

УДК: 532:5, 533, 519.63

Высокорейнольдсовы расчеты турбулентного теплопереноса в программном комплексе FlowVision

С. В. Жлуктов^а, А. А. Аксёнов, Д. В. Савицкий

Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13

E-mail: ^аsz@flowvision.ru

Получено 04.04.2018, после доработки — 31.05.2018.

Принято к публикации 23.06.2018.

В работе представлена модель тепловых пристеночных функций FlowVision (WFFV), позволяющая моделировать неизоэтермические течения жидкости и газа около твердых поверхностей на относительно грубых сетках с использованием различных моделей турбулентности. Настоящая работа продолжает исследование по разработке модели пристеночных функций, применимой в широком диапазоне значений величины y^+ . Модель WFFV предполагает гладкие профили касательной составляющей скорости, турбулентной вязкости, температуры и турбулентной теплопроводности около твердой поверхности. В работе исследуется возможность использования простой алгебраической модели для вычисления переменного турбулентного числа Прандтля, входящего в модель WFFV в качестве параметра. Результаты удовлетворительные. Обсуждаются особенности реализации модели WFFV в программном комплексе FlowVision. В частности, обсуждается граничное условие для уравнения энергии, используемое в высокорейнольдсовых расчетах неизоэтермических течений. Граничное условие выводится для уравнения энергии, записанного через термодинамическую энтальпию, и для уравнения энергии, записанного через полную энтальпию. Возможности модели демонстрируются на двух тестовых задачах: течение несжимаемой жидкости около пластины и сверхзвуковое течение газа около пластины ($M = 3$).

Анализ литературы показывает, что в экспериментальных данных и, как следствие, в эмпирических корреляциях для числа Стэнтона (безразмерного теплового потока) присутствует существенная неопределенность. Результаты расчетов дают основание полагать, что значения параметров модели WFFV, автоматически задаваемые в программе по умолчанию, позволяют рассчитывать тепловые потоки на твердых протяженных поверхностях с инженерной погрешностью. В то же время очевидно, что невозможно изобрести универсальные пристеночные функции. По этой причине управляющие параметры модели WFFV выведены в интерфейс FlowVision. При необходимости пользователь может настраивать модель на нужный класс течений.

Предлагаемая модель пристеночных функций совместима со всеми реализованными в программном комплексе FlowVision моделями турбулентности: Смагоринского, Спаларта–Аллараса, SST $k-\omega$, $k-\varepsilon$ стандартной, $k-\varepsilon$ Abe Kondoh Nagano, $k-\varepsilon$ квадратичной и $k-\varepsilon$ FlowVision.

Ключевые слова: турбулентный пограничный слой, высокорейнольдсовые расчеты, пристеночные функции, несжимаемая жидкость, сжимаемый газ, неизоэтермическое течение, тепловой поток, пластина

UDC: 532:5, 533, 519.63

High-Reynolds number calculations of turbulent heat transfer in FlowVision software

S. V. Zhlukto^a, A. A. Aksenov, D. V. Savitskiy

Joint Institute for High Temperatures RAS,
13 Izhorskaya str., Moscow, 125412, Russia

E-mail: ^asz@flowvision.ru

Received 04.04.2018, after completion — 31.05.2018.

Accepted for publication 23.06.2018.

This work presents the model of heat wall functions FlowVision (WFFV), which allows simulation of non-isothermal flows of fluid and gas near solid surfaces on relatively coarse grids with use of turbulence models. The work follows the research on the development of wall functions applicable in wide range of the values of quantity y^+ . Model WFFV assumes smooth profiles of the tangential component of velocity, turbulent viscosity, temperature, and turbulent heat conductivity near a solid surface. Possibility of using a simple algebraic model for calculation of variable turbulent Prandtl number is investigated in this study (the turbulent Prandtl number enters model WFFV as parameter). The results are satisfactory. The details of implementation of model WFFV in the FlowVision software are explained. In particular, the boundary condition for the energy equation used in high-Reynolds number calculations of non-isothermal flows is considered. The boundary condition is deduced for the energy equation written via thermodynamic enthalpy and via full enthalpy. The capability of the model is demonstrated on two test problems: flow of incompressible fluid past a plate and supersonic flow of gas past a plate ($M = 3$).

Analysis of literature shows that there exists essential ambiguity in experimental data and, as a consequence, in empirical correlations for the Stanton number (that being a dimensionless heat flux). The calculations suggest that the default values of the model parameters, automatically specified in the program, allow calculations of heat fluxes at extended solid surfaces with engineering accuracy. At the same time, it is obvious that one cannot invent universal wall functions. For this reason, the controls of model WFFV are made accessible from the FlowVision interface. When it is necessary, a user can tune the model for simulation of the required type of flow.

The proposed model of wall functions is compatible with all the turbulence models implemented in the FlowVision software: the algebraic model of Smagorinsky, the Spalart-Allmaras model, the SST $k-\omega$ model, the standard $k-\varepsilon$ model, the $k-\varepsilon$ model of Abe, Kondoh, Nagano, the quadratic $k-\varepsilon$ model, and $k-\varepsilon$ model FlowVision.

Keywords: turbulent boundary layer, high-Reynolds number calculations, wall functions, incompressible fluid, compressible gas, non-isothermal flow, heat flux, plate

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 461–481 (Russian).

Введение

В работах [Жлуктов и др., 2010; Жлуктов, Аксенов, 2015] была представлена модель пристеночных функций FlowVision (WFFV). В этих работах рассматриваются изотермические течения. В них обсуждаются граничное условие для уравнения импульсов на твердой поверхности в турбулентном потоке и алгебраические вычисления, необходимые для его задания в программе вычислительной гидродинамики (ВГД). В настоящей работе рассматривается граничное условие для уравнения энергии, используемое в высокорейнольдсовых расчетах неізотермических течений. Напомним, что пристеночные функции (ПФ) — это предопределенные профили скорости, коэффициента турбулентной вязкости, коэффициента турбулентной теплопроводности, температуры, турбулентной энергии и скорости диссипации турбулентной энергии в части пограничного слоя, непосредственно примыкающей к твердой непроницаемой поверхности (к стенке). ПФ позволяют не разрешать сеткой эту часть пограничного слоя. В модели WFFV профили указанных величин гладкие.

Пристеночные функции калибруются с использованием экспериментальных данных или обобщенных экспериментальных данных (эмпирических корреляций). При этом калибровка ПФ на простых объектах типа пластины часто позволяет получать удовлетворительные результаты для более сложных объектов — см. [Жлуктов, Аксенов, 2015]. Очевидно (по физике), что результаты будут удовлетворительными там, где имеется плоская (или почти плоская) поверхность с развитым турбулентным пограничным слоем (плоскость крыла, корпус корабля и даже винт корабля). Об этом свидетельствуют многочисленные задачи, решенные пользователями FlowVision, — см., например, [Печенюк, 2014; Печенюк, 2017; Aksenov et al., 2017]. В указанных работах моделируются изотермические течения. В настоящей работе решаются две неізотермические задачи: течение несжимаемой воды около пластины и сверхзвуковое течение воздуха около пластины ($M = 3$).

ПК FlowVision используется во многих организациях. В одних организациях проводятся систематические инженерные расчеты. Этим организациям нужна возможность получать результаты с приемлемой точностью, ничего не меняя в интерфейсе FlowVision. В других организациях решаются исследовательские задачи. Специалистам этих организаций нужен максимальный доступ к параметрам моделей — даже к константам стандартной k - ε модели турбулентности. FlowVision предоставляет пользователям доступ к параметрам реализованных моделей турбулентности и пристеночных функций. В то же время результаты проведенного исследования дают основание полагать, что параметры по умолчанию не дадут абсурдных результатов при моделировании турбулентных пограничных слоев, развивающихся на твердых протяженных поверхностях.

В программном комплексе (ПК) FlowVision реализовано 7 моделей турбулентности: алгебраическая модель Смагоринского (см. [Гарбарук и др., 2012]), модель Спаларта–Аллараса (см. [Wilcox, 1994] и [Гарбарук и др., 2012]), модель Shear Stress Transport k - ω (см. [Menter et al., 2003]) и четыре k - ε модели — стандартная (см. [Wilcox, 1994]), AKN [Abe et al., 1994], квадратичная [Lien et al., 1996] и FlowVision [Жлуктов и др., 2014; Жлуктов и др., 2016]. Предлагаемая в настоящей работе модель тепловых ПФ совместима со всеми этими моделями.

