скоростей и газодинамических переменных.

Начальное поле переменных для быстровращающейся самогравитирующей области задается в соответствии с методикой [Aksenov, Blinnikov, 1994], определяющей равновесное состояние газовых объектов с политропным уравнением состояния $p/\rho^\gamma = \text{const}$ и угловой скоростью, являющейся функцией только расстояния от оси вращения. Начальное поле температуры задается в соответствии с (2).

Параметром задачи при выбранном законе вращения является отношение β полярного радиуса к экваториальному ($\beta < 1$). Вращение задается вокруг оси x . Параметр β определяет профили угловых скоростей вращения и газодинамических переменных в начальном поле.

4. Результаты численного моделирования

В расчетах внешняя граница области интегрирования задавалась равной $R_0 = 1.5r_0$, где r_0 — начальный радиус объекта в экваториальной плоскости ($x = 0$). Использовалась вычислительная сетка, состоящая из 6 553 600 конечных объемов, с разбиениями по радиальной и угловым направлениям $200 \times 128 \times 256$.

В качестве характерных переменных выберем начальный экваториальный радиус звезды r_0 , температуру T_0 и плотность ρ_0 в центре звезды ($r = 0$) при $t = 0$. За характерную скорость a_0 примем $a_0 = a_{0s}/\gamma^{0.5}$, где a_{0s} — скорость звука, вычисленная по параметрам в центре звезды. При этом характерное время $t_0 = r_0 / a_0$, а характерное давление $p_0 = \rho_0 a_0^2$.

Таблица 1. Параметры вариантов расчета

№	β	M/M_{\odot}	r_0/R_{\odot}	ρ_0 (г/см ³)	T_0 (°K)	t_0 (с)	a_0 (см/с)
1	0.1	12.3	0.03	2.650E+05	0.165E+9	105.0	0.192E+9
2	0.2	21.8	0.059	2.650E+05	0.427E+9	65.23	0.309E+9
3	0.3	31.2	0.088	2.650E+05	0.696E+9	51.11	0.395E+9
4	0.4	40.4	0.117	2.650E+05	0.953E+9	43.66	0.462E+9
5	0.5	49.1	0.146	2.650E+05	1.194E+9	39.01	0.517E+9

Численные расчеты проводились для указанных в таблице 1 параметров при различных значениях β .

В таблице приведены значения массы звезды M по отношению к солнечной M_{\odot} (индекс \odot указывает на солнечный параметр), полярного радиуса r_1 , отнесенного к солнечному радиусу R_{\odot} . Во всех вариантах начальный экваториальный радиус принимался равным $r_0 = 0.29 R_{\odot}$. Характерное время t_0 позволяет соотнести приведенные ниже результаты для каждого варианта расчета с реальным физическим временем.

В дальнейшем будем использовать безразмерные переменные: $\bar{x}_k = x_k / r_0$, $\bar{r} = r / r_0$, плотность $\bar{\rho} = \rho / \rho_0$, температура $\bar{T} = T / T_0$, декартовы компоненты скорости $\bar{v}_k = v_k / a_0$, время $\bar{t} = t / t_0$, давление $\bar{p} = p / p_0$. При таком способе обезразмеривания используемое в эволюционном расчете соотношение для определения давления имеет вид $\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T}$.

При эволюционном расчете для конечных объемов, в которых плотность принимает значение меньше заданного минимального значения $\bar{\rho}_{\min}$, скорости конвективного переноса, давление и температура принимаются равными 0. В расчетах $\bar{\rho}_{\min} = 10^{-8}$.

Отметим здесь еще одну возможность увеличить быстродействие алгоритма. При определении гравитационного ускорения для конечных объемов с $\bar{\rho} < \bar{\rho}_{\min}$ можно не выполнять вычисления по соотношению (4), так же как и внутри суммирования. При этом относительная разница в переменных в области интегрирования гравитационной силы при эволюционном расчете не превышала значения 10^{-5} .

Далее для всех переменных приводятся их безразмерные значения, а верхнее надчеркивание над переменными опускается.

