

УДК: 519.6

## Научные и педагогические школы Александра Сергеевича Холодова

А. И. Лобанов

Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., д. 9

E-mail: alexey@crec.mipt.ru

*Получено 22.10.2018.*

*Принято к публикации 26.10.2018.*

В развитии науки важную роль играют научные школы — объединения исследователей, связанные общей проблемой, идеями и методами, используемыми для решения проблемы. Научные школы формируются вокруг лидера и объединяющей идеи.

За время научной деятельности академика А. С. Холодова вокруг него сформировалось несколько научных школ. В обзоре делается попытка представить основные научные направления, вокруг которых сформировались яркие коллективы с общими системами взглядов и подходами к исследованиям. В обзоре отмечается эта общая основа. Во-первых, это развитие группы численных методов для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа — сеточно-характеристические методы. Во-вторых, описание численных методов в пространствах неопределенных коэффициентов. Этот подход развивался как для всех типов уравнений в частных производных, так и для обыкновенных дифференциальных уравнений.

На основе предложенных А. С. Холодовым численных подходов сложились научные коллективы, работающие в разных предметных областях. Это математическое моделирование динамики плазмы, динамики деформируемого твердого тела, некоторых задач биологии, биофизики, медицинской физики и биомеханики. Сравнительно новые направления — решение задач на графах (процессы транспортировки электроэнергии, моделирование транспортных потоков на дорожной сети и т. д.).

В обзоре делается попытка отследить деятельность научных школ от момента их зарождения до настоящего времени, проследить связь работ А. С. Холодова с работами его учеников и коллег. Полный обзор деятельности всех научных школ, сформировавшихся вокруг Александра Сергеевича, невозможен ввиду огромного количества и разнообразия научных результатов.

Делается также попытка связать деятельность научных школ с появлением научно-образовательной школы в Московском физико-техническом институте.

Ключевые слова: научная школа, сеточно-характеристические методы, пространства неопределенных коэффициентов, динамика плазмы, динамика деформируемого твердого тела, биомеханика, процессы на графах

UDC: 519.6

## Scientific and pedagogical schools founded by A. S. Kholodov

A. I. Lobanov

Moscow Institute of Physics and Technology (state university),  
9 Institutskiy per., Dolgoprudnyi, Moscow region, 141701, Russia

E-mail: alexey@crec.mipt.ru

*Received 22.10.2018.*

*Accepted for publication 26.10.2018.*

In the science development an important role the scientific schools are played. This schools are the associations of researchers connected by the common problem, the ideas and the methods used for problems solution. Usually Scientific schools are formed around the leader and the uniting idea.

The several sciences schools were created around academician A. S. Kholodov during his scientific and pedagogical activity.

This review tries to present the main scientific directions in which the bright science collectives with the common frames of reference and approaches to researches were created. In the review this common base is marked out. First, this is development of the group of numerical methods for hyperbolic type systems of partial derivatives differential equations solution — grid and characteristic methods. Secondly, the description of different numerical methods in the undetermined coefficients spaces. This approach developed for all types of partial equations and for ordinary differential equations.

On the basis of A. S. Kholodov's numerical approaches the research teams working in different subject domains are formed. The fields of interests are including mathematical modeling of the plasma dynamics, deformable solid body dynamics, some problems of biology, biophysics, medical physics and biomechanics. The new field of interest includes solving problem on graphs (such as processes of the electric power transportation, modeling of the traffic flows on a road network etc).

There is the attempt in the present review analyzed the activity of scientific schools from the moment of their origin so far, to trace the connection of A. S. Kholodov's works with his colleagues and followers works. The complete overview of all the scientific schools created around A. S. Kholodov is impossible due to the huge amount and a variety of the scientific results.

The attempt to connect scientific schools activity with the advent of scientific and educational school in Moscow Institute of Physics and Technology also becomes.

Keywords: scientific school, grid and characteristic methods, undetermined coefficients spaces, the plasma dynamics, the deformable solid dynamics, biomechanics, processes on graphs

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 561–579 (Russian).

Этот выпуск журнала посвящен светлой памяти Александра Сергеевича Холодова (11.10.1941–05.11.2017). А. С. Холодов родился 11 октября 1941 года в городе Буденновске Ставропольского края. После окончания школы в родном городе пробовал поступать в институт, но не прошел по конкурсу. Поэтому трудовую деятельность Александр Сергеевич начал с рабочих должностей: помощник машиниста на узкоколейной железной дороге торфопредприятия, дератизатор на противочумной станции. Напомним, что Северный Кавказ — природный очаг чумы, возбудитель часто передается крысами. Поэтому борьба с грызунами важна, особенно в не самые благополучные 1950-е годы.

В 1960 году поступил в МФТИ на факультет аэрофизики и прикладной математики (ФАПМ). Вся дальнейшая деятельность Александра Сергеевича была связана с физтехом. С 1969 Александр Сергеевич преподавал в МФТИ. С 1984 по 1987 год был деканом ФУПМ (факультета управления и прикладной математики (ФАПМ к этому времени разделился)). В 1970 году Александр Сергеевич защитил кандидатскую диссертацию, а в 1981 — докторскую. Материалы его докторской работы нашли отражение в монографии по сеточно-характеристическим методам [Магомедов, Холодов, 1988]. В 1997 А. С. Холодов избран членом-корреспондентом РАН, а в 2016 — академиком РАН.

С 1999 по 2009 год Александр Сергеевич работал заместителем директора института автоматизации проектирования (ИАП РАН), а с 2009 по 2017 год исполнял обязанности директора института.

Академик Александр Сергеевич Холодов скончался 5 ноября 2017 года.

Основная цель данной статьи — дать представление широкому кругу читателей о тех научных направлениях и научных и педагогических школах, у истоков которых стоял А. С. Холодов. Дадим краткий обзор научных школ и направлений в последовательности их возникновения.

## Школа О. М. Белоцерковского. Аэродинамика и газовая динамика

Свою научную работу в области вычислительной аэродинамики А. С. Холодов начал в уже сформировавшейся научной школе академика Олега Михайловича Белоцерковского. Сам Александр Сергеевич считал себя участником научной школы О. М. Белоцерковского, многие работы были выполнены им при участии Олега Михайловича, что нашло свое отражение и в публикациях.

Первые работы А. С. Холодова были посвящены численному решению прикладных задач аэродинамики. В статье [Магомедов, Холодов, 1967] для расчета трехмерного обтекания крыла под углом атаки был использован трехмерный вариант известного метода характеристик. Тогда же А. С. Холодовым был предложен класс оригинальных методов, учитывающих характеристические свойства систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Этот класс методов был назван авторами «сеточно-характеристические методы» (СХМ) [Магомедов, Холодов, 1969].

В конце 1960-х годов задачи аэродинамики, в частности гиперзвукового обтекания затупленных тел, приобрели актуальность в связи с развитием космической техники. В научной школе академика О. М. Белоцерковского развивались различные классы численных методов [Белоцерковский и др., 1970], в частности методы крупных частиц (Ю. М. Давыдов), методы компактной аппроксимации (А. И. Толстых). Результаты развития численных методов тех лет, в частности сеточно-характеристического метода, нашли свое отражение в книге [Белоцерковский и др., 1970].

Заметим, что результаты моделирования обтеканий затупленных тел [Белоцерковский, Осетрова и др., 1974; Кострыкин и др., 1976] в те годы имели не только научное значение. Полученные результаты были внедрены в НПО им. С. А. Лавочкина, НПО «Энергия», НПО «Машиностроение», НПО «Астрофизика». Например, форма защитного экрана советских спускаемых аппаратов для исследования поверхности Марса была выбрана на основе именно таких расчетов А. С. Холодова. Отметим, что хотя программа исследований спускаемых аппаратов

станций «Марс-3» (1971) и «Марс-6» (1973) по ряду причин не была выполнена, но защитные экраны при этих посадках сработали в расчетном режиме.

Работы по вычислительной газовой динамике нашли свое продолжение в цикле работ сотрудников ИАП РАН, посвященных моделированию явлений, связанных с Челябинским метеоритом. Специальный выпуск журнала «Компьютерные исследования и моделирование» вышел в 2013 году. Правда, сам Александр Сергеевич выступил уже с работой по динамике ионосферной плазмы [Холодов, 2013].

## **Сеточно-характеристические методы, пространства неопределенных коэффициентов и разностные схемы повышенного порядка аппроксимации**

Как уже отмечалось выше, сеточно-характеристический численный метод был предложен в работе [Магомедов, Холодов, 1969] для решения уравнений газовой динамики. Подробное описание сеточно-характеристического семейства позднее было приведено в монографии [Магомедов, Холодов, 1984]. В первых работах для построения сеточно-характеристического метода использовалась характеристическая форма записи системы уравнений газовой динамики. Использование такой формы записи приводит, как правило, к неконсервативным разностным схемам (то есть таким, для которых могут нарушаться законы сохранения на сеточном уровне). Модификация сеточно-характеристического метода для дивергентной формы записи уравнений газовой динамики была выполнена В. И. Косаревым с К. М. Магомедовым [Косарев, Магомедов, 1973].