ПК FlowVision [Aksenov et al., 1998] основан на конечно-объемном подходе к аппроксимации уравнений, описывающих движение жидкости и газа. Используется автоматическое построение расчетной сетки. Реализованный в ПК метод подсеточного разрешения геометрии позволяет моделировать течения в расчетных областях произвольной формы. Обзор технологий FlowVision представлен в работе [Аксёнов, 2017].

1. Граничное условие для уравнения энергии

В ПК FlowVision реализованы две формы уравнения энергии: уравнение энергии, записанное через термодинамическую энтальпию h (по сути, дифференциальная форма 1-го начала термодинамики)

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla(\rho V h) = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p - \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} S_{ij} + \rho \varepsilon \quad (1)$$

и уравнение энергии, записанное через полную энтальпию H

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla(\rho V H) = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \nabla \cdot \left[(\mu + \mu_t) \left(2\hat{\mathbf{S}} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\hat{\mathbf{I}} \right) \cdot \mathbf{V} \right]. \quad (2)$$

Здесь ρ — плотность, \mathbf{V} — скорость, p — статическое давление, \mathbf{J}_q — тепловой поток, $\hat{\mathbf{t}}$ — тензор вязких напряжений, $\hat{\mathbf{S}}$ — тензор скоростей деформации, \mathbf{g} — ускорение, определяющее все действующие на жидкость/газ внешние объемные силы (в частном случае, ускорение свободного падения), μ — динамический коэффициент молекулярной вязкости, μ_t — динамический коэффициент турбулентной вязкости, $\hat{\mathbf{I}}$ — метрический тензор. Пользователь выбирает нужную форму уравнения энергии соответственно решаемой задаче.

Выберем локальную (связанную со стенкой в данной точке) систему координат (СК) следующим образом: ось y направим по нормали к стенке, ось x направим вдоль касательной составляющей скорости в центре примыкающей к стенке ячейки (далее будем говорить *центр пристенной ячейки*), ось z образует правую локальную СК. Расстояние от стенки до центра пристенной ячейки будем обозначать y_c . Запишем стационарное уравнение энергии через термодинамическую энтальпию:

$$\rho V_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial h}{\partial y} + \rho V_z \frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{\partial J_{q,x}}{\partial x} - \frac{\partial J_{q,y}}{\partial y} - \frac{\partial J_{q,z}}{\partial z} + V_x \frac{\partial p}{\partial x} + V_y \frac{\partial p}{\partial y} + V_z \frac{\partial p}{\partial z} + \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} S_{ij} + \rho \varepsilon, \quad (3)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(2S_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\delta_{ij} \right),$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Пренебрежем конвективными членами и касательными составляющими теплового потока:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{q,y}}{\partial y} &= \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} S_{ij} + \rho \varepsilon, \\ J_{q,y} &= -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь h_i — энтальпия i -го компонента жидкости/газа, $J_{i,y}$ — нормальная составляющая диффузионного потока i -го компонента, λ — коэффициент молекулярной теплопроводности, λ_t — коэффициент турбулентной теплопроводности. Введем обозначение

$$R_h = \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} S_{ij} + \rho \varepsilon.$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[-(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right] = R_h. \quad (5)$$

Интегрирование уравнения (5) от 0 до y_c дает:

$$\left[-(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right]_c - J_{q,y,w} = \langle R_h \rangle y.$$

Здесь $J_{q,y,w}$ — значение теплового потока на стенке, $\langle R_h \rangle$ — интегральное среднее величины R_h на интервале $[0, y_c]$. Выразим производную температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda + \lambda_t} J_{q,y,w} - \frac{y}{\lambda + \lambda_t} \langle R_h \rangle + \frac{1}{\lambda + \lambda_t} \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y}. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения (6) от 0 до y_c дает

$$T_c - T_w = -J_{q,y,w} \int_0^{y_c} \frac{dy}{\lambda + \lambda_t} - \langle R_h \rangle \int_0^{y_c} \frac{y dy}{\lambda + \lambda_t} + \left\langle \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right\rangle \int_0^{y_c} \frac{dy}{\lambda + \lambda_t}. \quad (7)$$

Здесь $\left\langle \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right\rangle$ — интегральное среднее диффузионной составляющей теплового потока на интервале $[0, y_c]$. Введя обозначения

$$J_{T1} = \int_0^{y_c} \frac{dy}{\lambda + \lambda_t}, \quad J_{T2} = \int_0^{y_c} \frac{y dy}{\lambda + \lambda_t}, \quad (8)$$

получаем более компактную запись соотношения (7):

$$T_c - T_w = \left[-J_{q,y,w} + \left\langle \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right\rangle \right] J_{T1} - \langle R_h \rangle J_{T2}. \quad (9)$$

Соотношение (9) определяет профиль температуры на интервале $[0, y_c]$. Из него следует требующееся выражение для теплового потока:

$$J_{q,y,w} = (T_w - T_c) \frac{1}{J_{T1}} - \langle R_h \rangle \frac{J_{T2}}{J_{T1}} + \left\langle \sum_{i=\text{species}} h_i J_{i,y} \right\rangle. \quad (10)$$

Для получения граничного условия для уравнения энергии выражаем температуру в центре пристенной ячейки через термодинамическую энтальпию:

$$T_c = \tilde{T}_c + \frac{1}{C_p(\tilde{T}_c)} (h_c - \tilde{h}_c). \quad (11)$$

Здесь \tilde{T}_c и \tilde{h}_c , соответственно, температура и термодинамическая энтальпия с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации. В случае однокомпонентной жидкости и в случае химически нейтральной стенки последнее слагаемое выражения (10) равно нулю. Если дополнительно пренебречь вязкой диссипацией на интервале $[0, y_c]$, получим наиболее простое

граничное условие для уравнения энергии, решаемого относительно термодинамической энтальпии:

$$J_{q,y,w} = -h_c \frac{1}{C_p(\tilde{T}_c)J_{T1}} + \left(T_w - \tilde{T}_c + \frac{\tilde{h}_c}{C_p(\tilde{T}_c)} \right) \frac{1}{J_{T1}}. \quad (12)$$

При использовании неявного метода для решения уравнения энергии коэффициент $(C_p(\tilde{T}_c)J_{T1})^{-1}$ участвует в формировании матричного коэффициента при термодинамической энтальпии в центре пристенной ячейки.

Запишем стационарное уравнение энергии через полную энтальпию:

$$\begin{aligned} \rho V_x \frac{\partial H}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial H}{\partial y} + \rho V_z \frac{\partial H}{\partial z} = \\ = - \frac{\partial (J_{q,x} - (\hat{\tau} \cdot V)_x)}{\partial x} - \frac{\partial (J_{q,y} - (\hat{\tau} \cdot V)_y)}{\partial y} - \frac{\partial (J_{q,z} - (\hat{\tau} \cdot V)_z)}{\partial z} + \rho V_x g_x + \rho V_y g_y + \rho V_z g_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Пренебрежем конвективными членами и касательными составляющими потока энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (J_{q,y} - (\hat{\tau} \cdot V)_y)}{\partial y} = \rho V_x g_x + \rho V_y g_y + \rho V_z g_z, \\ (\hat{\tau} \cdot V)_y \approx (\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} V_x. \end{aligned}$$

Нормальная составляющая теплового потока $J_{q,y}$ определена выражением (4). Введем обозначение

$$R_H = \rho V_x g_x + \rho V_y g_y + \rho V_z g_z.$$

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[-(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=species} h_i J_{i,y} - (\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} V_x \right] = R_H. \quad (14)$$

Интегрирование уравнения (14) от 0 до y_c дает:

$$\left[-(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=species} h_i J_{i,y} - (\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} V_x \right]_c - J_{q,y,w} = \langle R_H \rangle \cdot y.$$

Выразим производную температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\lambda + \lambda_t} J_{q,y,w} - \frac{y}{\lambda + \lambda_t} \langle R_H \rangle + \frac{1}{\lambda + \lambda_t} \sum_{i=species} h_i J_{i,y} - \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \frac{1}{2} \frac{\partial V_x^2}{\partial y}. \quad (15)$$

Интегрирование уравнения (15) от 0 до y_c дает

$$T - T_w = \left[-J_{q,y,w} + \left\langle \sum_{i=species} h_i J_{i,y,w} \right\rangle \right] J_{T1} - R_H J_{T2} - \left\langle \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \right\rangle \frac{1}{2} V_{x,c}^2. \quad (16)$$

В случае движущейся стенки последний член имеет вид:

$$-\left\langle \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \right\rangle \frac{1}{2} (V_{x,c}^2 - V_{x,w}^2).$$