В таблице 2 для рассматриваемых вариантов расчета приведены значения компоненты момента импульса J_x , внутренней E_h , кинетической E_k , потенциальной E_p и полной $E_s = E_h + E_k + E_p$ энергий звезды в начальный момент времени.

Таблица 2. Компонента момента импульса J_x , внутренняя E_h , кинетическая E_k , потенциальная E_p и полная E_s энергии звезды в начальный момент времени

№	β	J_x	E_h	E_k	E_p	E_s
1	0.1	4.83E-03	0.0183	0.0178	-0.0540	-0.0179
2	0.2	5.70E-03	0.0332	0.0143	-0.0618	-0.0143
3	0.3	6.40E-03	0.0483	0.0123	-0.0729	-0.0123
4	0.4	6.81E-03	0.0631	0.0105	-0.0824	-0.0105
5	0.5	6.95E-03	0.0774	0.0087	-0.0947	-0.0086

На рис. 1 для рассматриваемых вариантов показаны начальные ($t = 0$) профили плотности по оси вращения звезды и в ее экваториальной плоскости. Номера кривых здесь и далее соответствуют номерам вариантов расчета таблицы 1.

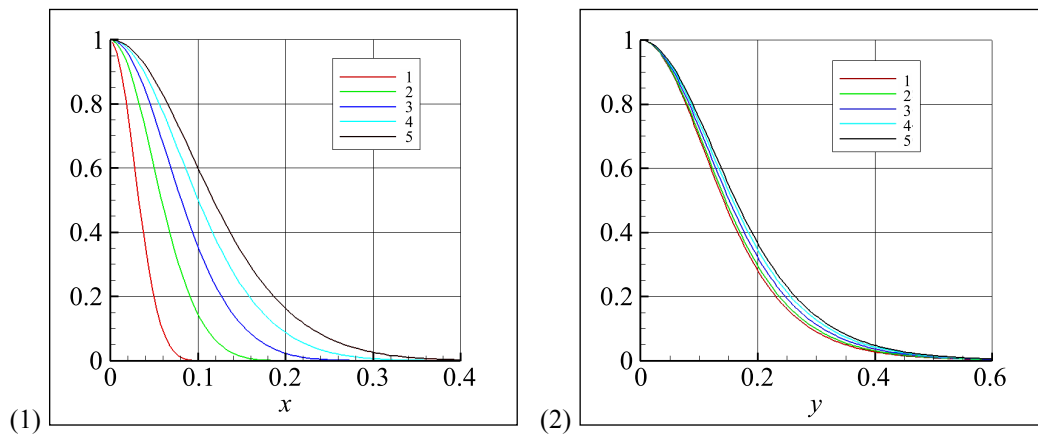


Рис. 1. Начальные профили плотности по оси вращения (1) и в экваториальной плоскости (2). Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

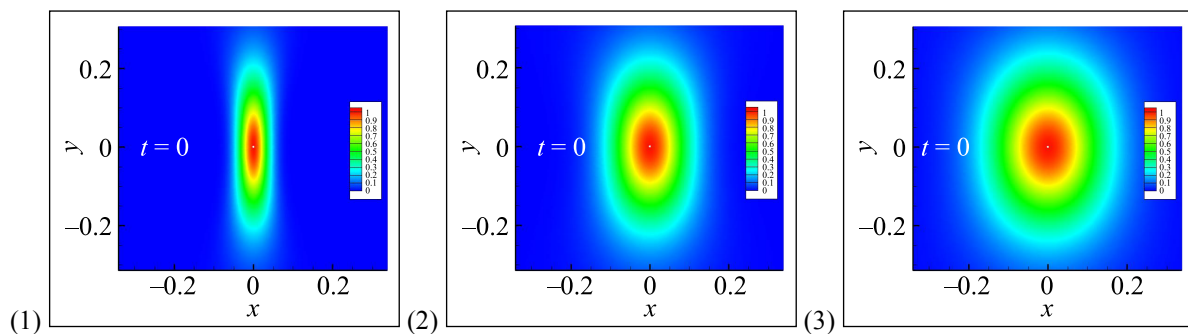


Рис. 2. Поле плотности в начальный момент времени: 1 — $\beta = 0.1$, 2 — $\beta = 0.3$, 3 — $\beta = 0.5$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

