

УДК: 519.6

Расчет сигнала и шума при анализе райсовских данных путем комбинирования метода максимума правдоподобия и метода моментов

Т. В. Яковлева

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

Получено 26.03.2018, после доработки — 29.05.2018.

Принято к публикации 07.06.2018.

В работе развивается новый математический метод решения задачи совместного расчета параметров сигнала и шума в условиях распределения Райса, основанный на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов. При этом определение искомых параметров задачи осуществляется посредством обработки выборочных измерений амплитуды анализируемого райсовского сигнала. Получена система уравнений для искомых параметров сигнала и шума, а также представлены результаты численных расчетов, подтверждающие эффективность предлагаемого метода. Показано, что решение двухпараметрической задачи разработанным методом не приводит к увеличению объема требуемых вычислительных ресурсов по сравнению с решением однопараметрической задачи. В частном случае малой величины отношения сигнала к шуму получено аналитическое решение задачи. В работе проведено исследование зависимости погрешности и разброса расчетных данных для искомых параметров от количества измерений в экспериментальной выборке. Как показали численные эксперименты, величина разброса расчетных значений искомых параметров сигнала и шума, полученных предлагаемым методом, изменяется обратно пропорционально количеству измерений в выборке. Проведено сопоставление точности оценивания искомых райсовских параметров предлагаемым методом и ранее развитым вариантом метода моментов. Решаемая в работе задача является значимой для целей обработки райсовских данных, в частности, в системах магнитно-резонансной визуализации, в системах ультразвуковой визуализации, при анализе оптических сигналов в системах дальнометрии, в радиолокации, а также при решении многих других научных и прикладных задач, адекватно описываемых статистической моделью Райса.

Ключевые слова: функция плотности вероятности, распределение Райса, метод максимума правдоподобия, метод моментов, выборки измерений, отношение сигнала к шуму

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект N17-07-00064 по программе фундаментальных исследований.

UDC: 519.6

Signal and noise calculation at Rician data analysis by means of combining maximum likelihood technique and method of moments

T. V. Yakovleva

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences,
44, b. 2, Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru.

*Received 26.03.2018, after completion — 29.05.2018.
Accepted for publication 07.06.2018.*

The paper develops a new mathematical method of the joint signal and noise calculation at the Rice statistical distribution based on combining the maximum likelihood method and the method of moments. The calculation of the sought-for values of signal and noise is implemented by processing the sampled measurements of the analyzed Rician signal's amplitude. The explicit equations' system has been obtained for required signal and noise parameters and the results of its numerical solution are provided confirming the efficiency of the proposed technique. It has been shown that solving the two-parameter task by means of the proposed technique does not lead to the increase of the volume of demanded calculative resources if compared with solving the task in one-parameter approximation. An analytical solution of the task has been obtained for the particular case of small value of the signal-to-noise ratio. The paper presents the investigation of the dependence of the sought for parameters estimation accuracy and dispersion on the quantity of measurements in experimental sample. According to the results of numerical experiments, the dispersion values of the estimated sought-for signal and noise parameters calculated by means of the proposed technique change in inverse proportion to the quantity of measurements in a sample. There has been implemented a comparison of the accuracy of the sought-for Rician parameters' estimation by means of the proposed technique and by earlier developed version of the method of moments. The problem having been considered in the paper is meaningful for the purposes of Rician data processing, in particular, at the systems of magnetic-resonance visualization, in devices of ultrasonic visualization, at optical signals' analysis in range-measuring systems, at radar signals' analysis, as well as at solving many other scientific and applied tasks that are adequately described by the Rice statistical model.

Keywords: probability density function, Rice distribution, maximum likelihood technique, method of moments, samples of measurements, signal to noise ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 511–523 (Russian).

The work was supported by RFBR, project N17-07-00064 within the fundamental research program.

1. Введение

Возрастающий в последние годы интерес к исследованиям методов анализа данных в условиях статистического распределения Райса связан с очень широким кругом задач, которые описываются данным распределением. Круг таких задач включает в себя все те задачи, в которых выходной сигнал представляет собой сумму искомого детерминированного полезного сигнала и случайного шума, образованного многими независимыми нормально распределенными слагаемыми с нулевым средним значением. Величина амплитуды, или огибающей, такого выходного сигнала подчиняется, как известно, распределению Райса [Rice, 1945; Davenport, Root, 1958]. Для анализа райсовских данных, как известно, эффективно используются методы математической статистики [Wang, Lei, 1994; Gudbjartsson, Patz, 1995; Cover, 2006; Papoulis, 1984], причем наиболее часто используются метод максимума правдоподобия [Sijbers et al., 1998; Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, 2004; He, Greenshields, 2009] и метод моментов [Talukdar, Lawing, 1991; Park, Jr., 1961; Benedict, Soong, 1967]. Причем развитая в последние годы теория так называемого двухпараметрического анализа и разработанные на ее основе методы обеспечивают не только эффективное разделение информативных и шумовых компонент анализируемого райсовского сигнала, но и совместное оценивание величин сигнала и шума с высокой точностью [Yakovleva, Kulberg, 2013; Яковлева, 2014; Яковлева, 2016; Яковлева, Кульберг, 2014; Яковлева, 2015]. В этих работах развиваются и анализируются методы двухпараметрического анализа, основанные на принципе максимума правдоподобия, а также варианты двухпараметрического метода моментов, реализуемые посредством обработки данных выборочных измерений моментов низших четных порядков, т. е. 2-го и 4-го моментов (так называемый метод ММ24) и двух моментов низших порядков, т. е. 1-го и 2-го моментов (так называемый метод ММ12). В работе [Яковлева, 2017] представлен математический метод решения задачи совместного расчета параметров райсовского сигнала и шума посредством метода моментов низших нечетных порядков.