Интегралы J_{T1} и J_{T2} определены соотношениями (8). Треугольными скобками обозначены интегральные средние значения соответствующих величин на интервале $[0, y_c]$. Выразим тепловой поток из соотношения (16):

$$J_{q,y,w} = (T_w - T_c) \frac{1}{J_{T1}} - R_H \frac{J_{T2}}{J_{T1}} - \left\langle \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \right\rangle \frac{1}{2} V_{x,c}^2 \frac{1}{J_{T1}} + \left\langle \sum_{i=species} h_i J_{i,y,w} \right\rangle. \quad (17)$$

Для получения граничного условия для уравнения энергии нужно выразить температуру в центре пристенной ячейки через полную энтальпию. Если скорость в центре ячейки фиксирована (при интегрировании уравнения энергии в рамках метода расщепления по физическим процессам), то

$$T_c = \tilde{T}_c + \frac{1}{C_p(\tilde{T}_c)} (H_c - \tilde{H}_c). \quad (18)$$

Здесь \tilde{T}_c и \tilde{H}_c , соответственно, температура и полная энтальпия с предыдущего шага по времени или с предыдущей итерации. Наиболее простое граничное условие для уравнения энергии, решаемого относительно полной энтальпии, имеет вид:

$$J_{q,y,w} = -H_c \frac{1}{C_p(\tilde{T}_c) J_{T1}} + \left(T_w - \tilde{T}_c + \frac{\tilde{H}_c}{C_p(\tilde{T}_c)} \right) \frac{1}{J_{T1}} - \left\langle \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \right\rangle \frac{1}{2} V_{x,c}^2 \frac{1}{J_{T1}}. \quad (19)$$

В нем не учитывается диффузионная составляющая потока энергии и работа объемной силы на интервале $[0, y_c]$.

Таким образом, если известен профиль турбулентной теплопроводности $\lambda_t(y)$, то, вычисляя интегралы (8), получаем связь между тепловым потоком на стенке и энтальпией в центре пристенной ячейки. Эта связь используется в качестве граничного условия на стенке для уравнения энергии (1) или (2).

В ПК FlowVision исходное (записанное через температуру) граничное условие для уравнения энергии реализовано в следующем формате:

$$J_{q,y} = a_T (T_w - T_c - b_T). \quad (20)$$

При решении уравнения энергии, записанного через термодинамическую энтальпию,

$$a_T = \frac{1}{J_{T1}}, \quad (21)$$

$$b_T = J_{T2} \left(\sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij} S_{ij} + \rho_c \varepsilon_c \right). \quad (22)$$

При решении уравнения энергии, записанного через полную энтальпию,

$$a_T = \frac{1}{J_{T1}}, \quad (23)$$

$$b_T = \left\langle \frac{\mu + \mu_t}{\lambda + \lambda_t} \right\rangle \frac{1}{2} (V_{x,c}^2 - V_{x,w}^2) - J_{T2} (\rho_c V_{x,c} g_{x,c} + \rho_c V_{y,c} g_{y,c}). \quad (24)$$

В ПК FlowVision также реализованы другие (известные из литературы) способы задания граничного условия для уравнения энергии. Все они записываются в формате (20) с использованием величины

$$T^+ = \frac{\rho C_p u_\tau (T_w - T_c)}{J_{q,y}}.$$

Здесь $u_\tau = \sqrt{\tau_{wx}/\rho}$ — динамическая скорость, τ_{wx} — удельная сила вязкого трения, действующая на стенку. При решении уравнения энергии, записанного через термодинамическую энтальпию,

$$a_T = \frac{\rho C_p u_\tau}{T^+}, \quad (25)$$

$$b_T = 0. \quad (26)$$

При решении уравнения энергии, записанного через полную энтальпию,

$$a_T = \frac{\rho C_p u_\tau}{T^+}, \quad (27)$$

$$b_T = \frac{1}{2} (V_{x,c}^2 - V_{x,w}^2) \frac{\mu_c + \frac{1}{2} \mu_{t,c}}{\lambda_c + \frac{1}{2} \mu_{t,c} \frac{C_{p,c}}{\text{Pr}_{t,c}}} - \frac{\tau_{wx} |V_{x,w}|}{a_T}. \quad (28)$$

В ПК FlowVision величина T^+ вычисляется двумя способами:

$$T^+ = \min(T_{vis}^+, T_{turb}^+) \quad \text{или} \quad T^+ = \exp(\Gamma) \cdot T_{vis}^+ + \exp\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \cdot T_{turb}^+. \quad (29)$$

Здесь [Kader, 1981]

$$\Gamma = -\frac{0.01 \cdot (\text{Pr} \cdot y_\tau^+)^4}{1 + 5 \cdot \text{Pr}^3 y_\tau^+},$$

$\text{Pr} = \mu C_p / \lambda$ — молекулярное число Прандтля. Величина T_{vis}^+ определяет линейный профиль температуры в вязком подслое, непосредственно примыкающем к стенке:

$$T_{vis}^+ = \text{Pr} y_\tau^+.$$

Величина T_{turb}^+ определяет логарифмический профиль температуры в логарифмической части пограничного слоя. В интерфейсе FlowVision пользователь может выбрать один из двух способов вычисления этой величины. Первый взят из [ANSYS Fluent Theory Guide, 2013] (со ссылкой на [Jayatilaka, 1969]):

$$T_{turb}^+ = \text{Pr}_t \left[\frac{1}{\kappa} \ln(E y_\tau^+) + P_{fit} \right], \quad (30)$$

$$P_{fit} = 9.24 \left[\left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left[1 + 0.28 \exp\left(-0.007 \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t}\right) \right],$$

$$\kappa = 0.419, \quad E = 9.$$

Параметры (константы) κ и E выведены в интерфейс FlowVision. При необходимости их можно менять. Второй способ взят из [ANSYS CFX-Solver Theory Guide] (со ссылкой на [Kader, 1981]):

$$T_{turb}^+ = 2.12 \cdot \ln(\text{Pr} y_\tau^+) + [3.85 \cdot \text{Pr}^{1/3} - 1.3]^2. \quad (31)$$

Переходя к термодинамической энтальпии с помощью соотношения (11), для всех реализованных граничных условий получаем:

$$J_{q,y} = a_T \left[\frac{1}{C_p(T_c^n)} h_c^{n+1} + T_w(t^{n+1}) - T_c^n + \frac{1}{C_p(T_c^n)} h_c^n - b_T \right]. \quad (32)$$

Переходя к полной энтальпии с помощью соотношения (18), для всех реализованных граничных условий получаем:

$$J_{q,y} = a_T \left[\frac{1}{C_p(T_c^n)} H_c^{n+1} + T_w(t^{n+1}) - T_c^n + \frac{1}{C_p(T_c^n)} H_c^n - b_T \right]. \quad (33)$$

В выражениях (32) и (33) индексами n и $n + 1$ обозначены два соседних временных слоя. Сравнение выражений для величин a_T и b_T (21)–(24) с выражениями (25)–(31) показывает отличие модели ПФ FlowVision от других моделей.

2. Модель пристеночных функций FlowVision

2.1. Базовая модель

Модель ПФ FlowVision предполагает наличие двух «путей перемешивания». Первый обусловлен пульсациями скорости:

$$l_1 = \kappa_1 y \cdot \left(1 - \exp \left(-y_\tau^+ \frac{1}{A_1} \right) \right),$$

$$y_\tau^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}, \quad u_\tau = \left(\frac{\tau_{wx}}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$\kappa_1 = 0.41, \quad A_1 = 25.$$

Второй «путь перемешивания» обусловлен пульсациями давления

$$l_2 = \kappa_2 y \sqrt{y_p^+} \cdot \left(1 - \exp \left(-y_p^+ \frac{1}{A_2} \right) \right),$$

$$y_p^+ = \frac{\rho u_p y}{\mu}, \quad u_p = \left(\frac{\mu \frac{\partial p}{\partial x}}{\rho^2} \right)^{1/3},$$

$$\kappa_2 = 0.2, \quad A_2 = 13.6.$$

Константы κ_1 , κ_2 , A_1 , A_2 выведены в интерфейс FlowVision.