Основная черта разностных схем из числа сеточно-характеристических — сочетание идей обратного метода характеристик с интерполяцией значений на нижнем слое по времени в точке пересечения с этим слоем характеристики, проходящей через расчетный узел на верхнем временном слое, по сеточным данным, а также широкое использование условий совместности. Для многомерных (по пространственным координатам) задач процедура построения сеточно-характеристических схем несколько усложняется, но основные идеи остаются прежними.

Подробное описание метода содержится в [Магомедов, Холодов 1984]. Применительно к решениям уравнений газовой динамики метод описан также в [Belotserkovskii, Kholodov, 1979].

В своей работе [Холодов, 1978] для анализа свойств разностных схем впервые ввел пространство неопределенных коэффициентов — метрическое пространство, каждой точке которого соответствует разностная схема, аппроксимирующая некоторое уравнение. Простейший пример такого пространства — плоскость неопределенных коэффициентов, возникающая при аппроксимации линейного уравнения переноса на пятиточечном сеточном шаблоне. Главная идея работы чрезвычайно проста.

Рассмотрим модельную задачу Коши для линейного однородного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Начальное условие для задачи —  $u(x, 0) = g(x)$ . Для определенности считаем, что  $a = \text{const} > 0$ . Для построения разностных схем решения задачи Коши используем метод сеток. Будем следовать описанию в [Магомедов, Холодов, 2017]. Рассмотрим множество разностных схем на явном двухслойном пятиточечном шаблоне:

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu=-2}^1 \alpha_\mu u_{m+\mu}^n. \quad (2)$$

Выпишем условия аппроксимации схемы (2) на гладких решениях задачи Коши. Такие решения возникают, если начальное условие  $g(x)$  представляет собой гладкую необходимую

число раз непрерывно дифференцируемую функцию. Для исследования на аппроксимацию используем обычные разложения в ряды Тейлора проекции на сетку точного решения дифференциальной задачи  $\{u\}_m^n$ .

$$\{u\}_m^{n+1} = \{u\}_m^n + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots, \quad (3)$$

$$\{u\}_{m+\mu}^n = \{u\}_m^n + \mu h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu^2 h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu^3 h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \quad (4)$$

Подставляем (3) и (4) в (2), используем также следствия самого дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

При исследовании на аппроксимацию собираем слагаемые с одинаковыми степенями сеточных параметров. Тогда из равенства коэффициентов при нулевой степени параметров сразу получается условие первого порядка аппроксимации:  $\sum_{\mu=-2}^1 \alpha_\mu = 1$ , которое в дальнейшем играет роль условия нормировки.

Это же условие можно трактовать другим образом: значение сеточной функции на следующем временном слое всегда принадлежит аффинной оболочке значений сеточной функции в точках шаблона. Приравнивая друг к другу члены при первых и вторых степенях сеточных параметров, получим еще два условия аппроксимации:

$$-\sigma - \sum \mu \alpha_\mu = 0, \quad (5)$$

$$\sigma^2 - \sum \mu^2 \alpha_\mu = 0. \quad (6)$$

Условие (5) обеспечивает первый порядок аппроксимации, условие (6) — второй порядок по обоим переменным (по времени и пространству). Потребуем обязательного выполнения условий аппроксимации первого порядка. Тогда можно оставить свободными два коэффициента (например,  $\alpha_{-2}$ ,  $\alpha_0$ ). Из условий аппроксимации имеем

$$\alpha_{-1} = 0.5(1 + \sigma - 3 \cdot \alpha_{-2} - \alpha_0),$$

$$\alpha_1 = 0.5(1 - \sigma + \alpha_{-2} - \alpha_0).$$

Введем для свободных коэффициентов координатные оси линейного пространства с евклидовой метрикой. Определенная плоскость — пространство неопределенных коэффициентов для данного шаблона. Каждая точка этого пространства будет соответствовать разностной схеме первого порядка аппроксимации. Кроме того, можно выделить множество схем порядка  $O(\tau + h^2)$ :

$$\alpha_0 = 1 - \sigma + 3\alpha_{-2}$$

и единственную на данном шаблоне схему третьего порядка аппроксимации с порядком аппроксимации  $O(\tau + h^3)$ :

$$\alpha_{-2} = \frac{\sigma(\sigma - 1)}{6}.$$

В соответствие разностной схеме (2) будем ставить функционал

$$F = F(\alpha_\mu, \sigma, h). \quad (7)$$

Функционал (7) является линейным по коэффициентам разностной схемы  $\alpha_\mu$ . В цитируемой книге для схем первого порядка аппроксимации выписано первое дифференциальное приближение в параболической форме:

$$u'_t + au'_x = \frac{h^2}{\tau} (1 - \sigma^2 - \alpha_0 + 3\alpha_{-1}) u''_{xx}. \quad (8)$$

Из условий корректности постановки коэффициент перед второй производной в правой части (8) должен быть неотрицательным. За целевой функционал (7) примем коэффициент перед производной в выражении для невязки  $F = 1 - \sigma^2 - \alpha_0 + 3\alpha_{-1}$ . Тогда для исследования свойств разностных схем во введенном пространстве можно ставить задачи линейного программирования. Например, найти монотонную по Фридрихсу схему (для нее должно быть выполнено  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_{-2} \geq 0$ ,  $\alpha_{-1} = 0.5(1 + \sigma - 3 \cdot \alpha_{-2} - \alpha_0) \geq 0$ ,  $\alpha_1 = 0.5(1 - \sigma + \alpha_{-2} - \alpha_0) \geq 0$ ) или ближайшую ко множеству монотонных разностных схем схему более высокого порядка аппроксимации. В терминах линейного программирования монотонная по Фридрихсу разностная схема — схема, для которой значение сеточной функции на верхнем слое по времени принадлежит выпуклой оболочке значений функции на нижнем слое по времени.

Условие устойчивости рассматриваемых в пространстве неопределенных коэффициентов схем при использовании спектрального признака имеет вид

$$|q(\alpha_\mu, \phi)| \leq 1;$$

здесь  $q$  есть спектр оператора послойного перехода. Все собственные числа оператора могут быть оценены с использованием уравнения  $q = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} q e^{i\mu\phi}$  и дополнительного требования

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (|q| - 1) = 0.$$

Разностные схемы, которым в пространстве  $\{\tilde{\alpha}_\mu\}$  соответствуют близкие друг к другу точки (в смысле  $\rho = \sqrt{(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_1) - (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_2)}$ ), по своим свойствам также близки.

Именно такой подход неопределенных коэффициентов позволил с единых позиций описать большое разнообразие численных методов, относящихся к классу сеточно-характеристических.

В дальнейшем подход построения разностных схем в пространствах неопределенных коэффициентов был развит на уравнения параболического [Холодов, 1988] и эллиптического [Холодов, 1991] типа. Наряду с построением мажорантных разностных схем для уравнений эллиптического типа на неструктурированных сетках, было проведено обобщение техники построения разностных схем для гиперболических и параболических уравнений на случай произвольных сеток для решения задач с несколькими пространственными переменными [Белоцерковский, Холодов, 1999]. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа, построенные с помощью анализа в пространстве неопределенных коэффициентов, позволили решить несколько интересных практических задач, например применительно к анализу экологической обстановки в городах с плотной застройкой [Белоцерковский, Холодов, 1999] или задач медицинской направленности, о которых будет сказано ниже. Тем не менее в настоящее время область применения разработанных схем довольно узкая из-за плотной конкуренции с пакетами прикладных программ, реализующих методы конечных элементов. Аккуратного сравнения вычислительных качеств конечно-разностных подходов типа [Холодов, 1991] и современных реализаций методов конечных элементов не проводилось.

В 1962 году Р. П. Федоренко предложил схему повышенного порядка аппроксимации для численного решения уравнений гиперболического типа [Федоренко, 1962]. Анализ в простран-

стве неопределенных коэффициентов расширил возможности построения гибридных разностных схем с предсказанными заранее свойствами. Актуальна разработка монотонных схем для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка аппроксимации на гладких решениях, которые тем не менее не теряют своих вычислительных качеств на решениях разрывных (обобщенных, слабых). В работе [Холодов, Холодов, 2006] выдвинуты идеи построения гибридных разностных схем на основе характеристического критерия монотонности, обладающих высоким порядком аппроксимации на гладких решениях, слабой диссипацией и малой дисперсией на решениях разрывных. Проведен анализ вычислительных качеств построенных схем. Более подробное описание разностных схем с примерами реализации можно найти в [Холодов, Уткин и др., 2015].