В настоящей работе развивается новый оригинальный математический метод двухпараметрического анализа райсовских данных, основанный на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов, получена соответствующая система уравнений для искоемых параметров сигнала и шума, представлены результаты численных экспериментов.

2. Постановка задачи, основные обозначения

Как известно, в задаче анализа райсовского сигнала измеряемой и анализируемой величиной является модуль комплексной величины, $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$, действительная x_{Re} и мнимая x_{Im} части которого представляют собой независимые случайные величины с одинаковыми, вообще говоря, ненулевыми математическими ожиданиями ν и искажаются гауссовским шумом, имеющим нормальное распределение с некоторой неизвестной величиной дисперсии σ^2 . При этом шумовые составляющие, искажающие действительную x_{Re} и мнимую x_{Im} компоненты измеряемого сигнала, имеют нулевые средние значения и тем самым не изменяют среднюю величину ν действительной и мнимой компонент исходного сигнала.

Амплитуда сигнала $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ подчиняется распределению Райса, функция плотности вероятности которого выражается следующей формулой:

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Здесь и ниже используются обозначения: $I_\delta(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка δ ; x_i — величина сигнала, полученная как результат

i -го измерения в выборке; n — количество элементов в выборке, называемое также длиной выборки. Для обозначения усреднения по выборке будем использовать угловые скобки:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad \dots; \quad \langle x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Расчитанное на основе выборочных измерений x_i ($i=1, \dots, n$) значение $\langle x^k \rangle$ стремится к значению соответствующего k -го момента $\overline{x^k}$ случайного райсовского сигнала при бесконечно большой длине n выборки измерений:

$$\overline{x^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Рассмотрим выборку из n измерений величины амплитуды случайного сигнала x . Тогда функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом i -го измерения является величина x_i ($i=1, \dots, n$), выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из выборки:

$$L(\nu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \nu, \sigma^2), \quad (2)$$

где функция $P(x_i | \nu, \sigma^2)$ определяется выражением (1). Функцию $L(\nu, \sigma^2)$ называют также функцией правдоподобия. При известных данных выборок, полученных в результате измерений, эта функция является функцией неизвестных статистических параметров ν и σ^2 . Метод максимума правдоподобия состоит в определении тех значений параметров ν и σ^2 , которые максимизируют функцию правдоподобия (2), или, что эквивалентно, ее логарифм:

$$\ln L(\nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \ln P(x_i | \nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln x_i - \ln \sigma^2 - \frac{x_i^2 + \nu^2}{2 \cdot \sigma^2} + \ln I_0 \left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) \right\}. \quad (3)$$

Функцию (3) называют логарифмической функцией правдоподобия распределения Райса.

3. Система уравнений для параметров сигнала и шума при комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов

Развиваемый в настоящей работе комбинированный метод определения искомых параметров основан на использовании двух известных подходов к решению задач математической статистики: принципа максимума правдоподобия и метода моментов [Deutsch, 1965; Port, 1994, Вентцель, 2005]. Уравнения метода максимума правдоподобия для определения неизвестных статистических параметров ν и σ^2 получаются приравнением нулю частных производных логарифмической функции правдоподобия по искомым параметрам. В качестве одного из уравнений нового комбинированного метода будем использовать уравнение метода максимума правдоподобия, полученное приравнением нулю частной производной логарифмической функции правдоподобия по параметру сигнала ν : $\frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma^2) = 0$. Тогда, принимая во внимание выражение (3), получаем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \nu} \ln I_0 \left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) - \frac{n \cdot \nu}{\sigma^2} = 0. \quad (4)$$

Используя известное соотношение $\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$ [Абрамовиц, Стиган, 1979], получаем из (4):

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{I_1\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} - \frac{n \cdot \nu}{\sigma^2} = 0. \quad (5)$$

В качестве второго уравнения комбинированного метода будем использовать выражение для первого момента райсовской случайной величины [Park, 1961]:

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot L_{1/2}\left(-\nu^2/2\sigma^2\right). \quad (6)$$

В (6) функция $L_{1/2}$ представляет собой полиномы Лагерра (Laguerre) [Янке и др., 1964]. Формулы (5) и (6) фактически представляют собой систему двух уравнений для двух неизвестных ν и σ^2 .

Проводя несложные преобразования уравнения (5) и представляя в (6) значение первого момента через выборочные измерения x_i ($i=1, \dots, n$), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \cdot \nu}{\sigma^2}\right), \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot L_{1/2}\left(-\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right). \end{cases} \quad (7)$$

В первом уравнении системы (7) обозначение \tilde{I} используется для функции $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$, равной отношению модифицированных функций Бесселя первого и нулевого порядков. Свойства функции \tilde{I} подробно исследовались в [Yakovleva, Kulberg, 2013; Яковлева, Кульберг, 2014]: данная функция является гладкой, монотонно возрастающей, выпуклой вверх и асимптотически стремится к единице.