В области положительного градиента давления общий путь перемешивания определяется соотношением:

$$l^2 = l_1^2 + l_2^2.$$

В области отрицательного градиента давления общий путь перемешивания определяется соотношением:

$$l^2 = \max(l_1^2 - l_2^2, 0).$$

2.2. Турбулентная теплопроводность

Коэффициент турбулентной теплопроводности определяется соотношением [Sebeci, 2004]

$$\lambda_t = C_p \rho l l_h \left| \frac{dV_x}{dy} \right| = C_p \mu_t \frac{l_h}{l} = C_p \frac{\mu_t}{Pr_t}.$$

Здесь l_h — тепловой путь перемешивания, Pr_t — турбулентное число Прандтля:

$$Pr_t = \frac{\mu_t C_p}{\lambda_t} = \frac{l}{l_h}.$$

Динамический коэффициент турбулентной вязкости определяется соотношением [Жлуктов, Аксёнов, 2015]

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial V_x}{\partial y} \right| = \frac{1}{2} \left(-\mu + \mu \sqrt{1 + \frac{4\rho l^2}{\mu^2} \left(\tau_{yx} + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)} \right).$$

Турбулентное число Прандтля является параметром модели. Существуют различные способы его определения. Можно обозначить три уровня сложности в определении турбулентного числа Прандтля: 1) константа, 2) функция турбулентного числа Рейнольдса и молекулярного числа Прандтля, 3) алгебраическое соотношение, использующее молекулярное число Прандтля, турбулентную энергию, скорость диссипации турбулентной энергии, дисперсию температуры и скорость диссипации дисперсии температуры. В последнем случае для дисперсии температуры и скорости ее диссипации решаются дополнительные конвективно-диффузионные уравнения. Следует отметить, что существуют еще более сложные модели, в которых для трех компонент турбулентного теплового потока решаются отдельные конвективно-диффузионные уравнения. В данной работе мы ограничимся первыми двумя уровнями сложности в определении турбулентного числа Прандтля и, как следствие, вычисления турбулентного теплового потока в пристенных ячейках.

2.3. Турбулентное число Прандтля

В работе [Sebesti, 2004] предлагается вычислять турбулентное число Прандтля следующим образом:

$$Pr_t = \frac{\kappa (1 - \exp(-y^+ / A^+))}{\kappa_h (1 - \exp(-y^+ / B_w^+))}.$$

Здесь κ , κ_h , A^+ , B_w^+ — модельные константы:

$$\kappa = 0.4, \quad \kappa_h = 0.44, \quad A^+ = 26.$$

На основе анализа экспериментальных данных для различных жидкостей ($0.02 < Pr < 15$) в работе [Na, Habib, 1973] была получена следующая эмпирическая корреляция для величин B_w^+ :

$$B_w^+ = \frac{B_w^{++}}{\sqrt{Pr}}, \quad B_w^{++} = \sum_{i=1}^5 C_i (\lg Pr)^{i-1},$$

$$C_1 = 34.96, \quad C_2 = 28.79, \quad C_3 = 33.95, \quad C_4 = 6.33, \quad C_5 = -1.186.$$

Утверждается, что применимость модели ограничена несжимаемой жидкостью.

В работе [Myong et al., 1989] для турбулентного числа Прандтля предлагается следующее выражение:

$$Pr_t = 0.75 + \frac{1.63}{\ln(1 + Pr/0.0015)}.$$

Утверждается, что модель хорошо воспроизводит экспериментальные данные для труб с полностью развитой турбулентностью при

$$10^{-2} < Pr < 5 \cdot 10^4 \quad \text{и} \quad 10^4 < Re < 10^5.$$

Отмечается, что для других геометрий модель может давать худшее соответствие с экспериментом.

В работе [Kays, 1994] предлагается выражение

$$Pr_t = 0.85 + \frac{0.7}{Pe_t}, \quad Pe_t = \frac{\mu_t}{\mu} \cdot Pr. \quad (34)$$

В этой же работе предлагается модификация выражения (34), расширяющая диапазон его применимости. Модель не рекомендуется использовать при моделировании ламинарно-турбулентного перехода и для жидкостей с $Pr > 10-20$.

Из литературы известны и другие алгебраические модели для переменного турбулентного числа Прандтля (см. [Jisha, Rieke, 1979; Yakhot, Orszag, 1987; Lin et al., 2000; Kays, Crawford, 1993]).

В настоящей работе рассматривается возможность использования выражения (34) для воды ($Pr = 7$) и для воздуха ($Pr = 0.71$).

3. Обзор известных корреляций

В данном разделе обсуждаются известные эмпирические выражения для числа Стэнтона

$$St_x = \frac{J_{q,y}(x)}{\rho_\infty |V_\infty| C_{p,\infty} (T_\infty - T_w)} \quad (35)$$

и коэффициента трения

$$C_{f,x} = \frac{2|\tau_{wx}(x)|}{\rho_\infty |V_\infty|^2}. \quad (36)$$

Здесь индексом « ∞ » обозначены значения величин в набегающем потоке, индексом « w » — значения на стенке. В эмпирических корреляциях для St_x и $C_{f,x}$ в качестве аргумента используется локальное число Рейнольдса

$$Re_x = \rho_\infty V_\infty x / \mu_\infty$$

и число Прандтля

$$Pr = \mu_\infty C_{p,\infty} / \lambda_\infty.$$

В литературе можно встретить различные выражения $St_x(Re_x, Pr)$ для турбулентного течения около пластины, характеризуемого пренебрежимо малым градиентом давления. В учебнике [Lienhard, 2003] дается выражение

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{1 + 12.8(Pr^{0.68} - 1)\sqrt{C_{f,x} / 2}}. \quad (37)$$

В книге [Исаченко и др., 1975] приводятся вариации соотношения (37):

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{1 + 12(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{C_{f,x} / 2}}, \quad (38)$$

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{0.93 + 12.5(Pr^{2/3} - 1)\sqrt{C_{f,x} / 2}}. \quad (39)$$

В этой книге говорится, что выражение (38) характеризует тепловой поток к пластине при $Pr_t = 1$, а выражение (39) — при $Pr_t = 0.8$. Приведем также корреляцию из книги [Шлихтинг, 1974] для $Pr_t = 1$

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{1 + 5 \left[Pr - 1 + \ln \left[1 + \frac{5}{6} (Pr - 1) \right] \right] \sqrt{C_{f,x} / 2}} \quad (40)$$

и корреляцию из той же книги для переменного турбулентного числа Прандтля:

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{1 + [(Pr - Pr_t) a + 4(1 - Pr_t)] \sqrt{C_{f,x} / 2}}. \quad (41)$$

Функция $a(Pr/Pr_t)$ в этой книге приводится в табличном виде:

Pr/Pr_t	a	Pr/Pr_t	a
0.5	10.22	20	4.10
0.72	9.55	30	3.61
1.44	8.25	100	2.47
2.0	7.66	200	1.98
5	6.04	1000	1.17
10	5.05		

Для воды $Pr = 7$. Если принять $Pr_t \approx Pr_{t,w} \approx 0.9$ [Шлихтинг, 1974], то в результате интерполяции табличных данных получаем $a = 5.49$ и

$$St_x = \frac{C_{f,x} / 2}{1 + [5.49 Pr - 4.54] \sqrt{C_{f,x} / 2}}. \quad (42)$$

Приведем известные выражения $C_f(Re_x)$ для турбулентного безградиентного течения около пластины:

$$C_{f,x} = 0.027 \cdot Re_x^{-1/7}, \quad (43)$$

$$C_{f,x} = \frac{0.455}{[\ln(0.06 Re_x)]^2}, \quad (44)$$

$$C_{f,x} = 0.0592 \cdot Re_x^{-0.2}, \quad (45)$$

$$C_{f,x} = 0.288 \cdot (\lg Re_x)^{-2.45}. \quad (46)$$

Выражения (43) и (44) приводятся в книге [Lienhard, 2003], выражение (45) — в книге [Шлихтинг, 1974], выражение (46) — в работе [Crabtree et al., 1970]. Отметим, что в книге [Семёнов, 2013] корреляция (43) приводится с коэффициентом 0.0263. Также в литературе эта корреляция встречается с коэффициентом 0.0277.

На рис. 1 приведены значения коэффициента трения, определяемые выражениями (43)–(46).

На рис. 2 приведены значения числа Стэнтона для воды, определяемые выражениями (37), (38), (40) с фиксированным выражением для коэффициента трения.

Рис. 3 демонстрирует разброс значений числа Стэнтона, обусловленный неопределенностью коэффициента трения.

Рис. 4 демонстрирует разброс значений числа Стэнтона для $Pr_t \neq 1$.