Заметим, что при рассмотрении гибридных разностных схем даже для аппроксимации задачи для линейного уравнения значение сеточной функции на следующем временном слое от предыдущего зависит нелинейно (коэффициенты разностной схемы становятся зависящими от локальных свойств решения). Поэтому курс, читаемый много лет на Физтехе А. С. Холодовым, носил название «нелинейные вычислительные процессы».

## Физика плазмы и гидродинамические неустойчивости

Сеточно-характеристические методы изначально были предложены для решения уравнений газовой динамики. Но в конце 1970-х годов стало ясно, что область приложения сеточно-характеристических методов гораздо шире. В качестве новой области приложений была выбрана новая и неисследованная в то время область математического моделирования динамики горячей плазмы. Уже в первой работе данного направления [Белоцерковский и др., 1978] было приведено описание двух алгоритмов численного решения задачи о взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом. Один алгоритм опирался на лагранжево описание гидродинамических процессов, развивающихся в плазме в результате взаимодействия. Другой использовал эйлерово представление уравнений, лежащих в основе математической модели. Именно для представления Эйлера был использован сеточно-характеристический метод. Новизна подхода заключалась не столько в новой системе дифференциальных уравнений (рассматривались уравнения Эйлера с добавленными радиационными слагаемыми), сколько в применении сеточно-характеристических методов к задачам с совершенно другими пространственными и временными масштабами по сравнению с задачами аэродинамики.

Данная публикация фактически породила два направления в научной школе А. С. Холодова. Первое ориентировалось на построение консервативных разностных схем для решения задач динамики плазмы. Основой подхода здесь было использование лагранжевых переменных. При этом усложнилась сама система уравнений, учитывались и электромагнитные поля, и диссипация магнитной энергии и переход ее в тепло за счет конечной проводимости плазмы. Работы этого направления начались с [Косарев и др., 1979], где рассматривалась возможность организации однородного сжатия алюминиевого лайнера для модуля установки «Ангара». На основе численных расчетов был обнаружен новый тип неустойчивости плазмы.

В рамках данного направления выполнялись расчеты для поддержки экспериментов на нескольких установках в РНЦ «Курчатовский институт», в частности С-300 [Бакшаев и др., 2004], РС-20 [Карпов и др., 2007]. Для решения задачи о динамике плазмы был использован кластер, состоящий из персональных компьютеров, в дневное время использующийся как учебный класс МФТИ. При дальнейших расчетах динамики плазмы в плазменном прерывателе [Карпов, Лобанов, 2011] использовался кластер МФТИ-60. При рассмотрении эффекта Холла в плазме снова применялись методы из класса сеточно-характеристических.

Представители этого направления исследований в школе А. С. Холодова — В. И. Косарев, позднее — А. И. Лобанов, В. Е. Карпов и другие.

Второе направление, обозначенное в [Белоцерковский и др., 1978], опиралось на эйлеров подход к описанию сплошной среды. Это направление активно развивалось в задачах лазерно-

го термоядерного синтеза, например [Демченко, Холодов, 1985; Демченко и др., 1992], моделирования развития неустойчивостей Рэлея–Тейлора при лазерном сжатии термоядерных мишеней [Gus'kov et al., 2007] и Рихтмайера–Мортон–Мешкова [Белоцерковский и др., 1994; Белоцерковский и др., 1997]. Эта часть исследований представлена В. В. Демченко, А. М. Опариным.

Дальнейшее развитие математических моделей динамики плазмы и применения сеточно-характеристических методов нашло свое отражение в цикле работ А. С. Холодова, Е. Л. Ступицкого и соавторов по математическому моделированию эволюции возмущений в ионосфере Земли в ближнем космосе [Ступицкий и др., 2004; Холодов и др., 2004; Холодов Я. А., Холодов А. С. и др.]. Отметим, что расчеты динамики плазменных образований [Лавриненко и др., 2007], в частности струйных течений при развитии желобковой неустойчивости [Ступицкий и др., 2007], потребовали применения гибридных разностных схем высокого порядка аппроксимации [Холодов, Холодов, 2006].

Ключевые фамилии исследователей из научной школы Александра Сергеевича — Я. А. Холодов, М. О. Васильев.

## **Механика деформируемого твердого тела**

В те же годы, когда появились обобщения сеточно-характеристических методов для исследования задач физики плазмы, было сделано обобщение СХМ и для решения линейных задач теории упругости [Иванов, Холодов, 1978]. Во второй половине 1980-х годов актуальной была задача входа межпланетного зонда в атмосферы планет-гигантов. При исследовании задач газовой динамики теперь надо было учитывать и упругие эффекты [Коротин и др., 1984]. Для решения сложных задач теории упругости модернизировались сеточно-характеристические численные методы [Петров, Холодов, 1984a]. Именно методы с регуляризацией позволили провести первые расчеты задач о высокоскоростном соударении ударника с жесткой преградой [Петров, Холодов, 1984b]. В дальнейшем тема ударных взаимодействий интенсивно развивалась в сотрудничестве с представителями научных школ по механике твердого тела, в частности с В. И. Кондауровым [Иванов и др., 1990]. Развитие сеточно-характеристических методов позволило решить задачу о косом ударе по преграде с большими тепловыми нагрузками [Иванов и др., 1999]. Пионеры в исследовании задач динамики деформируемого твердого тела — В. Д. Иванов, И. Б. Петров, П. Н. Коротин, А. Г. Тормасов.

В настоящее время в МФТИ сформировалась значительная научная школа по численному решению динамических задач для описания деформируемых твердых тел, включающих в себя задачи ударного взаимодействия, механики композитных материалов, астероидной безопасности, по моделированию процессов сейсморазведки, по моделированию сейсмической устойчивости зданий и сооружений, по вычислениям на высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных комплексах. Руководитель этой научной школы — член-корреспондент РАН Игорь Борисович Петров. Отметим, что даже беглый обзор работ данного направления существенно превысит объем данной статьи. Отметим лишь, что современное состояние развития сеточно-характеристических методов для решения динамических задач для деформируемых твердых тел можно найти в [Favorskaya, Petrov, 2018].

## **Вычислительные методы в задачах медицины и биологии**

Интерес к применению численных методов к постановкам задач из области медицины и биологии начался у Александра Сергеевича после знакомства с выдающимся офтальмологом Святославом Николаевичем Федоровым. С. Н. Федоров попросил помощи для детализации процессов, которые протекают в хрусталике глаза при операции факоэмульсификации. При этом катаракта разрушается с помощью ультразвуковых колебаний, а диспергированная среда



удаляется из хрусталика при помощи ирригационно-аспирационной технологии. Переводя на язык точных наук, медиков интересовали вопросы медленного движения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области с учетом источников и стоков. Именно взаимное расположение источников и стоков (микрохирургических инструментов) и их интенсивность определяют в конечном итоге успех операции.

Для решения задачи был использован исследовательский комплекс программ, написанный А. С. Холодовым, основанный на авторской методике построения разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов [Холодов, 1991]. Результаты работы нашли отражение не только в публикациях [Федоров и др., 1998; Белоцерковский и др., 2011; Марченкова и др., 1991], но и в полученном авторском свидетельстве [Федоров и др., Способ экстракапсулярной экстракции катаракты, 1998]. Краткое описание численных результатов решения этой задачи на английском языке доступно в [Kholodov, Lobanov, 1994].

Продолжением и развитием работ с центром «Микрохирургия глаза» явились дальнейшие работы по моделированию фактоэмульсификации — ультразвукового воздействия на катаракту [Бубнов и др., 1997]. При расчетах уже использовалась другая система уравнений — идеально-упругопластической среды. Для численного решения систем уравнений математической модели использовались модификации сеточно-характеристического метода [Петров, Холодов, 1984; Петров и др., 1990]. Продолжением и дальнейшим развитием работ этого направления стали также работы по математическому моделированию лазерных воздействий на катаракту, проводимые под руководством И. Б. Петрова [Агапов и др., 2001; Балановский и др., 2003].

После развития математических моделей гидродинамики в ветвящихся системах у А. С. Холодова возникла идея применить разработанные технологии для описания циркуляции крови в сосудистой системе человека. Работы были начаты в 1990-х годах, первые результаты опубликованы в [Холодов, 2001; Евдокимов, Холодов, 2001]. Отметим, что Александр Сергеевич сразу рассматривал описание дыхательной и сосудистой систем человека как частей единой математической модели циркуляции сплошных сред в организме. Именно такой подход позволил строить модели обмена кислорода и углекислого газа в легких между газовой и жидкой фазами. В дальнейшем на основе сеточно-характеристических численных методов и разработанных одномерных моделей циркуляции и описания сосудистого дерева как графа удалось решить важные прикладные задачи из области физиологии [Симаков, Холодов, 2008], спортивной физиологии [Голов, Симаков, 2017] и др. Отметим, что число работ по моделированию циркуляции в мире велико. Требуется дополнительная публикация, чтобы дать читателю представление о мировом уровне развития данной области и месте научной школы А. С. Холодова в развитии данной области.