Уравнения (7) представляют собой систему двух существенно нелинейных уравнений для двух неизвестных: ν и σ^2 . В решении данной системы уравнений и состоит развиваемый в настоящей работе метод расчета сигнала и шума, основанный на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов.

Для упрощения математических выкладок введем переменную

$$r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}, \quad (8)$$

которая характеризует величину отношения сигнала к шуму. Тогда, переходя от пары переменных (ν, σ) к переменным (r, σ) , получим из (7) следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \cdot \sqrt{2r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i}{\sigma} \sqrt{2r}\right), \\ \langle x \rangle = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot L_{1/2}(-r), \end{cases} \quad (9)$$

где $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ — измеренное в выборках значение первого момента или среднего значения райсовской величины x .

Из второго уравнения системы (9) получаем для переменной σ следующее выражение:

$$\sigma = \frac{\langle x \rangle}{\sqrt{\pi/2} \cdot L_{1/2}(-r)}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в первое уравнение системы (9), нетрудно получить уравнение для переменной r :

$$2\sqrt{r/\pi} \cdot \frac{\langle x \rangle}{L_{1/2}(-r)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left(\frac{x_i \sqrt{\pi \cdot r}}{\langle x \rangle} L_{1/2}(-r) \right). \quad (11)$$

Таким образом, задачу решения системы (9) двух уравнений для двух неизвестных (r, σ) удалось свести к задаче решения одного уравнения (11) для одной неизвестной величины r .

Значимой особенностью уравнения (11), отличающей его от соответствующих уравнений ранее развитых автором методов двухпараметрического анализа райсовских данных (метод максимумы правдоподобия, варианты метода моментов), является тот факт, что данное уравнение использует измеренные выборки лишь самого сигнала x_i , $i = 1, \dots, n$, а также рассчитанные на его основе данные для первого начального момента, что способствует минимизации ошибок при расчетах.

Поставленная задача расчета величины полезного сигнала и дисперсии шума состоит в том, чтобы, подставляя выборочные данные для величины сигнала x_i , $i = 1, \dots, n$, в уравнение (11), найти решение этого уравнения для неизвестной величины r и затем рассчитать параметр шума σ , используя формулу (10).

Далее, используя полученные значения для σ и r , из определения (8) величины $r = v^2 / 2\sigma^2$ нетрудно получить значение искомого параметра полезного сигнала $v = \sqrt{2\sigma^2 r}$.

4. Аналитическое решение задачи в предельном случае слабого сигнала

В предельном случае малого значения отношения сигнала к шуму система уравнений (7), как и эквивалентные ей система уравнений (9) и уравнение (11), могут быть решены аналитически. А именно, для разложения в ряд функции $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ отношения модифицированных

функций Бесселя первого рода 1-го и 0-го порядков справедлива следующая формула [Абрамовиц, Стиган, 1979; Яковлева, 2016]:

$$\tilde{I}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{8} + O(z^4) \right). \quad (12)$$

Не останавливаясь детально на громоздких промежуточных выкладках, приведем окончательную формулу для аналитического решения уравнения (11) для параметра r , полученного в предельном случае малого отношения сигнала к шуму ($r \ll 1$) с точностью до членов z^2 :

$$r \approx 2 \cdot \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} - \frac{\pi}{4} \right] / \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (13)$$

Введем обозначение:

$$\alpha = \langle x \rangle^2 / \langle x^2 \rangle. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что значение параметра α определяется степенью стохастичности случайной величины x , так как разность значений знаменателя и числителя в (14) определяют значение дисперсии случайной величины x . Очевидно, что при достаточно большой длине выборки n всегда выполняется условие $\alpha < 1$, причем величина α растет с увеличением степени детерминированности процесса, т. е. с ростом отношения сигнала к шуму, асимптотически приближаясь к единице. В другом предельном случае, когда величина отношения сигнала к шуму стремится к нулю, а распределение Райса переходит в распределение Рэлея, имеем $\alpha_R = \pi/4$.

Таким образом, при достаточно большой длине выборки n всегда выполняется условие $\alpha - \frac{\pi}{4} \geq 0$, т. е. числитель в формуле (13) для аналитического решения уравнения (11) является величиной неотрицательной, что соответствует условию неотрицательности параметра r , следующему из его определения (8).

С учетом (10), получим для второй искомой переменной — параметра σ — следующее выражение:

$$\sigma = \langle x \rangle \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} / L_{1/2} \left(-2 \cdot \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} - \frac{\pi}{4} \right] / \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} + \frac{\pi}{4} \right] \right). \quad (15)$$

Используя (15) и определение параметра r (8), получаем следующее решение для искомой величины параметра полезного сигнала ν :

$$\nu = \langle x \rangle \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2 \cdot \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} - \frac{\pi}{4} \right] / \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} + \frac{\pi}{4} \right]} / L_{1/2} \left(-2 \cdot \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} - \frac{\pi}{4} \right] / \left[\frac{\langle x \rangle^2}{\langle x^2 \rangle} + \frac{\pi}{4} \right] \right). \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) представляют собой аналитическое решение задачи в рассматриваемом предельном случае слабого сигнала, т. е. малой величины отношения сигнала к шуму.