Приведем также корреляцию для сжимаемого течения воздуха из работы [Crabtree et al., 1970]:

$$St_x = 0.176 (\lg Re_x)^{-2.45}. \quad (47)$$

В работе [DeChant, Smith, 2016] (со ссылкой на [Holman, 1986]) приводится похожая корреляция с разбивкой на 3 диапазона значений локального числа Рейнольдса Re_x :

$$St_x = \begin{cases} 0.332 (Re_x)^{-1/2} Pr^{-2/3}, & Re_x < 5 \cdot 10^5, \\ 0.0296 (Re_x)^{-1/5} Pr^{-2/3}, & 5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7, \\ 0.185 (\lg Re_x)^{-2.584}, & 10^7 < Re_x < 10^9. \end{cases}$$

Таким образом, в эмпирических корреляциях для коэффициента трения и числа Стэнтона присутствует существенная неопределенность.

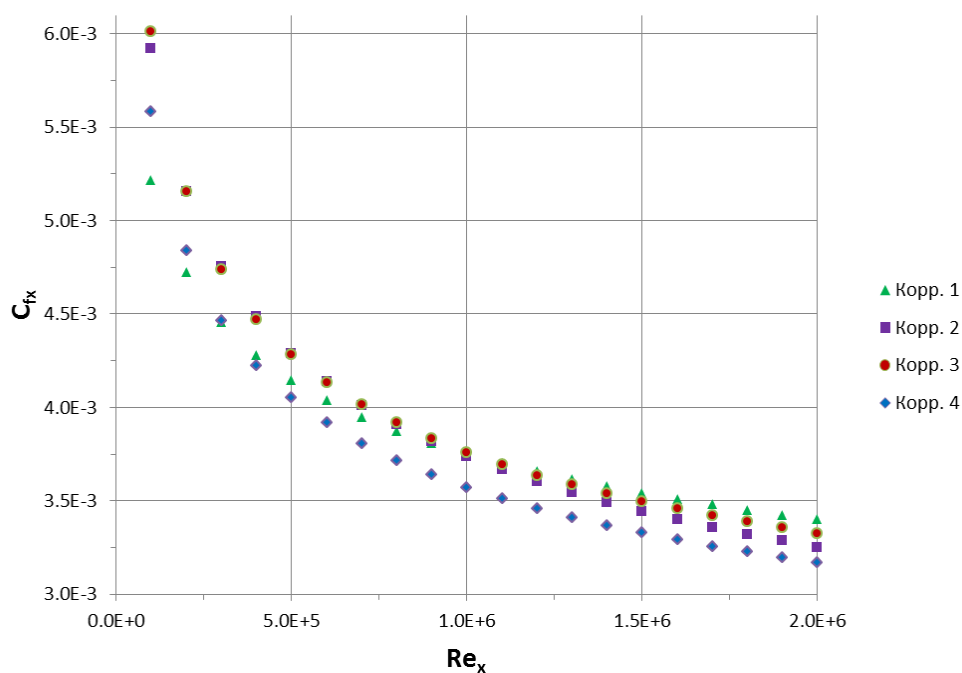


Рис. 1. Известные корреляции для коэффициента трения: «Корр. 1» определена выражением (43), «Корр. 2» — выражением (44), «Корр. 3» — выражением (45), «Корр. 4» — выражением (46)

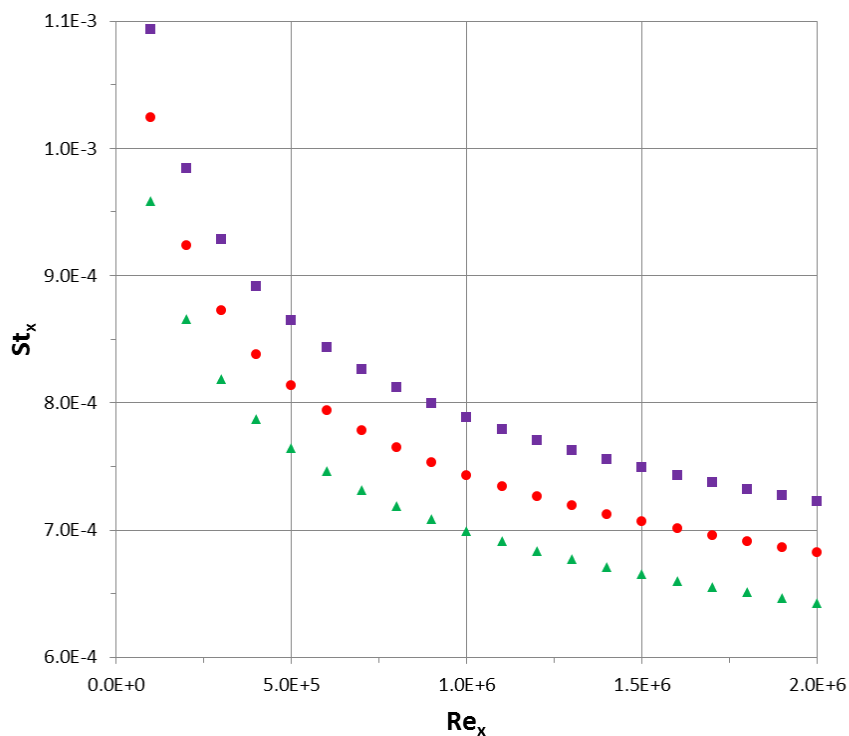


Рис. 2. Известные корреляции для числа Стэнтона (вода), $Pr_t = 1$: «Корр. 1» определена выражением (40), «Корр. 2» — выражением (38), «Корр. 3» — выражением (37). Коэффициент трения определен выражением (44)

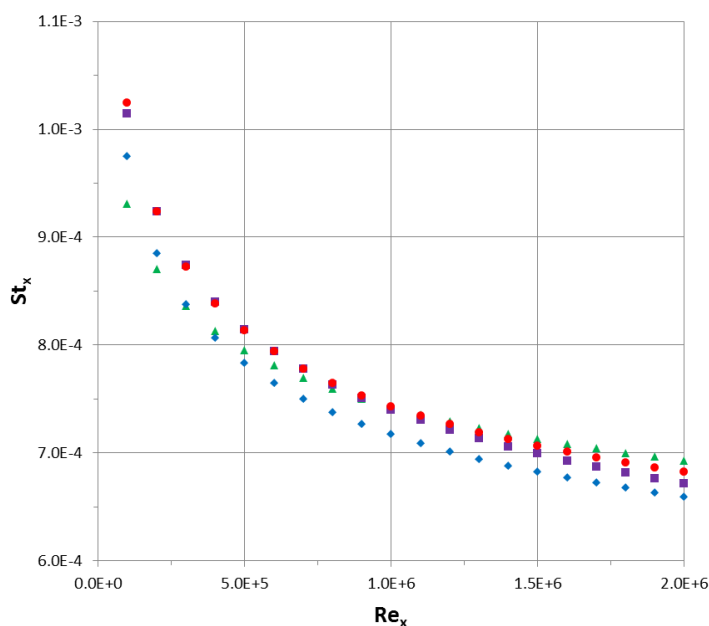


Рис. 3. Известные корреляции для числа Стэнтона (вода), $Pr_t = 1$: «Корр. 1» определена выражением (37), коэффициент трения определен выражением (43); «Корр. 2» определена выражением (37), коэффициент трения определен выражением (44); «Корр. 3» определена выражением (37), коэффициент трения определен выражением (45); «Корр. 4» определена выражением (37), коэффициент трения определен выражением (46)

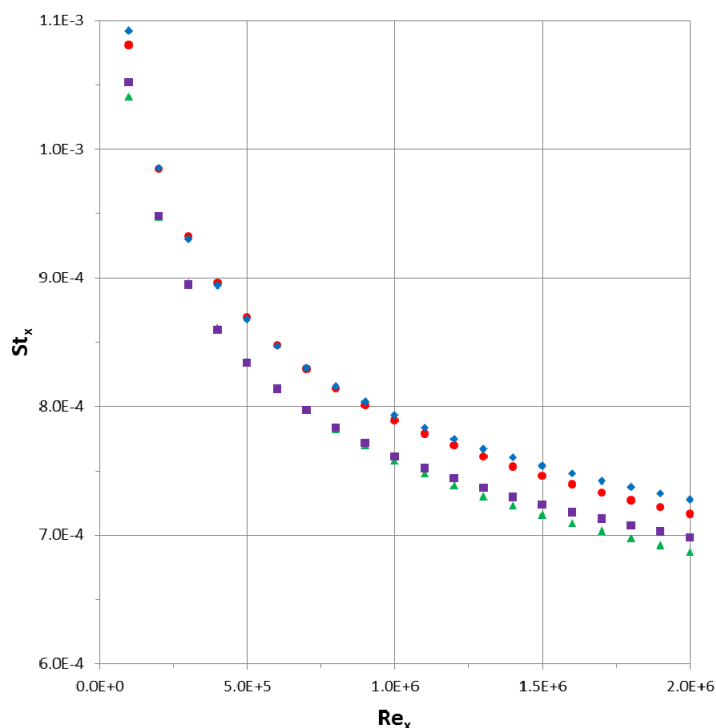


Рис. 4. Известные корреляции для числа Стэнтона (вода), $Pr_t \neq 1$: «Корр. 1» определена выражением (42), коэффициент трения определен выражением (45); «Корр. 2» определена выражением (42), коэффициент трения определен выражением (44); «Корр. 3» определена выражением (39), коэффициент трения определен выражением (45); «Корр. 4» определена выражением (39), коэффициент трения определен выражением (44)