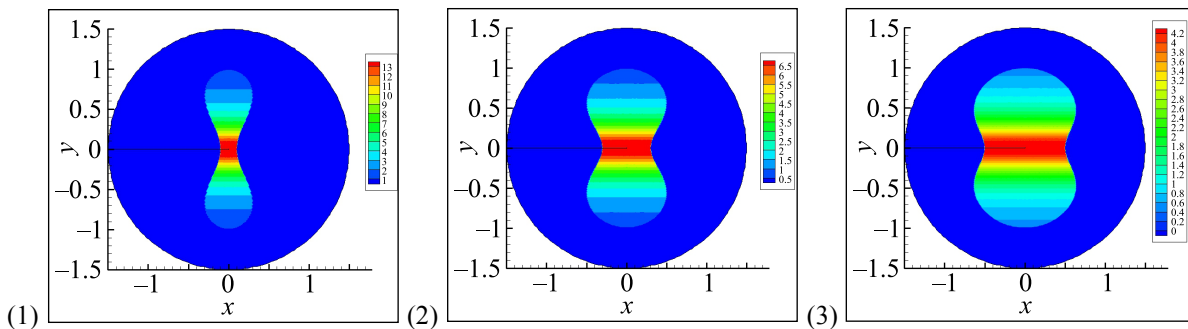


Рис. 3. Поле угловой скорости в начальный момент времени: 1 — $\beta = 0.1$, 2 — $\beta = 0.3$, 3 — $\beta = 0.5$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

На рис. 2 в плоскости, проходящей через ось вращения (меридиональной плоскости $\theta = 0$), приведено начальное поле плотности, а на рис. 3 — поле угловой скорости (напомним, что для конечных объемов, в которых плотность меньше заданного минимального значения 10^{-8} , компоненты скорости принимаются равными 0).

Начальное поле обладает осевой симметрией, а поле скоростей таково, что присутствует только вращение вокруг оси x . Для конечно-разностных соотношений метода потоков начальная конфигурация, заданная в соответствии с указанной выше методикой, является близкой к равновесной, что можно считать внесением в нее малых возмущений. В рассматриваемой

задаче исследуется развитие этих малых возмущений. Для конечных объемов возмущения гравитационного поля и градиента давления приводят к движению среды в радиальном направлении, что при наличии вращения переводит численное решение в нестационарный режим с появлением видимых вихревых структур в области сосредоточения основной массы объекта.

На рис. 4 для звезды с параметром $\beta = 0.5$ представлены поля плотности и мгновенные линии тока для различных моментов времени.

Приведенные картины дают представление о зарождении вихревого движения в центре звезды с дальнейшим увеличением числа вихревых структур и их радиальном перемещении с зарождением новых структур в области большой плотности.

Аналогичные картины течения для звезды с большей скоростью вращения при $\beta = 0.3$ приведены на рис. 5. Увеличение скорости вращения приводит к более сложной вихревой структуре.

Представление о поведении параметров газа дают рис. 6, 7. Для рассматриваемого варианта $\beta = 0.3$ на рис. 6 приведены временные зависимости плотности и температуры в точке с сферическими координатами $r = 0.15, \phi = 0^\circ, \theta = 45^\circ$, где ϕ, θ — меридиональный и азимутальный углы соответственно.

На рис. 7 представлены временные зависимости компонент скорости v_r, v_ϕ и v_θ в указанной точке.

Представленные на рис. 7 зависимости показывают, что скорости возникающего движения (компоненты v_r и v_θ) существенно меньше скорости вращения v_ϕ .

Увеличение скорости вращения ($\beta = 0.1$) приводит к естественному сжатию звезды к экваториальной плоскости, вблизи которой и образуется вихревое движение (рис. 8).