Александр Сергеевич живо интересовался и другими биомедицинскими математическими моделями. Отметим, в частности, его участие в решении обратной задачи — в определении кинетических параметров реакций, проходящих при хемосорбции альбумин-билирубинового комплекса на угольном пирополимере [Николаев и др., 2005].

На кафедре вычислительной математики МФТИ в рамках научной школы А. С. Холодова активно развивались и другие темы, связанные с медициной и биологией. Так, известность получили работы, связанные с математическим моделированием свертывания крови. Вначале были предложены упрощенные математические модели реакционно-диффузионного типа [Лобанов и др., 1997], дополненные затем учетом гидродинамических явлений при свертывании крови в сдвиговом потоке идеальной несжимаемой жидкости [Гурия и др., 2001] до попыток построить математическое описание событий, происходящих при свертывании в сосудистом русле [Чуличков и др., 2000; Гузевых и др., 2000]. Хотя А. С. Холодов не принимал участие в развитии данных работ, он всегда относился к этому направлению исследований со вниманием и интересом.

Отметим, что направление математического моделирования свертывания крови в настоящее время активно развивается, его современное состояние также требует отдельного анализа.

## Задачи для уравнений гиперболического типа на графах

Необходимость расчета течений в трубопроводах сложных технических устройств привела к необходимости модификации сеточно-характеристического метода для системы уравнений одномерной гидравлики в сложных системах ветвящихся сосудов. В этом случае расчетная область представляла собой уже не отрезок или область в двумерном или трехмерном пространстве, а некоторый граф. На ребрах этого графа решались системы уравнений гиперболического типа, а в узлах ставились специального вида граничные условия.

Первыми работами такого плана были исследования распространения паводков в сложных речных системах. Использовались уравнения мелкой воды, в качестве расчетной области рассматривалась речная система. Эти расчеты были выполнены в 1990-х годах А. С. Холодовым совместно с Я. А. Холодовым, А. Б. Ведерниковым, Н. В. Ковшовом, но опубликованы только в 2004–2011-х годах [Kholodov, Kholodov, 2004; Белоцерковский и др., 2011].

Дальнейшее развитие «гидродинамической» части исследований — создание математических моделей циркуляции воздуха в дыхательной системе человека и крови — в кровеносной. Немного подробнее об этом направлении было сказано в разделе про научную школу в области биологии и медицины.

Кроме того, при создании математических моделей, где в узле графа приходится рассматривать трехмерное течение жидкости (газа), а на ребре — одномерное, возникает проблема стыковки численных решений разной размерности. Эта проблема актуальна при математическом моделировании циркуляции в сердечно-сосудистой системе. Пример решения проблемы стыковки решений разной пространственной размерности рассматривался для другой задачи — о распространении примесей в вентиляционных системах [Холодов и др., 2016].

Уже с середины 1990-х годов Александра Сергеевича интересовали математические модели дорожного движения, трафика. Для первых работ катастрофически не хватало данных — Николай Ковшов сам исследовал «пробки» на севере Москвы для создания первых математических моделей. В результате в МФТИ сложилась научная школа по данному направлению, известны публикации по данной тематике [Холодов и др., 2010]. Многие материалы исследований вошли в учебное пособие, изданное несколькими изданиями [Введение в математическое моделирование..., 2013]. Математическое моделирование транспортных процессов на основе описания с помощью систем дифференциальных уравнений в последние годы являлось одним из главных направлений моделирования [Холодов, Алексеенко и др., 2014; Алексеенко и др., 2015; Холодов, Алексеенко и др., 2015]. В настоящее время работы по моделированию транспортных процессов и созданию интеллектуальных транспортных систем под руководством Я. А. Холодова продолжаются в Университете «Иннополис».

Разработанные численные методы применялись и к решению других задач. В частности, исследовалась передача пакетов в компьютерных сетях [Северов и др., 2011]. Рассматривались математические модели линий электропередач [Бордонос и др., 2009]. Отметим, что подобные «сетевые» задачи часто относят к области социофизики [Словохотов, 2012]. Поэтому неслучаен интерес А. С. Холодова и к другим проблемам социофизики, например к анализу публикационной активности научных работников. Так, в статье [Холодов, 2015] автор рассматривает динамику основных библиометрических показателей на примере «научно-образовательного коллектива» из «примерно 30 человек», в котором быстро угадывается кафедра, возглавляемая Александром Сергеевичем. В работе А. С. Холодов констатирует невозможность полного всестороннего описания показателей с помощью всего одного индекса (типа индекса Хирша) и предлагает свои варианты анализа как публикационной активности отдельных ученых, так и коллективов в целом.

## Педагогическая школа

С 1987 года почти 30 лет Александр Сергеевич руководил кафедрой вычислительной математики МФТИ, читал курсы лекций, написал ряд учебных пособий, подготовил курс видеолекций; руководил НИР и дипломными работами студентов МФТИ, работал с аспирантами. Александр Сергеевич много внимания уделял работе с молодыми преподавателями. Кроме того, А. С. Холодов всегда был заинтересован во внедрении новых технологий в преподавание. Крупным достижением было внедрение в учебный процесс лабораторного практикума по вычислительной математике [Иванов и др., 2003]. Методическое руководство разработкой осуществлял В. С. Рябенский, а руководство программистским коллективом — И. Б. Петров. Александр Сергеевич принимал участие в создании нескольких работ, во внедрении в учебный процесс. Кроме того, А. С. Холодов руководил работой по созданию подобного лабораторного практикума по курсу «Нелинейные вычислительные процессы». По ряду причин сквозной практикум создан не был, но элементы такого практикума были внедрены в разные разделы курса «Нелинейные вычислительные процессы» — при рассмотрении численных методов решения жестких систем ОДУ (подготовлено учебное пособие [Холодов, Лобанов, Евдокимов, 2001]) и при рассмотрении гибридных разностных схем для решения уравнений в частных производных гиперболического типа [Холодов, Уткин и др., 2015].

С большим интересом Александр Сергеевич относился к подготовке учебного пособия по межкафедральному курсу «Введение в математическое моделирование транспортных потоков» [Введение в математическое моделирование..., 2013].

За многие годы работы на кафедре Александр Сергеевич оказал влияние на большое количество молодых (во время прихода на кафедру) преподавателей, которым посчастливилось с ним работать. Можно сказать, что все они (это более 40 человек) составляют педагогическую школу Александра Сергеевича. В нашем кратком обзоре мы отметим лишь курсы и учебные пособия, созданные при непосредственном участии А. С. Холодова.

## Заключение

В статье автор старался представить те научные школы, которые сформировались в МФТИ и ИАП РАН вокруг работ и идей Александра Сергеевича Холодова. Конечно, в обзоре невозможно отразить все работы Александра Сергеевича, подробно описать все направления его деятельности. Автор старался показать, в каких направлениях начинали работать ученики и коллеги Александра Сергеевича, как некоторые направления развивались и видоизменялись его учениками. Поэтому автор ограничился наиболее важными (с его субъективной точки зрения) работами А. С. Холодова и наиболее важными работами, продолжающими ту или иную линию исследований. Автор ограничен в рамках разумного объема статьи. Поэтому, например, о работах по динамике деформируемого твердого тела написано гораздо меньше, чем того заслуживает этот интереснейший цикл. То же можно отнести и к моделированию транспортных потоков, да и ко всем другим направлениям. В рамках данной статьи автор умолчал о других направлениях научной деятельности Александра Сергеевича, вокруг которых не сложилось заметных научных школ (например, задачи фильтрации, метеоритная опасность, свойства двумерных материалов типа графена и т. п.). Заинтересованным читателям мы можем посоветовать обратиться к специальной литературе.

Данный выпуск журнала включает статьи исследователей, относящихся к научным школам, сформировавшимся вокруг О. М. Белоцерковского и А. С. Холодова. Как ясно из статьи, это родственные и сильно связанные между собой школы. Надеемся, что подробное ознакомление с последними научными результатами этих исследователей поможет сформировать более полное мнение о созданных Александром Сергеевичем научных школах.