4. Расчеты

4.1. Течение несжимаемой жидкости

Рассматривается турбулентное течение воды около пластины. Длина пластины — 2 м, скорость потока на входе — $1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, абсолютная температура потока на входе — 298.15 К, абсолютная температура поверхности пластины — 318.15 К, абсолютное давление на внешней границе и на выходе — 101 325 Па, интенсивность турбулентности и масштаб турбулентности на входе полагаются равными нулю. Плотность воды — $1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, динамическая вязкость — $10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, теплопроводность — $0.6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, удельная теплоемкость — $4200 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$.

Расчеты проводятся на 4-х сетках. Все сетки равномерно сгущаются к поверхности пластины, к передней и задней кромкам. Сетки характеризуются средним значением величины $y_{\tau}^{+} = \rho_c u_{\tau} V_{x,c} / \mu_c$ на третьей четверти пластины следующим образом:

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Сетка 4
y_{τ}^{+}	105.9	52.4	26.6	13.1

В расчетах используется k - ε модель турбулентности FlowVision, представленная в работах [Жлуктов и др., 2014] и [Жлуктов и др., 2016].

На рис. 5 представлены 2 корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов на 4-х сетках с постоянным турбулентным числом Прандтля. Нумерация корреляций такая же, как на рис. 2. Наблюдается хорошая сеточная сходимость. Результаты расчетов оказываются внутри полосы неопределенности экспериментальных данных.

На рис. 6 представлены 2 корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов на 4-х сетках с турбулентным числом Прандтля, вычисляемым по формуле (34). Нумерация корреляций такая же, как на рис. 4. Наблюдается хорошая сеточная сходимость. На второй половине пластины все представленные на рисунке данные укладываются в полосу шириной 9 %. Дополнительные расчеты показали, что, варьируя (в интерфейсе FlowVision) две константы, входящие в выражение (34), можно приблизить результаты к эмпирическим корреляциям. Рис. 6 показывает, как «работает» оригинальная модель [Kays, 1994].

4.2. Течение сжимаемого газа

Рассматривается турбулентное течение воздуха около пластины. Длина пластины — 1 м, скорость потока на входе — $1044 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, абсолютная температура потока на входе — 300 К, абсолютная температура поверхности пластины — 300 К, абсолютное давление на внешней границе и на выходе — 101 325 Па, интенсивность турбулентности и масштаб турбулентности на входе полагаются равными нулю. Плотность воздуха вычисляется по закону идеального газа, другие свойства воздуха представлены в табличном виде (T , p). Шаг таблиц по температуре — 10 К.

Для течений сжимаемых жидкостей/газов с переменными свойствами определение и корреляции для числа Стэнтона модифицируются [Crabtree et al., 1970]:

$$St_x = \frac{J_{q,y}(x)}{\rho_{\infty} |V_{\infty}| (h_r - h_w)}, \quad St_x = St_{x,i} (Re_x^*, Pr^*) \frac{T_{\infty}}{T^*}.$$

Здесь $St_{x,i}$ — корреляция для несжимаемой жидкости (см. раздел 3),

$$Re_x^* = \rho(T^*) |V_{\infty}| x / \mu(T^*), \quad Pr^* = \mu(T^*) C_p(T^*) / \lambda(T^*).$$

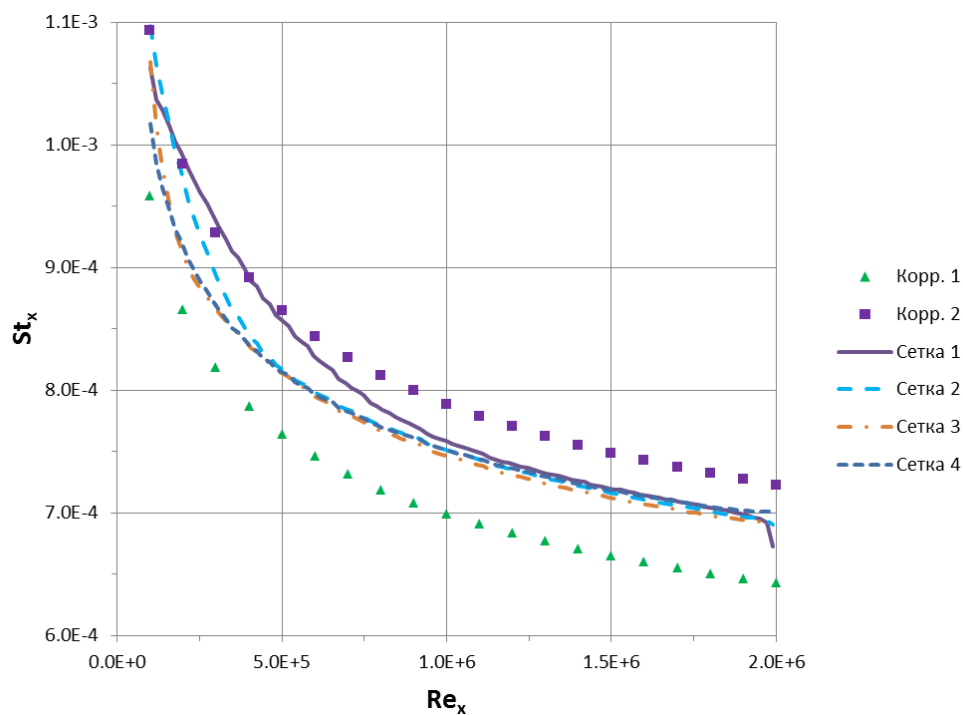


Рис. 5. Корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов (вода), $Pr_t = 1$: «Корр. 1» определена выражением (40), коэффициент трения определен выражением (44); «Корр. 2» определена выражением (38), коэффициент трения определен выражением (44)

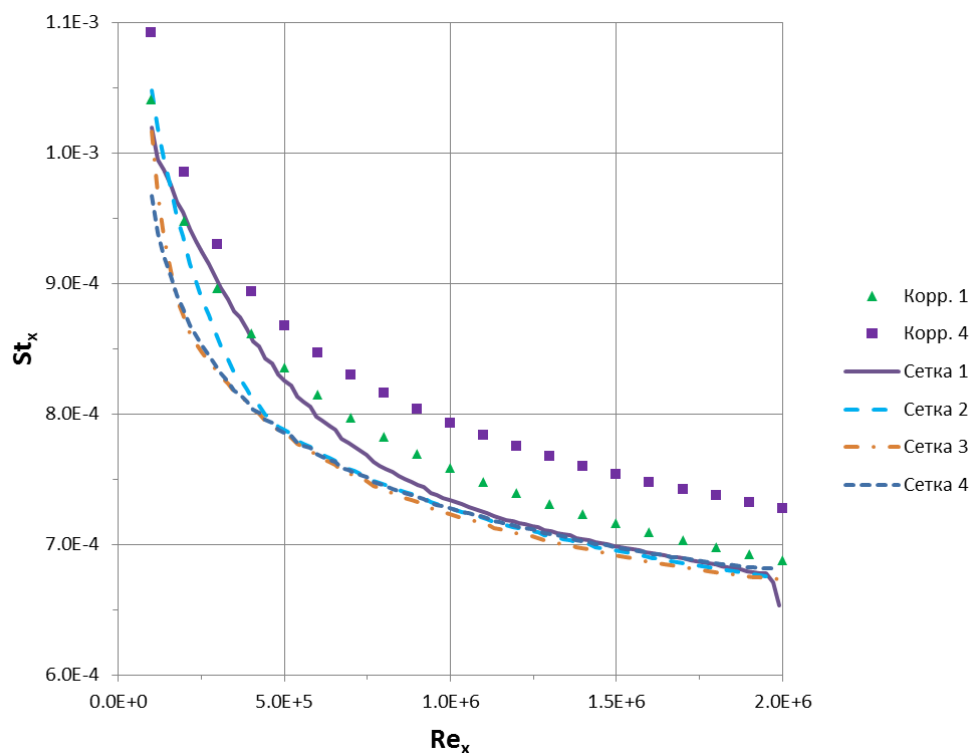


Рис. 6. Корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов (вода), $Pr_t \neq 1$: «Корр. 1» определена выражением (42), коэффициент трения определен выражением (45); «Корр. 4» определена выражением (39), коэффициент трения определен выражением (44)