5. Результаты численного моделирования

В данном разделе приведены результаты компьютерного моделирования решения задачи определения параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных посредством развитого выше математического метода, основанного на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов.

При проведении численного эксперимента генерировались данные, подчиняющиеся распределению Райса, на двумерной сетке, узлы которой соответствуют различным исходно заданным значениям параметров сигнала ν и шума σ . Используя выборочные значения райсовского сигнала в каждой точке сетки, вычислялись искомые величины сигнала и шума на основе разработанного алгоритма, т. е. путем решения уравнений (10), (11).

Ниже представлены графики данных для параметра сигнала ν (рис. 1) и параметра шума σ (рис. 2), полученных в результате расчета при различных значениях отношения сигнала к шуму.

На рис. 1 показаны зависимости отклонений, полученных в результате численного расчета значений параметра ν , от реальной, исходно заданной величины этого параметра при различных значениях параметра σ . Значения по оси абсцисс соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра ν , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра.

Таким образом, отклонения ломаных сплошной, пунктирной и штрихпунктирной линий от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. При этом исходные значения параметра ν изменялись в диапазоне от 0.5 до 5.0 с шагом 0.5, а параметра σ — в диапазоне от 0.5 до 1.5 с шагом 0.1. Длина выборки n измерений случайного сигнала в представленных вариантах расчетов составляла, соответственно, $n = 4$. Представленные графики соответствуют данным вычислений, усредненным по 25 выборкам (в реальных системах цифровой обработки сигналов число усредняемых выборок составляет, как правило, $10^3 \div 10^4$). На рис. 1 сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии отображают точность расчетов величины сигнала ν при следующих значениях параметра σ : $\sigma = 0.5$ (сплошная ломаная линия); $\sigma = 1.0$ (пунктирная линия); $\sigma = 1.5$ (штрихпунктирная линия). Представленные графики отображают ожидаемую зависимость точности расчетов от значения отношения сигнала к шуму: по мере уменьшения исходно заданного фиксированного значения шума σ , т. е. по мере увеличения отношения сигнала к шуму, точность численного расчета параметра сигнала ν заметно растет.

На рис. 2 представлены результаты численного расчета параметра шума σ развитым в работе комбинированным методом при различных исходно заданных значениях величины полезного сигнала ν . Показаны зависимости отклонений расчетных значений параметра σ от реальных значений этого параметра, отображаемых прямой линией. Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра σ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра, т. е. отклонения ломаных сплошной и пунктирной линий от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии на рис. 2 получены для фиксированных, исходно заданных значений $\nu = 3.0$, $\nu = 2.0$ и $\nu = 1.0$ соответственно. Нетрудно видеть, что, как и в случае расчета полезного сигнала, точность расчета величины шума σ существенно зависит от значения отношения сигнала к шуму.