## Список литературы (References)

- Алексеев А. Е., Холодов Я. А., Холодов А. С., Горева А. И., Васильев М. О., Чехович Ю. В., Мишин В. Д., Старожилец В. М.* Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть I // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1185–1203.  
*Alekseenko A. E., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Goreva A. I., Vasilev M. O., Chekhovich Yu. V., Mishin V. D., Starozhilets V. M.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part I // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1185–1203 (in Russian).
- Агапов П. И., Обухов А. С., Петров И. Б., Челноков Ф. Б.* Численное решение динамических задач биомеханики сеточно-характеристическим методом // Компьютерные модели и прогресс медицины: сборник. — М.: Наука, 2001. — С. 275–300.  
*Agapov P. I., Obukhov A. S., Petrov I. B., Chelnokov F. B.* Numerical solution of biomechanical dynamics problems by grid-characteristic method // Computational Models and Medical Progress: sbornik. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 275–300 (in Russian).
- Бакшаев Ю. Л., Бартов А. В., Блинов П. И., Данько С. А., Калинин Ю. Г., Кингсеп А. С., Коваленко И. В., Лобанов А. И., Мижрицкий В. И., Смирнов В. П., Черненко А. С., Чукбар К. В.* Эксперименты с миниатюрными динамическими нагрузками на мощном импульсном генераторе С-300 // Физика плазмы. — 2004. — Т. 30, № 4. — С. 349–360.  
*Bakshaev Yu. L., Bartov A. V., Blinov P. I., Dan'ko S. A., Kalinin Yu. G., Kingsep A. S., Kovalenko I. V., Lobanov A. I., Mizhiritskii V. I., Smirnov V. P., Chernenko A. S., Chukbar K. V.* Experiments with small-size dynamic loads in the S-300 high-power pulsed generator // Plasma Physics Reports. — April 2004. — Vol. 30, Issue 4. — P. 318–329. (Original Russian paper: *Bakshaev Yu. L., Bartov A. V., Blinov P. I., Dan'ko S. A., Kalinin Yu. G., Kingsep A. S., Kovalenko I. V., Lobanov A. I., Mizhiritskii V. I., Smirnov V. P., Chernenko A. S., Chukbar K. V.* Experimenty s miniat'urnymi dinamicheskimi nagruzkami na moschnom impulsnom generatore S-300 // Fizika plazmy. — 2004. — Vol. 30, No. 4. — P. 349–360.)
- Балановский Н. Н., Бубнов А. В., Обухов А. С., Петров И. Б.* Расчет динамических процессов в глазу при лазерной экстракции катаракты // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 11. — С. 37–44.  
*Balanovskii N. N., Bubnov A. V., Obukhov A. S., Petrov I. B.* Computation of dynamical processes in eye during laser cataract extraction // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2003. — Vol. 15, No. 11. — P. 37–44 (in Russian).
- Бордонос А. К., Холодов Я. А., Холодов А. С., Морозов И. И.* Моделирование глобальных энергетических сетей // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 6. — С. 3–16.  
*Bordonos A. K., Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Morozov I. I.* Modelling of the global high-voltage grids // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2009. — Vol. 21, No. 6. — P. 3–16 (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Васильев М. О., Ведерников А. Б., Дымников В. П., Замышляев Б. В., Крысанов Б. Ю., Ковшов Н. В., Куницын В. Е., Молоков Е. А., Репин А. Ю., Сидоренкова Н. А., Ступицкий Е. Л., Холодов Я. А., Холодов А. С.* О численном моделировании некоторых задач взаимодействия литосферы, гидросферы и атмосферы Земли // Фрагменты истории и достижения ИАП РАН. 1986–2011 / под ред. О. М. Белоцерковского, А. С. Холодова, В. Л. Якушева, Н. А. Носовой. — М.: ООО «ИЦ «Полет Джонатана», 2011. — С. 14–71.  
*Belotserkovskii O. M. et al.* On the numerical modeling of some problems of a lithosphere, a hydrosphere and an Earth's atmosphere interactions // History fragments and achievements of The ICAD RAS 1986–2011 / edit by O. M. Belotserkovskii, A. S. Kholodov, V. L. Yakushev, N. A. Nosova. — Moscow: Polet Djonatana Publisher, 2011. — P. 14–71 (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Головачев Ю. П., Грудницкий В. Г., Давыдов Ю. М., Душин В. К., Лунькин Ю. П., Магомедов К. М., Молодцов В. К., Толстых А. И., Фомин В. Н., Холодов А. С.* Численное исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1974. — 397 с.  
*Belotserkovskii O. M., Golovachev Yu. P., Grudnitski V. G., Davydov Yu. M., Dushin V. K., Lun'kin Yu. P., Magomedov K. M., Molodtsov V. K., Tolstykh A. I., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Numerical Investigation of Current Problems of Gas-dynamics. — Moscow: Nauka, 1974. — 397 p. (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Косарев В. И., Холодов А. С.* Численное моделирование некоторых задач лазерного сжатия оболочек // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — Т. 18, № 2. — С. 420–444.

- Belotserkovskii O. M., Demchenko V. V., Kosarev V. I., Kholodov A. S.* Numerical modeling of some problems in laser compression of pellets // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1978. — Vol. 18, No. 2. — P. 117–137. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Demchenko V. V., Kosarev V. I., Kholodov A. S.* Chislennoe modelirovanie nekotorykh zadach lazernogo sgatiya obolochek // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1978. — Vol. 18, No. 2. — P. 420–444.)
- Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М.* Последовательный переход к турбулентности в неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Доклады Академии наук. — 1994. — Т. 334, № 5. — С. 581–583.
- Belotserkovskii O. M., Demchenko V. V., Oparin A. M.* Gradual transition to turbulence in Richtmyer–Meshkov instability // Doklady Akademii nauk. — 1994. — Vol. 334, No. 5. — P. 581–583 (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Демченко В. В., Опарин А. М.* Нестационарное трехмерное численное моделирование неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // Доклады Академии наук. — 1997. — Т. 354, № 2. — С. 190–193.
- Belotserkovskii O. M., Demchenko V. V., Oparin A. M.* A nonstationary three-dimensional numerical simulation of Richtmyer–Meshkov instability // Doklady Akademii nauk. — 1997. — Vol. 354, No. 2. — P. 190–193 (in Russian).
- Белоцерковский О. М., Осетрова С. Д., Фомин В. Н., Холодов А. С.* Гиперзвуковое обтекание затупленных тел потоком излучающего газа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974. — Т. 14, № 4. — С. 992–1003.
- Belotserkovskii O. M., Osetrova S. D., Fomin V. N., Kholodov A. S.* The hypersonic flow of a radiating gas over blunt bodies // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 14, No. 4. — P. 168–179. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Osetrova S. D., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Giperzvukovoe obtekanie zatuplennykh tel potokom izluchayushchego gaza // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1974. — Vol. 14, No. 4. — P. 992–1003.)
- Белоцерковский О. М., Попов Ф. Д., Толстых А. И., Фомин В. Н., Холодов А. С.* Численное решение некоторых задач газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1970. — Т. 10, № 2. — С. 401–416.
- Belotserkovskii O. M., Popov F. D., Tolstykh A. I., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Numerical solution of certain problems in gas dynamics USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1970. — Vol. 10, No. 2. — P. 158–177. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Popov F. D., Tolstykh A. I., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Chislennoe reshenie nekotorykh zadach gazovoi dinamiki // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1970. — Vol. 10, No. 2. — P. 401–416.)
- Белоцерковский О. М., Холодов А. С.* О мажорантных схемах на неструктурированных (хаотических) сетках в пространстве неопределенных коэффициентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1802–1820.
- Belotserkovskii O. M., Kholodov A. S.* Majorizing schemes on unstructured grids in the space of indeterminate coefficients // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 39, No. 11. — P. 1730–1747. (Original Russian paper: *Belotserkovskii O. M., Kholodov A. S.* O mazhorantnykh schemakh na nestrukturirovannykh (haoticheskikh) setkakh v prostranstve neopredelennykh koeffitsientov // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1999. — Vol. 39, No. 11. — P. 1802–1820.)
- Бубнов А. В., Коротин П. Н., Холодова О. А.* Математическое моделирование ультразвуковых колебаний фактоэмульсификатора в среде хрусталика // Информатика и медицина: сборник. — М.: Наука, 1997. — С. 144–155.
- Bubnov A. V., Korotin P. N., Kholodova O. A.* Mathematical model operation of ultrasonic fluctuations of a faktoemulsifikator in the environment of a crystalline lens // Informatics and medicine: sbornik. — Moscow: Nauka, 1997. — P. 144–155 (in Russian).
- Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учебное пособие / Издание 2-е, испр. и доп. Гасников А. В. и др. / Под ред. А. В. Гасникова. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с.**
- Introduction to mathematical model operation of traffic flows: Manual / 2<sup>nd</sup> edition. / Ed. A. V. Gasnikov. — Moscow: MCCME, 2013. — 427 p. (in Russian).*
- Голов А. В., Симаков С. С.* Математическая модель регуляции легочной вентиляции при гипоксии и гиперкапнии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 2. — С. 297–310.
- Golov A. V., Simakov S. S.* Mathematical model of respiratory regulation during hypoxia and hypercapnia // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 2. — P. 297–310 (in Russian).