«Промежуточная» (*intermediate*) температура определяется соотношением:

$$\begin{aligned} h(T^*) &= h_\infty + 0.5(h_w - h_\infty) + 0.22(h_r - h_\infty), \\ h_w &= h(T_w), \quad h_\infty = h(T_\infty), \\ h_r &= h_\infty + \text{Pr}_\infty^{1/3} \frac{V_\infty^2}{2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Отметим, что для ламинарных течений выражение (48) принимает вид [Crabtree et al., 1970]:

$$h_r = h_\infty + \text{Pr}_\infty^{1/2} \frac{V_\infty^2}{2}.$$

Расчеты проводятся на 4-х сетках. Все сетки равномерно сгущаются к поверхности пластины, к передней и задней кромкам. Сетки характеризуются средним значением величины $y_\tau^+ = \rho_c u_\tau V_{x,c} / \mu_c$ на второй половине пластины следующим образом:

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Сетка 4
y^+	133.3	65.9	32.9	16.8

В расчетах используется $k-\varepsilon$ модель турбулентности FlowVision, представленная в работах [Жлуктов и др., 2014; Жлуктов и др., 2016].

На рис. 7 представлены 3 корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов на 4-х сетках с турбулентным числом Прандтля, вычисляемым по формуле (34). На второй половине пластины все представленные на рисунке данные укладываются в полосу шириной 5 %.

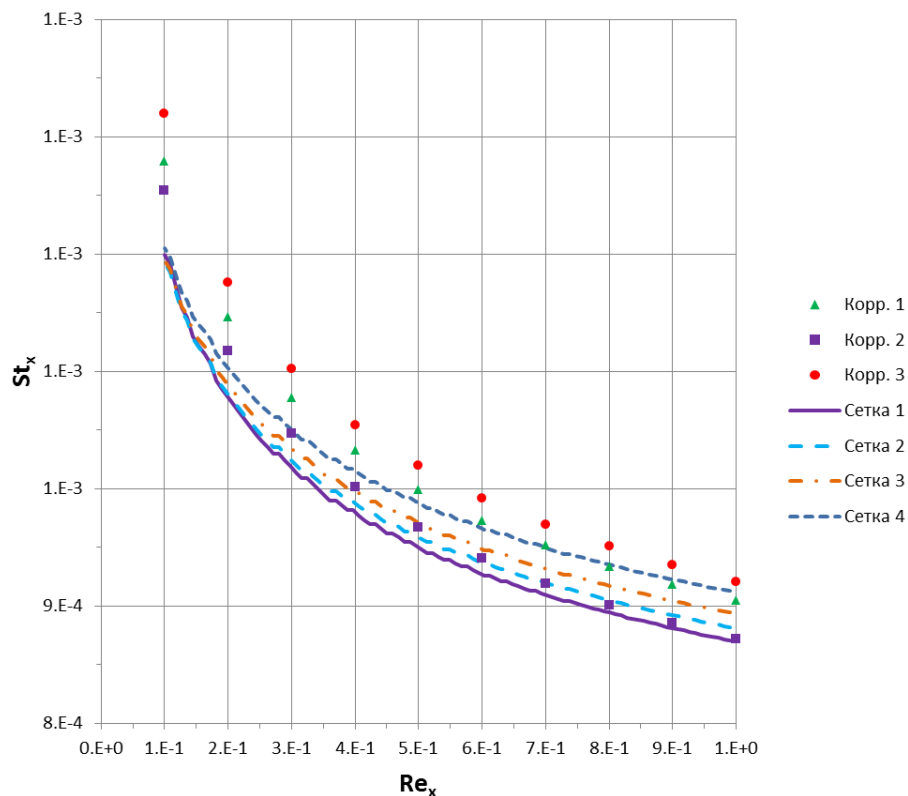


Рис. 7. Корреляции для числа Стэнтона и результаты расчетов (воздух), $\text{Pr}_t \neq 1$: «Корр. 1» определена выражением (47); «Корр. 2» определена выражением (39), коэффициент трения определен выражением (46); «Корр. 3» определена выражением (39), коэффициент трения определен выражением (45)

Выводы

В экспериментальных данных и, как следствие, в эмпирических корреляциях для числа Стэнтона (безразмерного теплового потока) присутствует существенная неопределенность. По этой причине невозможно изобрести универсальные тепловые пристеночные функции (ПФ), позволяющие проводить высокорейнольдсовы расчеты неизотермических течений жидкостей и газов около твердых поверхностей. «Подгоняя» модель ПФ под одни экспериментальные данные, мы увеличиваем расхождение результатов расчетов с другими экспериментальными данными. Очевидно, что современная ВГД программа должна предоставлять пользователю возможность настраивать модель ПФ на определенный класс течений. В ПК FlowVision управляющие параметры (константы) моделей ПФ выведены в интерфейс. В то же время, результаты проведенного в настоящей работе исследования дают основание полагать, что значения параметров модели ПФ FlowVision (WFFV), автоматически задаваемые в программе по умолчанию, позволяют рассчитывать тепловые потоки на твердых протяженных поверхностях с инженерной погрешностью.

Модель WFFV предполагает гладкие профили касательной составляющей скорости, турбулентной вязкости, температуры и турбулентной теплопроводности около твердой поверхности. Поэтому использование этой модели дает хорошие результаты в «буферной» зоне $3 < y_r^+ < 30$.

Особенность реализации модели WFFV состоит в том, что, как таковой, профиль температуры в расчетах не используется. Вместо этого перед решением уравнения энергии в каждой пристенной ячейке численно вычисляются интегралы (8). В этой же процедуре вычисляется среднее отношение эффективной вязкости к эффективной теплопроводности. Найденные величины определяют коэффициенты (21)–(24), которые подставляются в выражение для теплового потока (20). Сам тепловой поток вычисляется после решения уравнения энергии. Если тепловой поток задан, то соотношения (20)–(24) используются для вычисления температуры поверхности.

Следует отметить, что модели ПФ «работают» там, где имеется твердая поверхность достаточно большая для того, чтобы на ней мог развиваться турбулентный пограничный слой. Формальное использование ПФ на малых неровностях твердой поверхности (каверны, выступы) не всегда правомерно.

В настоящей работе была исследована возможность использования простой алгебраической модели для вычисления переменного турбулентного числа Прандтля, входящего в модель ПФ в качестве параметра. Результаты удовлетворительные. Однако надо иметь в виду, что для предсказания распределения температуры около твердой поверхности с неоднородными граничными условиями (например, когда изотермические участки чередуются с адиабатическими) с большой вероятностью потребуется более сложная модель для вычисления турбулентного числа Прандтля (см. [Рогожкин и др., 2014; Аксёнов и др., 2017]).

Список литературы (References)

- Аксёнов А. А. FlowVision: Индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 5–20.
- Aksenov A. A. FlowVision: Industrial'naja vychislitel'naja gidrodinamika [FlowVision: Industrial computational fluid dynamics] // Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye [Computer Research and Modeling]. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 5–20 (in Russian).
- Аксёнов А. А., Жлуктов С. В., Шмелев В. В., Жестков М. Н., Рогожкин С. А., Пахолков В. В., Шепелев С. Ф. Разработка методики расчетного анализа теплогидравлических процессов в реакторе на быстрых нейтронах с применением кода FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 87–94.

- Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Shmelev V. V., Zhestkov M. N., Rogozhkin S. A., Paholkov V. V., Shepelev S. F. Razrabotka metodiki raschetnogo analiza teplogidravlicheskih processov v reaktore na bystryh neitronah s primeneniem koda FlowVision [Development of methodology for computational analysis of thermo-hydraulic processes in fast neutron reactor with use of FlowVision software] // *Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 87–94 (in Russian).
- Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: Учебное пособие. — СПб.: Издательство Политехнического Университета, 2012. — 88 с.
- Garbaruk A. V., Strelets M. Kh., Shur M. L. Modelirovanie turbulentnosti v raschetah slozhnykh techeniy: Text-book. — Saint-Petersburg: Publishing house of Polytechnic University, 2012. — 88 p. (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Харченко С. А., Москалёв И. В., Сушко Г. Б., Шишаева А. С. Моделирование отрывных течений в программном комплексе FlowVision-HPC // *Вычислительные методы и программирование*. — 2010. — Т. 11. — С. 234–245.
- Zhluktov S. V., Aksenov A. A., Kharchenko S. A., Moskalev I. V., Sushko G. B., Shishaeva A. S. Modelirovaniye otryvnykh techeniy v programnom komplekse FlowVision-HPC [Simulation of separating flows in software FlowVision-HPC] // *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Numerical methods and programming]. — 2010. — Vol. 11. — P. 234–245 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Карасёв П. И. Моделирование байпасного ламинарно-турбулентного перехода в рамках k - ϵ подхода // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2014. — Т. 6, № 6. — С. 879–888.
- Zhluktov S. V., Aksenov A. A., Karasev P. I. Modelirovaniye baipasnogo laminarno-turbulentnogo perekhoda v ramkakh k -epsilon podkhoda [Simulation of bypass laminar-turbulent transition within k -epsilon approach] // *Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2014. — Vol. 6, No. 6. — P. 879–888 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А. Пристеночные функции для высокорейнольдсовых расчетов в программном комплексе FlowVision // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2015. — Т. 7, № 6. — С. 1221–1239.
- Zhluktov S. V., Aksenov A. A. Pristenochnye funktsii dlja vysoko-reynoldsovykh raschetov v programnom komplekse FlowVision [Wall functions for high-Reynolds calculations in FlowVision software] // *Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2015. — Vol. 7, No. 6. — P. 1221–1239 (in Russian).
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Карасёв П. И. Моделирование отрывного течения с использованием двухпараметрической модели турбулентности // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 79–88.
- Zhluktov S. V., Aksenov A. A., Karasev P. I. Modelirovaniye otryvnogo techeniya s ispol'zovaniem dvuhparametricheskoj modeli turbulentnosti [Simulation of separation flow using two-parametric turbulence model] // *Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 79–88 (in Russian).
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача: Учебник для вузов. — Изд. 3-е. — М.: Энергия, 1975. — 488 с.
- Isachenko V. P., Osipova V. A., Sukomel A. S. Teploperedacha [Heat transfer]: Textbook for universities. — Ed. No. 3. — Moscow: Energija, 1975. — 488 p. (in Russian).
- Печенюк А. В. Эталонное тестирование ПК FlowVision в задаче моделирования обтекания судна // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2014. — Т. 6, № 6. — С. 890–899.
- Pechenyuk A. V. Etalonnoye testirovaniye PK FlowVision v zadache modelirovaniya obtekanija sudna [Benchmarking of FlowVision software in ship flow simulation] // *Kompjuternye issledovaniya i modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2014. — Vol. 6, No. 6. — P. 890–899 (in Russian).
- Печенюк А. В. Оптимизация судовых обводов для снижения сопротивления движению // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 57–65.
- Pechenyuk A. V. Optimizatsiya sudovykh obvodov dlya snizheniya soprotivleniya dvizheniju [Optimization of a hull form for decreasing ship resistance to movement] // *Kompjuternye Issledovaniya i Modelirovaniye* [Computer Research and Modeling]. — 2017. — Vol. 9, No. 1. — P. 57–65 (in Russian).
- Рогожкин С. А., Аксёнов А. А., Жлуктов С. В., Осипов С. Л., Сазонова М. Л., Фадеев И. Д., Шепелев С. Ф., Шмелев В. В. Разработка модели турбулентного теплопереноса для жидкометаллического натриевого теплоносителя и ее верификация // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2014. — Т. 7, № 3. — С. 306–316.

- Rogozhkin S. A., Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Osipov S. L., Sazonova M. L., Fadeev I. D., Shepelev S. F., Shmelev V. V. Razrabotka modeli turbulentnogo teploperenosa dlja zhidkometallicheskogo teponositelya i ee verifikatsiya [Development of model for turbulent heat transfer in liquid sodium coolant and its verification] // Vychislitel'naja mekhanika sploshnyh sred [Computational mechanics of continuous media]. — 2014. — Vol. 7, No. 3. — P. 306–316 (in Russian).
- Семёнов В. П. Основы механики жидкости: Учебное пособие. — М.: ФЛИНТ, 2013. — 375 с.
Semenov V. P. Osnovy mekhaniki zhidkosti [Principles of fluid mechanics]: Study guide. — Moscow: FLINT, 2013. — 375 p. (in Russian).
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
Schlichting H. Teorija pograničnogo sloja [Boundary layer theory]. — Moscow: Nauka, 1974. — 712 p. (in Russian).
- Abe K., Kondoh T., Nagano Y. A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching flows—I. Flow Field Calculation // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. — 1994. — Vol. 37, No. 1. — P. 139–151.
- Aksenov A., Dyadkin A., Pokhilko V. Overcoming of Barrier between CAD and CFD by Modified Finite Volume Method // Proc. 1998 ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, San Diego, ASME PVP. — 1998. — Vol. 377, No. 2. — P. 79–86.
- Aksenov A. A., Zhluktov S. V., Silaev D. P., Kharchenko S. A., Ilyin V. A., Pechenyuk A. V., Ryabinkin E. A., Velikhov V. E. Investigating the Problems of Ship Propulsion on a Supercomputer // Ivannikov ISPRAS Open Conference 2017. — DOI: 10.1109/ISPRAS.2017.00027. — P. 124–132.
- ANSYS CFX-Solver Theory Guide // ANSYS, Inc., Release 15.0. — November 2013. — 372 p.
- ANSYS Fluent Theory Guide // ANSYS Inc., Release 15.0. — November 2013. — 814 p.
- Cebeci T. Analysis of Turbulent Flows. Second Revised and Expanded Edition. — Elsevier Ltd., 2004. — 376 p.
- Crabtree L. F., Dommett R. L., Woodley J. G., Farnborough R. A. E. Estimation of Heat Transfer to Flat Plates, Cones and Blunt Bodies // Aeronautical Research Council Reports and Memoranda. — London: Her Majesty's Stationery office, 1970. — 59 p.
- DeChant L. J., Smith J. A. Internal (Annular) and Compressible External (Flat Plate) Turbulent Flow Heat Transfer Correlations // Sandia Report SAND2015-Unlimited Release. — January 2016. — 29 p.
- Holman J. P. Heat Transfer. — New York: McGraw-Hill, 1986.
- Jayatilaka C. L. The influence of Prandtl number and surface roughness on the resistance of the laminar sub-layer to momentum and heat transfer // Progress in Heat and Mass Transfer. — 1969. — Vol. 1. — P. 193–330.
- Jisha M., Rieke H. B. About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers from modeled transport equations // Int. Journal Heat and Mass Transfer. — 1979. — Vol. 22. — P. 1547.
- Kader B. A. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1981. — Vol. 24, No. 9. — P. 1541–1544.
- Kays W. M. Turbulent Prandtl Number — Where Are We // Transactions of the ASME. — 1994. — Vol. 116. — P. 284–295.
- Kays W. M., Crawford M. E. Convective heat and mass transfer. — Third Edition. — New York: McGraw-Hill, 1993.
- Lien F. S., Chen W. L., Leschziner M. A. Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relations // Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3, Elsevier. — 1996. — P. 91–100.
- Lienhard J. H. A heat transfer textbook. — 3rd ed. — Cambridge, MA: Phlogiston Press, 2003. — 749 p.
- Lin B. S., Chang C. C., Wang C. T. Renormalization Group Analysis for Thermal Turbulent Transport // Physical Review E. — 2000. — Vol. 63. — P. 16304–16311.

- Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003. — P. 625–632.
- Myong H. K., Kasagi N., Hirata, M.* Numerical prediction of turbulent pipe flow heat transfer for various Prandtl number fluids with the improved k-e turbulence model // *JSME International Journal, Series II*. — 1989. — Vol. 32, No. 4. — P. 613–622.
- Na T. Y., Habib I. S.* Heat Transfer in Turbulent Pipe Flow Based on a New Mixing Length Model // *Applied Science Research*. — 1973. — Vol. 28, No. 4/5.
- Wilcox D. C.* Turbulence modeling for CFD // DCW Industries, Inc., 1994. — 460 p.
- Yakhot V., Orszag S. A.* Heat transfer in Turbulent Fluids Pipe Flow // *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. — 1987. — Vol. 30. — P. 15–22.