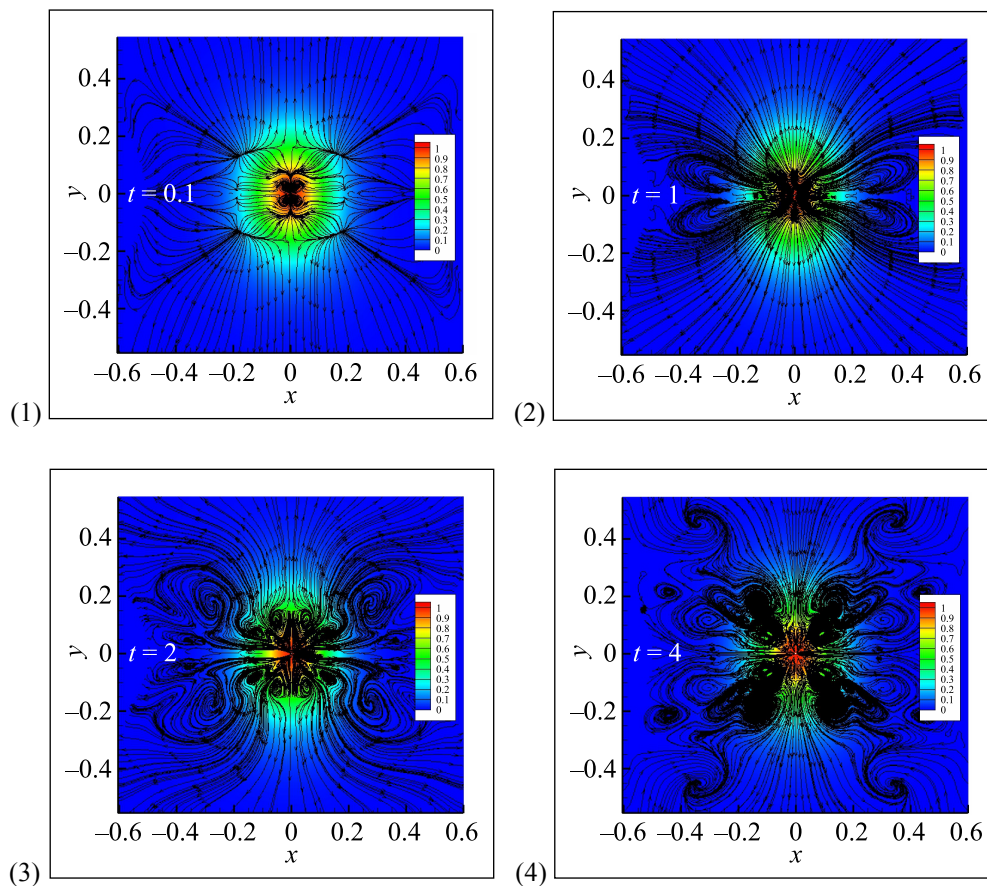


Рис. 4. $\beta = 0.5$. Поле плотности и мгновенные линии тока для следующих моментов времени: 1 — $t = 0.1$, 2 — $t = 1.0$, 3 — $t = 2.0$, 4 — $t = 4.0$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