- Гузеватых А. П., Лобанов А. И., Гурия Г. Т.* Активация внутрисосудистого тромбообразования вследствие развития стеноза // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 4. — С. 39–60.  
*Guzevatykh A. P., Lobanov A. I., Guria G. T.* Threshold intervacular blood coagulation as a result of stenosis development // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2000. — Vol. 12, No. 4. — P. 39–60 (in Russian).
- Гурия Г. Т., Лобанов А. И., Старожилова Т. К.* Моделирование роста оторвавшегося тромба в пристеночном потоке // Компьютерные модели и прогресс медицины: сборник. — М.: Наука, 2001. — С. 250–263.  
*Guria G. T., Lobanov A. I., Starozhilova T. K.* Mathematical modeling of the come-off blood clot in a shear stream // *Computational Models and Medical Progress: sbornik*. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 250–263 (in Russian).
- Демченко В. В., Лосева Т. В., Немчинов И. В.* Дозвуковые радиационные волны. II. Распространение двумерных волн // Квантовая электроника. — 1992. — Т. 19, № 3. — С. 257–263.  
*Demchenko V. V., Loseva T. V., Nemchinov I. V.* Subsonic radiation waves. II. Propagation of two-dimensional waves // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. — 1992. — Vol. 22, No. 3. — P. 233–238. (Original Russian paper: *Demchenko V. V., Loseva T. V., Nemchinov I. V.* Dozvukovye radiatsionnye volny. Chast II. Rasprostranenie dvumernuh voln // *Kvantovaya elektronika*. — 1992. — Vol. 19, No. 3. — P. 257–263.)
- Демченко В. В., Холодов А. С.* Численное исследование сжатия и нагрева конических мишеней // Журнал прикладной механики и технической физики. — 1985. — № 6. — С. 131–138.  
*Demchenko V. V., Kholodov A. S.* Numerical study of compression and heating of conical targets // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 1985. — No. 6. — P. 10–15. (Original Russian paper: *Demchenko V. V., Kholodov A. S.* Chislennoe issledovanie szhatiya i nagreva konicheskikh mishenej // *Zhurnal Prikladnoj Mekhaniki i Tekhnicheskoy Fiziki*. — 1985. — No. 6. — P. 131–138.)
- Евдокимов А. В., Холодов А. С.* Квазистационарная пространственно-распределенная модель замкнутого кровообращения организма человека // Компьютерные модели и прогресс медицины. — М.: Наука, 2001. — С. 164–193.  
*Evdokimov A. V., Kholodov A. S.* Pseudo-steady spatially distributed model of human circulation // *Computational Models and Medical Progress*. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 164–193 (in Russian).
- Иванов В. Д., Кондауров В. И., Петров И. Б., Холодов А. С.* Расчет динамического деформирования и разрушения упругопластических тел сеточно-характеристическими методами // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 11, № 2. — С. 10–29.  
*Ivanov V. D., Kondaurov V. I., Petrov I. B., Kholodov A. S.* The calculation of the dynamic deformation and fracture of elastic-plastic solids grid-characteristic methods // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 1990. — Vol. 11, No. 2. — P. 10–29 (in Russian).
- Иванов В. Д., Косарев В. И., Лобанов А. И., Петров И. Б., Пирогов В. Б., Рябенский В. С., Старожилова Т. К., Утюжников С. В., Холодов А. С.* Лабораторный практикум по курсу «Основы вычислительной математики». — М.: МЗ Пресс, 2003. — 192 с.  
*Ivanov V. D., Kosarev V. I., Lobanov A. I., Petrov I. B., Pirogov V. B., Ryaben'kii V. S., Starozhilova T. K., Utughnikov S. V., Kholodov A. S.* Laboratornyi praktikum po kursu "Osnovy vychislitel'noi matematiki" [Computer-aimed course "Introduction into computational mathematics". Handbook]. — Moscow: MZPress Publ., 2003. — 192 p. (in Russian).
- Иванов В. Д., Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С., Пашутин Р. А.* Сеточно-характеристический метод расчета динамического деформирования на нерегулярных сетках // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 7. — С. 118–127.  
*Ivanov V. D., Petrov I. B., Tormasov A. G., Kholodov A. S., Pashutin R. A.* Grid characteristic method of dynamic deformation calculation on irregular grids // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 1999. — Vol. 11, No. 7. — P. 118–127 (in Russian).
- Иванов В. Д., Холодов А. С.* Об использовании сеточно-характеристических схем с положительной аппроксимацией для решения линейных задач теории упругости / Рук. деп. ВИНТИ, 1978.  
*Ivanov V. D., Kholodov A. S.* Ob ispol'zovanii setochno-harakteristicheskikh schem s polozhitel'noi approksimatsiey dlya resheniya lineinykh zadach teorii uprugosti [On the application of monotonic grid-characteristic difference schemes for linear problems of elasticity] / The deposited manuscript, VINITI, 1978 (in Russian).
- Карпов В. Е., Косарев В. И., Лобанов А. И., Толстобров А. В.* Расчет динамики плазмы в плазменном прерывателе тока с использованием кластера из персональных компьютеров // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 4. — С. 45–61.

- Karpov V. E., Kosarev V. I., Lobanov A. I., Tolstobrov A. V.* On the calculation of the plasma dynamics in the RS-20 POS device using the personal computer cluster // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2007. — Vol. 19, No. 4. — P. 45–61 (in Russian).
- Карпов В. Е., Лобанов А. И.* Расчет динамики плазмы в плазменном прерывателе тока микросекундного диапазона // *Математическое моделирование*. — 2011. — Т. 23, № 8. — С. 37–156.
- Karpov V. E., Lobanov A. I.* Plasma dynamic simulation in microsecond plasma opening switch // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2011. — Vol. 23, No. 8. — P. 137–156 (in Russian).
- Коротин П. Н., Петров И. Б., Пирогов В. Б., Холодов А. С.* О численном решении связанных задач сверхзвукового обтекания деформируемых оболочек конечной толщины // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1984. — Т. 27, № 8. — С. 1233–1243.
- Korotin P. N., Petrov I. B., Pirogov V. B., Kholodov A. S.* On a numerical solution of related problems of supersonic flow over deformable shells of finite thickness // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1984. — Vol. 27, No. 4. — P. 181–188. (Original Russian paper: *Korotin P. N., Petrov I. B., Pirogov V. B., Kholodov A. S.* O chislennom reshenii svyaznykh zadach sverkhzvukovogo obtekaniya deformiruemykh obolochek konechnoi tolschiny // *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*. — 1984. — Vol. 27, No. 8. — P. 1233–1243.)
- Косарев В. И., Лобанов А. И., Чукбар К. В., Шестаков Ю. И.* О возможности организации трехмерного сжатия неоднородного лайнера // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез*. — 1989. — Вып. 3. — С. 46–48.
- Kosarev V. I., Lobanov A. I., Chukbar K. V., Shestakov Yu. I.* On a possibility of realization of three-dimensional implosion of an inhomogeneous liner // *VANT. Ser. Thermonuclear Synthesys*. — 1989. — No. 3. — P. 46–48 (in Russian).
- Косарев В. И., Магомедов К. М.* Дивергентная разностная схема для расчета сверхзвуковых установившихся течений сложной структуры // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1973. — Т. 13, № 4. — С. 923–937.
- Kosarev V. I., Magomedov K. M.* A divergence difference scheme for computing steady supersonic flows of complex structure // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1973. — Vol. 13, No. 4. — P. 131–147. (Original Russian paper: *Kosarev V. I., Magomedov K. M.* Divergentnaya raznostnaya schema dlya rascheta sverkhzvukovykh ustanovivshisya techenii sloznoi struktury // *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*. — Vol. 13, No. 4. — P. 923–937.)
- Кострыкин В. С., Фомин В. Н., Холодов А. С.* Пространственное обтекание затупленных конусов и эллипсоидов вращения потоком излучающего газа // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1976. — Т. 16, № 2. — С. 451–459.
- Kostrykin V. S., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Three-dimensional radiating flow around blunted cones and ellipsoids of revolution // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 1976. — Vol. 16, Issue 2. — P. 166–174. (Original Russian paper: *Kostrykin V. S., Fomin V. N., Kholodov A. S.* Prostranstvennoe obtekanie zatuplennykh konusov i ellipsoidov vrascheniya potokom izluchayuschego gasa // *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*. — 1976. — Vol. 16, No. 2. — P. 451–459.)
- Лавриненко Н. Е., Репин А. Ю., Ступицкий Е. Л., Холодов А. С.* Особенности поведения плазменной области, образуемой взрывом в верхней атмосфере на высотах 100–120 км // *Математическое моделирование*. — 2007. — Т. 19, № 5. — С. 59–71.
- Lavrinenko N. E., Repin A. Yu., Stupitsky E. L., Kholodov A. S.* Features of behavior of plasma area, formed by explosion in the top atmosphere at heights of 100–120 km // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2007. — Vol. 19, No. 5. — P. 59–71 (in Russian).
- Лобанов А. И., Старожилова Т. К., Гурия Г. Т.* Численное исследование структурообразования при свертывании крови // *Математическое моделирование*. — 1997. — Т. 9, № 8. — С. 83–95.
- Lobanov A. I., Starogilova T. K., Guria G. T.* Numerical investigation of pattern formation in blood coagulation // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 1997. — Vol. 9, No. 8. — P. 83–95 (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* О сверхзвуковом пространственном обтекании треугольного крыла с притупленными кромками // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. — 1967. — Т. 2, № 4. — С. 159–163.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S.* Supersonic three-dimensional flow around a delta wing with blunted leading edges // *Fluid Dynamics*. — July 1967. — Vol. 2, Issue 4. — P. 113–117. (Original Russian paper: *Magomedov K. M., Kholodov A. S.* O sverkhzvukovom prostranstvennom obtekaniu treugol'nogo kryla s prituplennymi kromkami // *Izvestiya AN SSSR. Mehanika zidkosti i gaza*. — 1967. — Vol. 2, No. 4. — P. 153–169.)