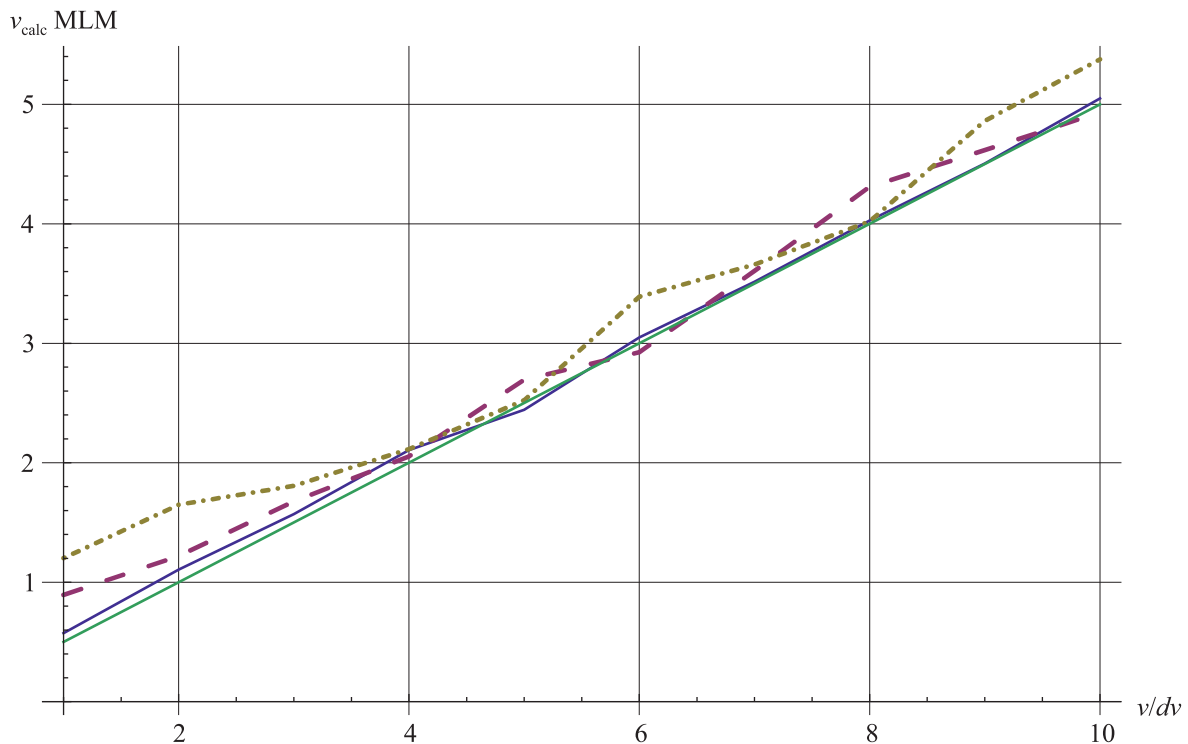


Рис. 1. Результаты численного расчета величины сигнала ν при изменении ν в диапазоне от 0.5 до 5.0 с шагом 0.5, при различных значениях дисперсии шума: $\sigma = 0.5$ (сплошная ломаная линия); $\sigma = 1.0$ (пунктирная линия); $\sigma = 1.5$ (штрихпунктирная линия)

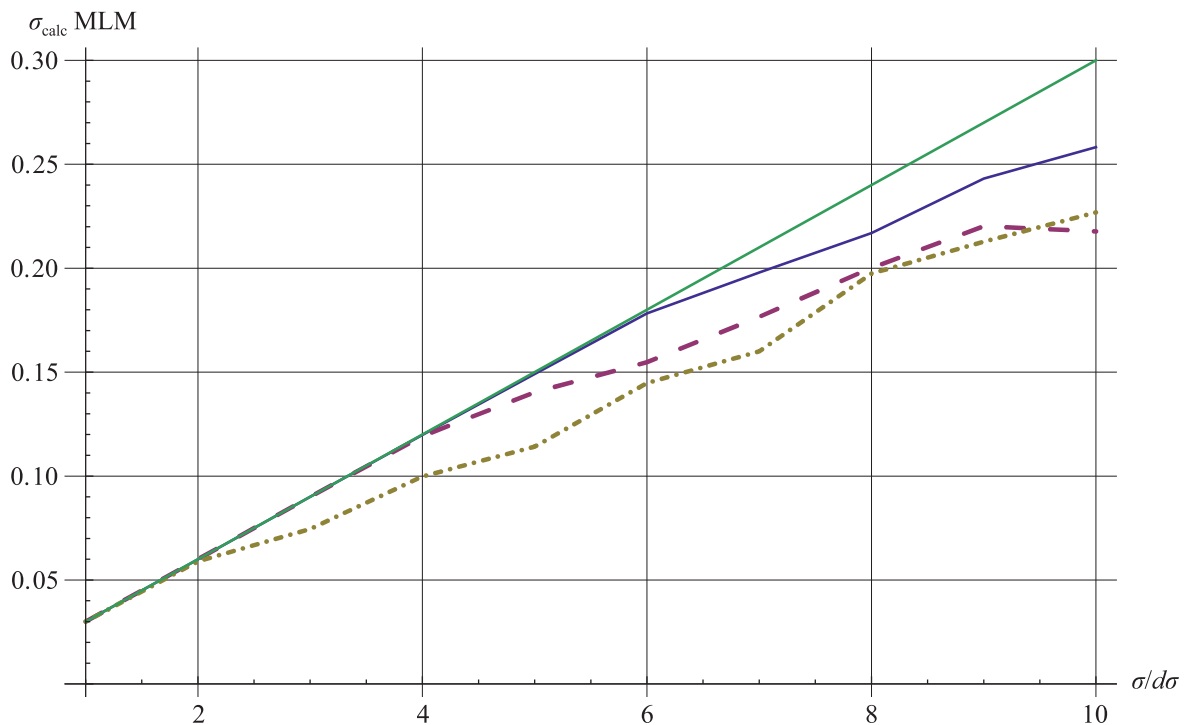


Рис. 2. Результаты численного расчета параметра шума σ при изменении σ в диапазоне от 0.3 до 3.0 с шагом 0.3, при различных значениях дисперсии шума: $\nu = 3.0$ (сплошная линия); $\nu = 2.0$ (пунктирная линия); $\nu = 1.0$ (штрихпунктирная линия)

Представленные графические данные позволяют проиллюстрировать достаточно высокую эффективность предлагаемого метода для расчета искомых величин полезного сигнала и дисперсии шума разработанным методом. Кроме того, из представленных результатов численного моделирования данного метода следует ожидаемый вывод: с ростом величины отношения сигнала к шуму точность расчета параметров сигнала ν и шума σ заметно растет.