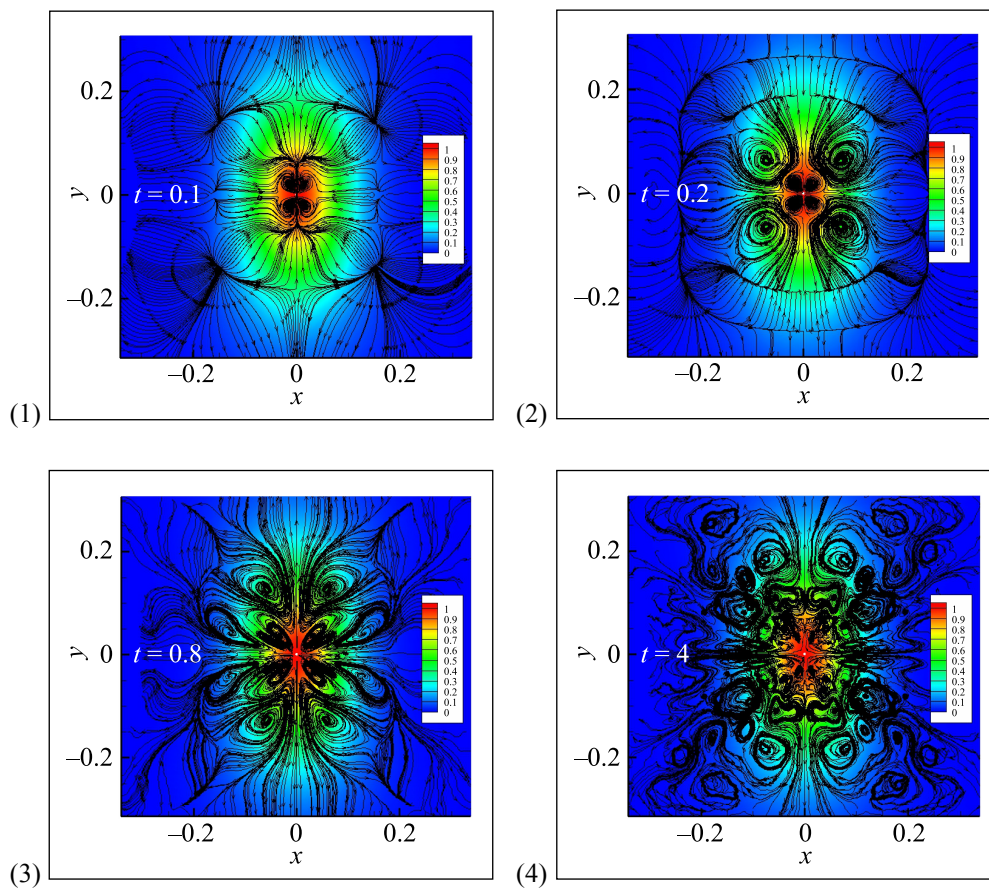


Рис. 5. $\beta = 0.3$. Поле плотности и мгновенные линии тока для следующих моментов времени: 1 — $t = 0.1$, 2 — $t = 0.2$, 3 — $t = 0.8$, 4 — $t = 4.0$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

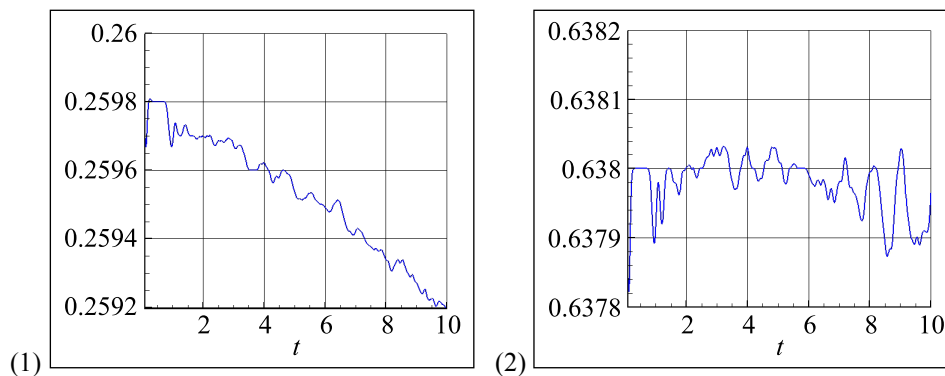


Рис. 6. $\beta = 0.3$. Поведение во времени плотности ρ (1) и температуры T (2)

Для данного варианта разница между полной кинетической энергией и кинетической энергией вращения составляет по отношению к полной кинетической энергии величину менее 0.2 %.

Отметим, что вихревое движение реализуется на фоне практически не меняющегося поля плотности в области распределения основной массы объекта, а на границе объекта образуется слой с повышенной энтропией.