- Магомедов К. М., Холодов А. С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373–386.  
*Magomedov K. M., Kholodov A. S.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 158–176. (Original Russian paper: *Magomedov K. M., Kholodov A. S.* O postroenii raznostnykh schem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa na osnove harakteristicheskikh sootnoshenii // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1969. — Vol. 9, No. 2. — P. 373–386.)
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Наука, 1988. — 289 с.  
*Magomedov K. M., Kholodov A. S.* Setochno-harakteristicheskie chislennye metody [Grid-and-characteristics numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1988. — 289 p. (in Russian).
- Магомедов К. М., Холодов А. С.* Сеточно-характеристические численные методы. — 2-е изд. — М.: Юрайт, 2017. — 313 с.  
*Magomedov K. M., Kholodov A. S.* Setochno-harakteristicheskie chislennye metody [Grid-and-characteristics numerical methods]. — 2nd edition. — Moscow: Yurait, 2017. — 313 p. (in Russian).
- Марченкова Т. Е., Бубнов А. В., Холодов А. С.* Математическое моделирование ирригационно-аспирационной техники факоэмульсификации // Офтальмохирургия. — 1991. — № 1. — С. 11–15.  
*Marchenkova T. E., Bubnov A. V., Kholodov A. S.* Mathematical modelling of the irrigation and aspiration technology of fakoemulsifikation // Ophthalmosurgery. — 1991. — No. 1. — P. 11–15 (in Russian).
- Николаев А. В., Рожило Я. А., Старожилова Т. К., Сарнацкая В. В., Юшко Л. А., Михайловский С. В., Холодов А. С., Лобанов А. И.* Математическая модель связывания альбумин-билирубинового комплекса на поверхности угольного пирополимера // Бюллетень экспериментальной биологии и медицины. — 2005. — Т. 140, № 9. — С. 352–356.  
*Nikolaev A. V., Rozhilo Ya. A., Starozhilova T. K., Sarnatskaya V. V., Yushko L. A., Mikhailovskii S. V., Kholodov A. S., Lobanov A. I.* Mathematical Model of Binding of Albumin — Bilirubin Complex to the Surface of Carbon Pyropolymer // Bull Exp Biol Med. — 2005. — Vol. 140, Issue 3. — P. 365–369. (Original Russian paper: *Nikolaev A. V., Rozhilo Ya. A., Starozhilova T. K., Sarnatskaya V. V., Yushko L. A., Mikhailovskii S. V., Kholodov A. S., Lobanov A. I.* Matematicheskaya model svyazyvaniya albumin-bilirubinovogo kompleksa na poverhnosti ugol'no-gopiropolimera // Bulluten eksperimental'noi biologii i meditsyny. — 2005. — Vol. 140, No. 9. — P. 352–356.)
- Петров И. Б., Тормасов А. Г., Холодов А. С.* Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1990. — Т. 30, № 8. — С. 1237–1244.  
*Petrov I. B., Tormasov A. G., Kholodov A. S.* On the use of hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of three-dimensional problems in the dynamics of a deformable solid // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 30, Issue 4. — P. 191–196. (Original Russian paper: *Petrov I. B., Tormasov A. G., Kholodov A. S.* Ob ispol'zovanii gibridizirovannykh setochno-harakteristicheskikh schem dlya chislennogo resheniya trekhmernykh zadach dinamiki deformiruемого tverdogo tela // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1990. — Vol. 30, No. 8. — P. 1237–1244.)
- Петров И. Б., Холодов А. С.* О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984а. — Т. 24, № 8. — С. 1172–1188.  
*Petrov I. B., Kholodov A. S.* Regularization of discontinuous numerical solutions of equations of hyperbolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1984а. — Vol. 24, Issue 4. — P. 128–138. (Original Russian paper: *Petrov I. B., Kholodov A. S.* O regulyaryzatsii chislennykh reshenii uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1984а. — Vol. 24, No. 8. — P. 1172–1188.)
- Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984b. — Т. 24, № 8. — С. 722–739.  
*Petrov I. B., Kholodov A. S.* Numerical study of some dynamic problems of the mechanics of a deformable rigid body by the mesh-characteristic method // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1984b. — Vol. 24, Issue 3. — P. 61–73. (Original Russian paper: *Petrov I. B., Kholodov A. S.* Numerical investigation of certain dynamical problems of the mechanics of a deformable solid body by the grid-characteristic method // Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki. — 1984b. — Vol. 24, No. 5. — P. 722–739.)



- Северов Д. С., Холодов А. С., Холодов Я. А.* Сравнение пакетной и потоковой моделей IP-сетей // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 12. — С. 105–116.  
*Severov D. S., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Comparison of packet-level and fluid models of IP networks // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4, No. 4. — P. 385–393. (Original Russian paper: *Северов Д. С., Холодов А. С., Холодов Я. А.* Сравнение пакетной и потоковой моделей IP сетей // Математическое моделирование. — 2011. — Vol. 23, No. 12. — P. 105–116.)
- Симаков С. С., Холодов А. С.* Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 87–102.  
*Simakov S. S., Kholodov A. S.* Computational study of oxygen concentration in human blood under low frequency disturbances // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2009. — Vol. 1, No. 2. — P. 283–295. (Original Russian paper: *Симаков С. С., Холодов А. С.* Численное исследование содержания кислорода в крови человека при низкочастотных воздействиях // Математическое моделирование. — 2008. — Vol. 20, No. 4. — P. 87–102.)
- Словохотов Ю. Л.* Физика и социофизика. Ч. 2. Сети социальных взаимодействий. Эконофизика // Проблемы управления. — 2012. — № 2. — С. 2–31.  
*Slovokhotov Yu. L.* Physics vs. sociophysics. Part 2. Networks of social interactions. Econophysics // Problemy Upravleniya. — 2012. — No. 2. — P. 2–31 (in Russian).
- Ступицкий Е. Л., Васильев М. О., Репин А. Ю., Холодов А. С., Холодов Я. А.* Формирование крупномасштабного струйного течения в результате развития желобковой неустойчивости // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 17–28.  
*Stupitskii E. L., Vasil'ev M. O., Repin A. Yu., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Formation of large-scale jet current as a result of development flutter instability // Математическое моделирование. — 2006. — Vol. 18, No. 1. — P. 17–28 (in Russian).
- Ступицкий Е. Л., Репин А. Ю., Холодов А. С., Холодов Я. А.* Поведение высокоэнергетического плазменного сгустка в верхней ионосфере. Часть 1. Начальная стадия разлета и торможения плазменного сгустка // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 18, № 7. — С. 43–58.  
*Stupitskii E. L., Repin A. Yu., Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Behavior of a highly energetic plasma bulge in the upper ionosphere. 1. Initial stage of plasma bulge spread and deceleration // Математическое моделирование. — 2004. — Vol. 18, No. 7. — P. 43–58 (in Russian).
- Федоренко Р. П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128.  
*Fedorenko R. P.* The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1963. — Vol. 2, No. 6. — P. 1355–1365. (Original Russian paper: *Федоренко Р. П.* Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — Vol. 2, No. 6. — P. 1122–1128.)
- Федоров С. Н., Егорова Э. В., Холодов А. С., Марченкова Т. Е., Бубнов А. В.* О численном моделировании процессов ирригации и аспирации при экстракапсулярной экстракции катаракты // Вопросы кибернетики. Биомедицинформатика и ее приложения. — 1988. — С. 99–114.  
*Fedorov S. N., Egorova E. V., Kholodov A. S., Marchenkova T. E., Bubnov A. V.* On the numerical method for irrigation modeling on the extracapsular extraction of a cataract // Voprosy Kibernetiki. Bioinformatika i ee prilozheniya. — 1988. — P. 99–114 (in Russian).
- Фёдоров С. Н., Егорова Э. В., Холодов А. С., Марченкова Т. Е., Бубнов А. В.* Способ экстракапсулярной экстракции катаракты. Авторское свидетельство на изобретение № 1454455 от 1.10.88 г.  
*Fedorov S. N., Egorova E. V., Kholodov A. S., Marchenkova T. E., Bubnov A. V.* The way of the extracapsular extraction of a cataract. Author's certificate No. 1454455 of 1.10.88 (in Russian).
- Холодов А. С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — Т. 18, № 6. — С. 1476–1492.  
*Kholodov A. S.* Construction of difference schemes with positive approximation for hyperbolic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. — 1978. — Vol. 18, No. 6. — P. 116–132. (Original Russian paper: *Холодов А. С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Comput. Math. Math. Phys. — 1978. — Vol. 18, No. 6. — P. 1355–1365.)