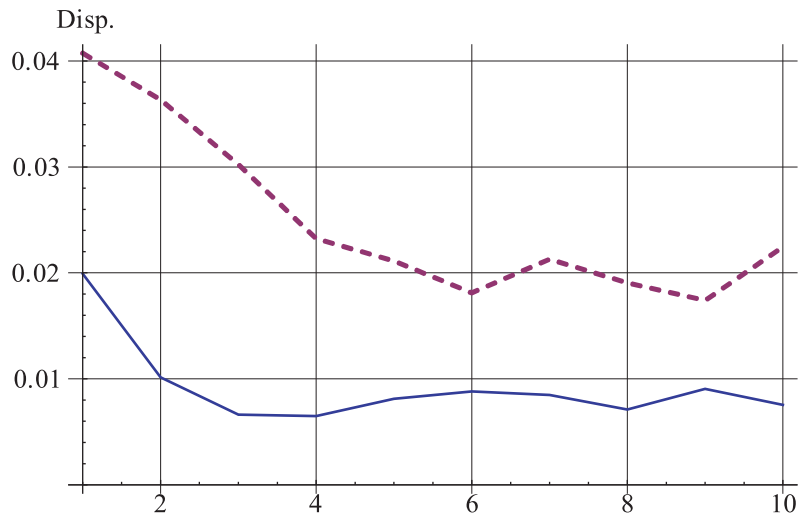
С целью изучения статистической погрешности метода, связанной с конечным числом измерений в экспериментальной выборке, в работе был проведен численный анализ величины разброса значений оцениваемых параметров и выявлена зависимость разброса расчетных данных от длины выборки и от исходной дисперсии гауссовского шума. В качестве иллюстрации полученных зависимостей ниже приведены графические результаты численного расчета разброса величины полезного сигнала как параметра, представляющего наибольший интерес: на рис. 3, а представлены результаты расчета величины дисперсии значений полезного сигнала в зависимости от исходно заданной величины дисперсии гауссовского шума, формирующего райсовский сигнал, при заданной величине длины выборки $n = 16$, а на рис. 3, б — в зависимости от длины выборки измерений, используемой при расчете искомого параметра предлагаемым методом, при заданной величине дисперсии гауссовского шума $\sigma = 0.8$. Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра ν , а по оси ординат — значениям величины дисперсии, характеризующей разброс полученных в результате расчета значений параметра полезного сигнала.

При получении данных, представленных на рис. 3, численный эксперимент проводился следующим образом. Исходные значения параметра сигнала ν изменялись в диапазоне от 0.5 до 5.0 с шагом 0.5, при фиксированном значении параметра σ . При этом на рис. 3, а сплошная линия соответствует значению $\sigma = 0.5$, а пунктирная — значению $\sigma = 0.8$. Тем самым рис. 3, а демонстрирует ожидаемую зависимость разброса рассчитанных значений полезного сигнала от исходной величины дисперсии гауссовского шума: чем больше величины гауссовского шума, тем более разбросаны значения полезного сигнала, рассчитанные предлагаемым методом. Гра-

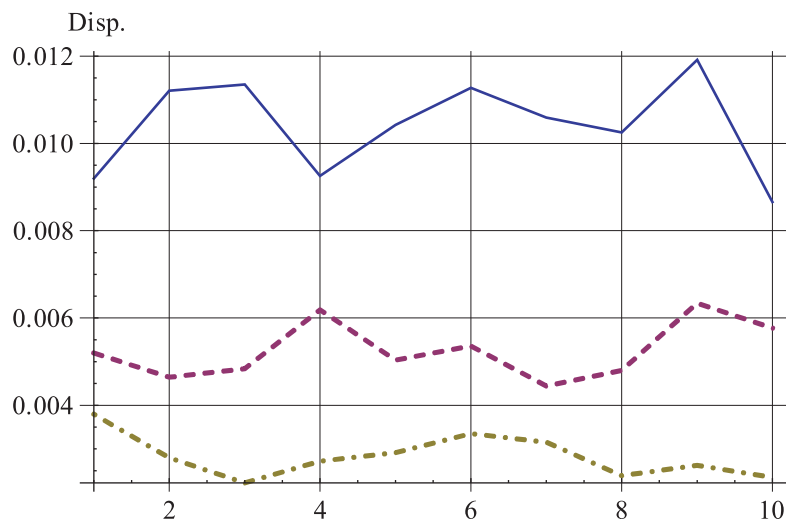
фики на рис. 3, б иллюстрируют зависимость величины разброса рассчитанных предлагаемым методом значений полезного сигнала от количества измерений в экспериментальной выборке, а именно: сплошная линия соответствует длине выборки $n = 8$, пунктирная — $n = 16$, штрихпунктирная — $n = 32$.

Из результатов, представленных на рис. 3, б, следует, что зависимость разброса расчетных значений полезного сигнала, полученных предлагаемым методом, от длины выборки можно оценить как обратно пропорциональную.

В результате численных расчетов аналогичные результаты были получены и для величины разброса второго оцениваемого параметра — параметра дисперсии гауссовского шума.



а) Результаты численного расчета величины разброса значений параметра полезного сигнала, полученных предлагаемым методом, при фиксированных значениях величины дисперсии σ гауссовского шума, формирующего райсовский сигнал: сплошная линия — $\sigma = 0.5$; пунктирная линия — $\sigma = 0.8$



б) Результаты численного расчета величины разброса значений параметра полезного сигнала, полученных предлагаемым методом, от длины выборки измерений n : сплошная линия — $n = 8$; пунктирная линия — $n = 16$; штрихпунктирная линия — $n = 32$

Рис. 3. Результаты численного расчета зависимости величины разброса параметра полезного сигнала от исходной величины дисперсии гауссовского шума (а) и от длины выборки измерений (б)