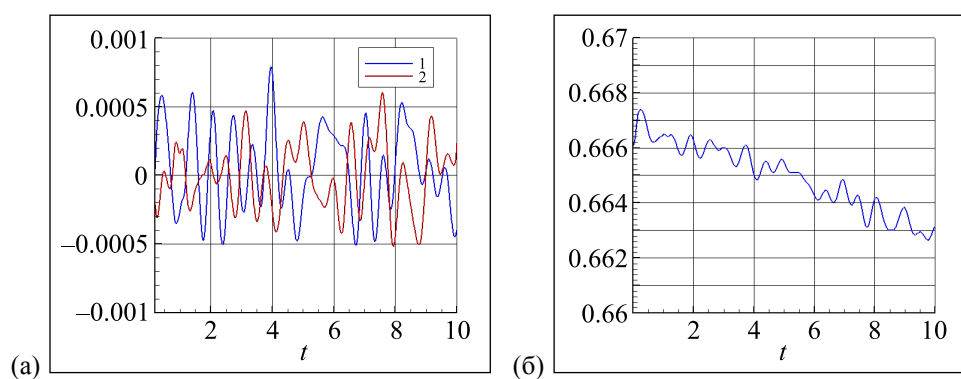


Рис. 7. $\beta = 0.3$. Поведение во времени компонент скорости: а) v_r (1), v_θ (2); б) v_ϕ . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

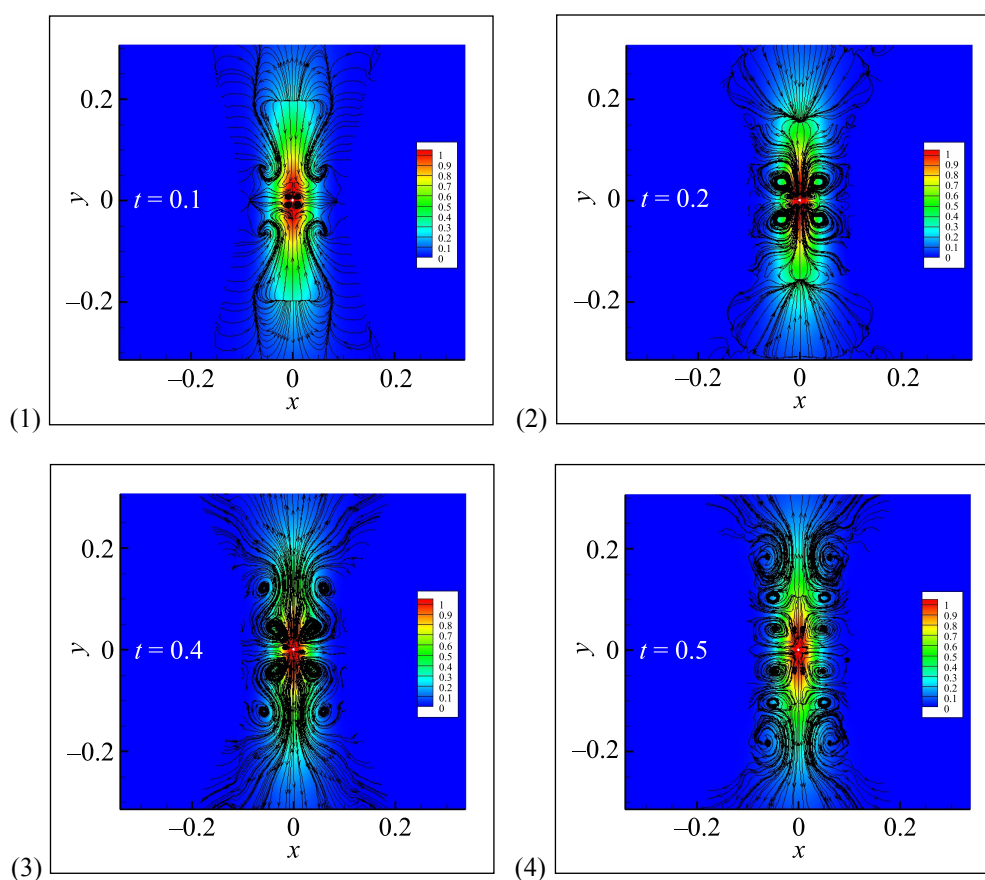


Рис. 8. $\beta = 0.1$. Поле плотности и мгновенные линии тока для следующих моментов времени: 1 — $t = 0.1$, 2 — $t = 0.2$, 3 — $t = 0.4$, 4 — $t = 0.5$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