- Холодов А. С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24, № 9. — С. 1346–1358.  
*Kholodov A. S.* The construction of difference schemes with positive approximation for equation of parabolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — Jan. 1986. — Vol. 24, Issue 9-10. — P. 41–48. (Original Russian paper: *Kholodov A. S.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Comput. Math. Math. Phys. — 1984. — Vol. 24, No. 9. — P. 1346–1358.)
- Холодов А. С.*, Монотонные разностные схемы на нерегулярных сетках для эллиптических уравнений в области со многими несвязными границами // Математическое моделирование. — 1991. — Т. 3, № 9. — С. 104–113.  
*Kholodov A. S.* Monotonic difference schemes on irregular grids for elliptic equations in domains with multiple boundaries // Matematicheskoe Modelirovanie. — 1991. — Vol. 3, No. 9. — P. 104–113 (in Russian).
- Холодов А. С.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // Компьютерные модели и прогресс медицины: сборник. — М.: Наука, 2001. — С. 127–163.  
*Kholodov A. S.* Some Dynamical Models of Multi-Dimensional Problems of Respiratory and Circulatory Systems Including Their Interaction and Matter Transport // Computational Models and Medical Progress: sbornik. — Moscow: Nauka, 2001. — P. 127–163 (in Russian).
- Холодов А. С.* Об эволюции возмущений, вызванных движением метеороидов в атмосфере Земли // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 6. — С. 993–1030.  
*Kholodov A. S.* About the Evolution of Perturbations Caused by the Movement of Meteoroids in the Earth's Atmosphere // Computer Research and Modeling. — 2013. — Vol. 5, No. 6. — P. 993–1030 (in Russian).
- Холодов А. С.* Об индексах цитирования научных работ // Вестник Российской академии наук. — 2015. — Т. 85, № 2. — С. 122–131.  
*Kholodov A. S.* Citation Indexes of Scientific Works // Herald of the Russian Academy of Sciences. — 2015. — Vol. 85, No. 2. — P. 122–131 (in Russian).
- Холодов А. С., Лобанов А. И., Евдокимов А. В.* Разностные схемы для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве неопределенных коэффициентов. — М.: МФТИ, 2001. — 48 с.  
*Kholodov A. S., Lobanov A. I., Evdokimov A. V.* Difference schemes for the solution of stiff ODE systems in the space of undetermined coefficients [Raznostnye schemy dlya resheniya gestkih system obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii v prostranstve neopredelennykh koefitsiyentov]. — Moscow: MIPT, 2001. — 48 p. (in Russian).
- Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667.  
*Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1560–1588. (Original Russian paper: *Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Vol. 46, No. 9. — P. 1638–1667.)
- Холодов А. С., Холодов Я. А., Ступицкий Е. Л., Репин А. Ю.* Численное исследование поведения высокоэнергетичного плазменного сгустка в верхней ионосфере. Часть 2. Разработка трехмерной модели // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 8. — С. 3–23.  
*Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., Stupitskii E. L., Repin A. Yu.* Numerical investigation of high-energy plasmoid behavior in the upper ionosphere. Part 2. Development of the three-dimensional model // Matematicheskoe Modelirovanie. — 2004. — Vol. 16, No. 8. — P. 3–23 (in Russian).
- Холодов Я. А., Алексеенко А. Е., Васильев М. О., Холодов А. С.* Построение математической модели дорожного перекрестка на основе гидродинамического подхода // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 503–522.  
*Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Vasilev M. O., Kholodov A. S.* Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 4. — P. 503–522 (in Russian).
- Холодов Я. А., Алексеенко А. Е., Холодов А. С., Васильев М. О., Мишин В. Д.* Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть II // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1205–1219.

- Kholodov Ya. A., Alekseenko A. E., Kholodov A. S., Vasilev M. O., Mishin V. D.* Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II // *Computer Research and Modeling*. — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1205–1219 (in Russian).
- Холодов Я. А., Васильев М. О., Холодов А. С., Цыбулин И. В.* Построение математической модели распространения примесей в вентиляционных сетях // *Математическое моделирование*. — 2016. — Т. 26, № 8. — С. 65–81.
- Kholodov Ya. A., Vasilev M. O., Kholodov A. S., Tsybulin I. V.* Developing the mathematical model for fine impurities spreading in ventilation networks // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2017. — Vol. 9, No. 2. — P. 142–154. (Original Russian paper: *Kholodov Ya. A., Vasilev M. O., Kholodov A. S., Tsybulin I. V.* Postroenie matematicheskoi modeli rasprostraneniya primesey v ventilyatsionnyh setyah // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2016. — Vol. 28, No. 8. — P. 65–81.)
- Холодов Я. А., Холодов А. С., Ступицкий Е. Л., Репин А. Ю.* Численные исследования поведения плазменного облака в верхней ионосфере // *Математическое моделирование*. — 2005. — Т. 17, № 11. — С. 43–62.
- Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Stupitskii E. L., Repin A. Yu.* Numerical researches of behaviour of a plasma cloud in the top ionosphere // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2005. — Vol. 17, No. 11. — P. 43–62 (in Russian).
- Холодов Я. А., Уткин П. С., Холодов А. С., Цыбулин И. В.* Монотонные разностные схемы высокого порядка аппроксимации для одномерных уравнений гиперболического типа. — М.: МФТИ, 2015. — 69 с.
- Kholodov Ya. A., Utkin P. S., Kholodov A. S., Tsybulin I. V.* The monotonic difference schemes of a high order of approximation for the one-dimensional hyperbolic equations [Monotonnye raznostnye schemy vysokogo porjadka aproksimatsii dlya odnomernykh uravnenii giperbolicheskogo tipa]. — Moscow: MIPT, 2015. — 69 p. (in Russian).
- Холодов Я. А., Холодов А. С., Гасников А. В., Морозов И. И., Тарасов В. Н.* Моделирование транспортных потоков — актуальные проблемы и перспективы их решения // *Труды МФТИ*. — 2010. — Т. 2, № 4 (8). — С. 64–74.
- Kholodov Ya. A., Kholodov A. S., Gasnikov A. V., Morozov I. I., Tarasov V. N.* Mathematical modelling of the traffic flows — current problems and prospects of their decision // *Proceedings of MIPT*. — 2010. — Vol. 2, No. 4 (8). — P. 64–74 (in Russian).
- Чуличков А. Л., Николаев А. В., Лобанов А. И., Гурия Г. Т.* Пороговая активация свертывания крови и рост тромба в условиях кровотока // *Математическое моделирование*. — 2000. — Т. 12, № 3. — С. 75–96.
- Chulichkov A. L., Nikolaev A. V., Lobanov A. I., Guria G. T.* Threshold activation of blood coagulation and thrombus growth under flow conditions // *Matematicheskoe Modelirovanie*. — 2000. — Vol. 12, No. 3. — P. 75–96 (in Russian).
- Belotserkovskii O. M., Kholodov A. S.* Numerical investigation of some gas dynamics problems by net-characteristic method // *Lecture Notes in Physics*. — No. 90. — Springer-Verlag, 1979.
- Gus'kov S. Yu., Demchenko N. N., Doskoch I. Ya., Rozanov V. B., Stepanov R. V., Azechi H., Murakami M., Nagatomo H., Sakaiya S., Demchenko V. V., Zmitrenko N. V.* Laser-driven acceleration of a dense matter up to 'thermonuclear' velocities // *Plasma physics and controlled fusion*. — 2007. — Vol. 49, No. 10. — P. 1689–1706.
- Demchenko V. V.* Numerical Simulation of Richtmyer-Meshkov Instability // *Russian Journal of Computational Mechanics*. — 1993. — Vol. 1, No. 2. — P. 51–66.
- Favorskaya A. V., Petrov I. B.* Innovations in Wave Processes Modelling and Decision Making: Grid-Characteristic Method and Applications (Smart Innovation, Systems and Technologies). — Springer International Publishing, 2018. — 270 p.
- Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* Computational models on graphs for the nonlinear hyperbolic system of equations // *Proceedings of ASME 2004 PVP Conference*. — 2004. — Vol. 476. — P. 161–167.
- Kholodov A. S., Lobanov A. I.* Computational experiment in ecology and medicine: elliptic problems // *Phystech Journal*. — 1994. — Vol. 1, No. 2. — P. 3–11.