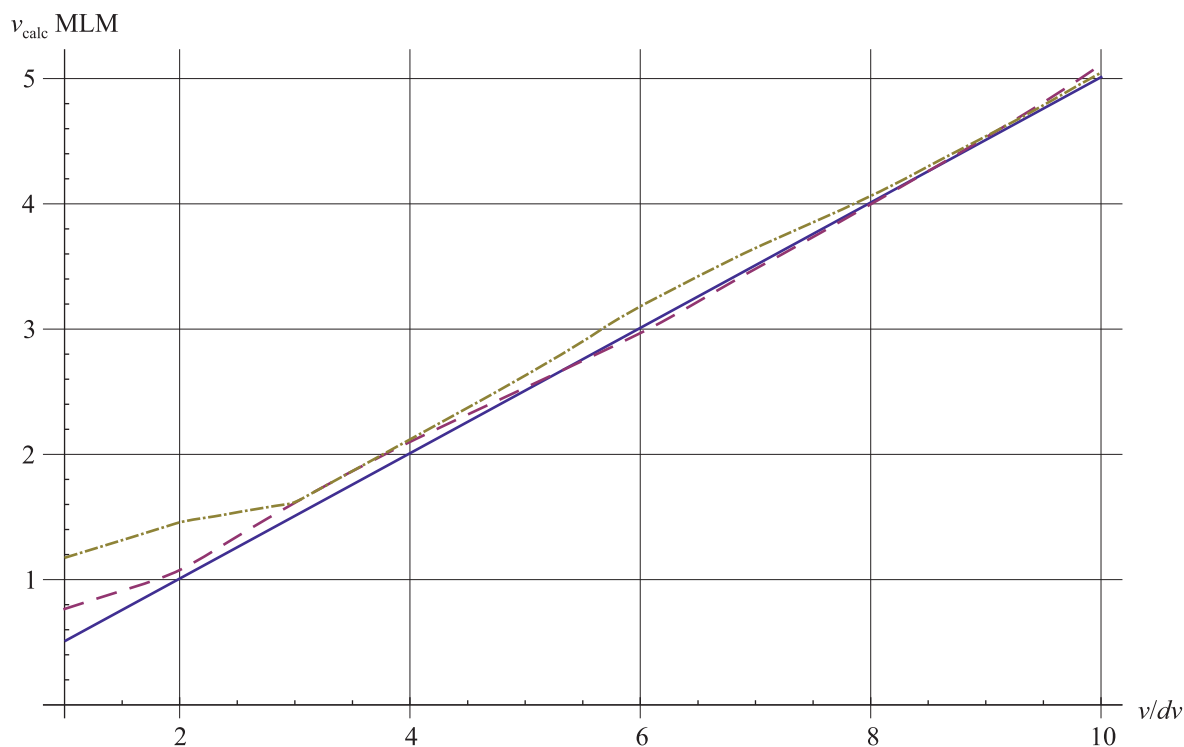


Рис. 4. Результаты численного расчета величины сигнала ν при изменении ν в диапазоне от 0.5 до 5.0 с шагом 0.5, при $\sigma = 1.0$ предлагаемым методом (пунктирная линия) и методом ММ24 (штрихпунктирная линия)

Развиваемый в настоящей работе метод, основанный на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов, расширяет и дополняет группу методов двухпараметрического анализа райсовских данных, ранее развитых автором настоящей статьи [Яковлева, 2014; Яковлева, 2016; Яковлева, 2017]. Как показали численные эксперименты, точность расчета искомых параметров сигнала и шума разработанным методом практически не отличается от точности расчетов ранее развитыми автором методами двухпараметрического анализа райсовских данных. Результаты сопоставления точности предлагаемого метода и метода низших четных моментов ММ24 приведены на рис. 4.

Пунктирная линия на рис. 4 соответствует результатам расчета полезного сигнала, предлагаемым комбинированным методом, в то время как штрихпунктирная линия соответствует методу моментов ММ24. Прямая сплошная линия соответствует исходно заданным реальным значениям сигнала. Рис. 4 иллюстрирует тот факт, что сопоставляемые методы близки по точности расчетов. Однако предлагаемый в данной работе метод основывается на использовании исходных данных лишь для самого измеренного в выборках сигнала x_i ($i=1, \dots, n$) и поэтому не требует характерных для других методов дополнительных операций, в частности — операций по возведению результатов выборочных измерений x_i ($i=1, \dots, n$) в степень с целью получения данных для моментов более высоких порядков, тем самым обеспечивая более высокое быстродействие.

6. Заключение

В работе развит новый оригинальный математический метод расчета параметров сигнала и шума при анализе стохастических данных в условиях распределения Райса, основанный на комбинировании метода максимума правдоподобия и метода моментов.

Получена в явном виде система уравнений для искоемых параметров сигнала и шума. В результате математических преобразований система двух существенно нелинейных уравнений с двумя неизвестными сведена к одному уравнению с одной неизвестной величиной. Тем самым решение двухпараметрической задачи сведено к решению однопараметрической задачи, что означает существенное снижение требований к необходимым вычислительным ресурсам.

Развитый в работе метод представляет собой новый эффективный инструмент в решении задач разделения информативной и шумовой составляющих при обработке данных, подчиняющихся статистическому распределению Райса, в частности, данных магнитно-резонансных и ультразвуковых изображений, обрабатываемых на основе анализа измеряемой величины амплитуды сигнала.

Теоретические выводы работы подтверждаются представленными результатами численных экспериментов, которые демонстрируют возможность вычисления искоемых параметров сигнала ν и шума σ^2 развитым методом с достаточно высокой точностью.