5. Заключение

Главным результатом приведенных расчетов является демонстрация возможности моделирования возникновения вихревого движения в быстровращающихся самогравитирующих объектах в трехмерной постановке. Отметим, что возникающее вихревое крупномасштабное движения внутри основной массы звезды может играть существенную роль в объяснении взрыва сверхновых звезд. Особенно важна структура течения при исследовании проблемы выхода эле-

ментов при взрыве сверхновой. Другим важным направлением является вопрос о гравитационном излучении при несимметричном взрыве, с учетом того, что в настоящее время работают установки регистрации подобного излучения. Важным результатом работы является также демонстрация возможности проведения численных расчетов с использованием прямого вычисления гравитационного поля на базе суперкомпьютеров.

Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (МСЦ РАН), а также с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

Авторы выражают благодарность А. Г. Аксенову за полезное обсуждение вопросов, связанных с заданием начального поля газодинамических переменных для вращающихся компактных звездных объектов.

Список литературы (References)

Бабаков А. В. Численное моделирование пространственно-нестационарных струй сжимаемого газа на многопроцессорном вычислительном комплексе // ЖВМиМФ. — 2011. — Т. 51, № 2. — С. 251–260.

Babakov A. V. Numerical simulation of spatially unsteady jets of compressible gas on a multiprocessor computer system // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 235–244. (Original Russian paper: *Babakov A. V.* Chislennoe modelirovanie prostranstvenno-nestatsionarnykh strui szhimaemogo gaza na mnogoprotseornom vychislitelnom komplekse // Comput. Math. Math. Phys. — 2011. — Vol. 51, No. 2. — P. 251–260.)

Бабаков А. В. Программный комплекс “flux” для моделирования фундаментальных и прикладных задач аэрогидродинамики // ЖВМиМФ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 1174–1184.

Babakov A. V. Program package FLUX for the simulation of fundamental and applied problems of fluid dynamics // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1151–1161. (Original Russian paper: *Babakov A. V.* Programmnyi kompleks “flux” dlia modelirovaniia fundamentalnykh i prikladnykh zadach aerogidrodinamiki // Comput. Math. Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, No. 6. — P. 1174–1184.)

Бабаков А. В., Попов М. В., Чечёткин В. М. Моделирование эволюции быстровращающейся звезды на основе газодинамической модели // Математическое моделирование. — 2017. — Т. 29, № 11. — С. 131–139.

Babakov A. V., Popov M. V., Chechetkin V. M. Modelirovanie evoliutsii bystrovrashchaiushcheisia zvezdy na osnove gazodinamicheskoi modeli // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2017. — Vol. 29, No. 11. — P. 131–139.

Белоцерковский О. М., Северинов Л. И. Консервативный метод потоков и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом // ЖВМиМФ. — 1973. — Т. 13, № 2. — С. 385–397.

Belotserkovskii O. M., Severinov L. I. The conservative “flow” method and the calculation of the flow of a viscous heat-conducting gas past a body of finite size // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1973. — Vol. 13, No. 2. — P. 141–156. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Severinov L. I.* Konservativnyi metod potokov i raschet obtekaniia tela konechnykh razmerov viazkim teploprovodnym gazom // Comput. Math. Math. Phys. — 1973. — Vol. 13, No. 2. — P. 385–397.)

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963.

Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. Teoreticheskaiia gidromekhanika. — Moscow: Fizmatgiz, 1963 (in Russian).

Aksenov A. G., Blinnikov S. I. A Newton iteration method for obtaining equilibria of rapidly rotating stars // Astronomy and Astrophysics. — 1994. — No. 290. — P. 674–681.

Aksenov A. G. Numerical solution of the Poisson equation for the three-dimensional modeling of stellar evolution // Astronomy Letters. — 1999. — Vol. 25. — P. 185–190.

Babakov A. V. Numerical Simulation of Instabilities and Vortex Structures in Unsteady Jets // Nagoya University Press. Investigation of hydrodynamical instability and turbulence in fundamental and technological problems by means of mathematical modeling with supercomputers. — 2007. — P. 150–162.

- Belotserkovskii O. M., Babakov A. V.* The simulation of the coherent vortex structures in the turbulent flows // *Advances in mechanics. Poland.* — 1990. — Vol. 13, No. 3/4. — P. 135–169.
- Belotserkovskii O. M., Mingalev I. V., Mingalev V. S., Mingalev O. V., Oparin A. M., Chechetkin V. M.* Formation of large-scale vortices in shear flows of the lower atmosphere of the earth in the region of tropical latitudes // *Cosmic Research.* — 2009. — Vol. 47, Issue 6. — P. 466–479.
- Chakrabarti S., Laughlin G., Shu F. H.* Branch, Spur, and Feather Formation in Spiral Galaxies // *Astrophys. J.* — 2003. — Vol. 596, No. 1. — P. 220–239.
- Chechetkin V. M., Ustyugov S. D., Gorbunov A. A., Polezhaev V. I.* On the neutrino mechanism of supernova explosions // *Astron. Lett.* — 1997. — Vol. 23. — P. 30–36.
- Couch S. M., Ott C. D.* The Role of Turbulence in Neutrino-driven Core-collapse Supernova Explosions // *Astroph. Journal.* — 2015. — Vol. 799. — P. 5–15.
- Dolence J. C., Burrows A., Zhang W.* Two-dimensional Core-collapse Supernova Models with Multi-dimensional Transport // *Astroph. Journal.* — 2015. — Vol. 800. — P. 10.
- Kuznetsov O. A., Lovelace R. V. E., Romanova M. M., Chechetkin V. M.* Hydrodynamic Simulations of Counterrotating Accretion Disks // *Astrophysical Journal.* — 1999. — Vol. 514, Issue 2. — P. 691–703.
- Lugovskii A. Yu., Filistov E. A.* Numerical modeling of transient structures in the disks of spiral galaxies // *Astronomy Reports.* — Vol. 58, Issue 2. — P. 48–62.
- Mingalev I. V., Rodin A. V., Orlov K. G.* Numerical simulations of the global circulation of the atmosphere of Venus: Effects of surface relief and solar radiation heating // *Solar System Research.* — 2015. — Vol. 49, No. 1. — P. 24–42.
- Mingalev I. V., Astaf'eva N. M., Orlov K. G., Chechetkin V. M., Mingalev V. S., Mingalev O. V.* Numerical simulation of formation of cyclone vortex flows in the intratropical zone of convergence and their early detection // *Cosmic Research.* — 2012. — Vol. 50, Issue 3. — P. 233–248.
- Müller B., Melson T., Heger A., Janka H. T.* Supernova simulations from a 3D progenitor model — Impact of perturbations and evolution of explosion properties // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS).* — 2017. — Vol. 472, Issue 1. — P. 491–513.
- Pudritz R. E., Norman C. A.* Bipolar hydromagnetic winds from disks around protostellar objects // *Astrophysical Journal.* — 1986. — Vol. 301. — P. 571–586.
- Sawada K., Matsuda T., Hachisu I.* Spiral shocks on a Roche lobe overflow in a semi-detached binary system // *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* — 1986. — Vol. 219. — P. 75–88.
- Schwab J., Martínez-Rodríguez H., Piro A. L., Badenes C.* Exploring the Carbon Simmering Phase: Reaction Rates, Mixing, and the Convective Urca Process // *Astrophysical Journal.* — 2017. — Vol. 851, Issue 2. — P. 105.
- Velikhov Ye. P., Lugovsky A. Yu., Mukhin S. I., Popov Yu. P., Chechetkin V. M.* The impact of large-scale turbulence on the redistribution of angular momentum in stellar accretion disks // *Astronomy Reports.* — 2007. — Vol. 51, Issue 2. — P. 154–160.
- Wongwathanarat A., Müller E., Janka H.-Th.* Three-dimensional simulations of core-collapse supernovae: from shock revival to shock breakout // *Astronomy & Astrophysics.* — 2015. — Vol. 577: A48. — P. 1–20.