Список литературы (References)

- Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables // Applied Mathematics Series 55. Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. (Russ. ed.: *Abramovic M., Stigan I.* Spravochnik po special'nym funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979.)
- Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — 10-е изд., стер. — М.: Академия, 2005. — 576 с.
Ventsel E. S. Teoriya veroyatnostej [Probability theory]. — 10th edition, ster. — Moscow: Academia, 2005. — 576 p.
- Яковлева Т. В.* Обзор методов обработки магнитно-резонансных изображений и развитие нового двухпараметрического метода моментов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 231–244.
Yakovleva T. V. Obzor metodov obrabotki magnitno-rezonansnykh izobrazhenij i razvitie novogo dvuxparametricheskogo metoda momentov [Review of MRI processing techniques and elaboration of a new two-parametric method of moments] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 2. — P. 231–244 (in Russian).
- Яковлева Т. В.* Определение параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных методом моментов низших нечетных порядков // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 5. — С. 715–726.
Yakovleva T. V. Opredelenie parametrov signala i shuma pri analize raisovskih dannyh metodom momentov nizshih nechetnyh podyadkov [Signal and noise parameters' determination at rician data analysis by method of moments of lower odd orders] // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 8, No. 5. — P. 715–726 (in Russian).
- Яковлева Т. В.* Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 445–473.
Yakovleva T. V. Teoreticheskoe obosnovanie matematicheskikh metodov sovmestnogo otseivaniya parametrov signala i shuma pri analize raisovskih dannyh [Theoretical substantiation of the mathematical techniques for joint signal and noise estimation at rician data analysis] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 445–473 (in Russian).
- Яковлева Т. В.* Теория обработки сигналов в условиях распределения Райса. — М.: Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2015. — 268 с.
Yakovleva T. V. Teoriya obrabotki signalov v usloviyakh raspredeleniya Raisa [A Theory of Signal Processing at the Rice Distribution]. — Moscow: Dorodnicyn Computing Centre, RAS, 2015. — 268 p.
- Яковлева Т. В., Кульберг Н. С.* Методы математической статистики в решении задачи двухпараметрического анализа райсовского сигнала // Доклады Академии наук, серия Математика. — 2014. — Т. 459, № 1. — С. 27–31.
Yakovleva T. V., Kulberg N. S. Metody matematicheskoi statistiki v reshenii zadachi dvukhparametricheskogo analiza raisovskogo signala [Methods of Mathematical Statistics in Two-Parameter Analysis of Rician Signals] // Doklady Mathematics. — 2014. — Vol. 90, No. 3. — P. 1–5.

- Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. — М.: Наука, 1964. — 344 с.
Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsial'nye funktsii: Formuly, grafiki, tablitsy [Special functions: Formulas, Graphs, Tables]. — Moscow: Nauka, 1964. — 344 p.
- Benedict T. R., Soong T. T.* The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // *IEEE Trans. Inf. Theory.* — Jul. 1967. — Vol. IT-13, No. 3. — P. 447–454.
- Carobbi C. F. M., Cati M.* The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement.* — 2008. — Vol. 57, No. 4. — P. 682–689.
- Cover Thomas M.* Elements of Information Theory. — John Wiley and Sons, 2006. — 774 p.
- Davenport W. B., Root W. L.* Random Signals and Noise. — New York: McGraw-Hill, 1958. — P. 158–165.
- Deutsch R.* Estimation Theory. — Englewood Cliifs, NJ: Prentice-Hall, 1965.
- Gudbjartsson H., Patz S.* The Rician distribution of noisy MRI data // *Magn. Reson. Med.* — 1995. — Vol. 34. — P. 910–914.
- He L., Greenshields I. R.* A nonlocal maximum likelihood estimation method for Rician noise reduction in MR images // *IEEE Trans Med Imaging.* — 2009. — Vol. 28. — P. 165–172.
- Papoulis A.* Probability, Random Variables and Stochastic Processes. — 2nd ed. — Tokyo, Japan: McGraw-Hill, 1984.
- Park J. H., Jr.* Moments of generalized Rayleigh distribution // *Q. Appl. Math.* — 1961. — Vol. 19, No. 1. — P. 45–49.
- Port S. C.* Theoretical Probability for Applications. — New York: Wiley, 1994.
- Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise // *Bell System Technical Journal.* — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.
- Sijbers J., den Dekker A. J.* Maximum Likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // *Magn. Reson. Med.* — 2004. — Vol. 51, No. 3. — P. 586–594.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V.* Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // *IEEE Transactions on Medical Imaging.* — June 1998. — Vol. 17, No. 3. — P. 357–361.
- Talukdar K. K., Lawing W. D.* Estimation of the parameters of Rice distribution // *J. Acoust. Soc. Amer.* — Mar. 1991. — Vol. 89, No. 3. — P. 1193–1197.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Methods of Mathematical Statistics in Two-Parameter Analysis of Rician Signals // *Doklady Mathematics.* — 2014. — Vol. 90, No. 3. — P. 1–5.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // *American Journal of Theoretical and Applied Statistics.* — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79.
- Wang T., Lei T.* Statistical analysis of MR imaging and its application in image modeling // *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing and Neural Networks.* — 1994. — Vol. I. — P. 866–870.

