КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 3 С. 335–345
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-335-345

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЫПУСК

УДК: 519.8

Поиск стохастических равновесий в транспортных сетях с помощью универсального прямо-двойственного градиентного метода

А. В. Гасников[1,2,a], М. Б. Кубентаева[2,b]

[1]Институт проблем передачи информации РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1
[2]Московский физико-технический институт,
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

E-mail: [a] gasnikov.av@mipt.ru, [b] kubentayeva-m@yandex.ru

Получено 28.02.2018, после доработки — 18.05.2018.
Принято к публикации 24.05.2018.

В статье рассматривается одна из задач транспортного моделирования — поиск равновесного распределения транспортных потоков в сети. Для описания временны́х издержек и распределения потоков в сети, представляемой с помощью графа, используется классическая модель Бэкмана. При этом поведение агентов не является полностью рациональным, что описывается посредством введения марковской логит-динамики: в каждый момент времени водитель выбирает маршрут случайно согласно распределению Гиббса с учетом текущих временных затрат на ребрах графа. Таким образом, задача сводится к поиску стационарного распределения для данной динамики, которое является стохастическим равновесием Нэша – Вардропа в соответствующей популяционной игре загрузки транспортной сети. Так как данная игра является потенциальной, эта задача эквивалентна минимизации некоторого функционала от распределения потоков, причем стохастичность проявляется в появлении энтропийной регуляризации. Для полученной задачи оптимизации построена двойственная задача. Для ее решения применен универсальный прямо-двойственный градиентный метод. Его особенность заключается в адаптивной настройке на локальную гладкость задачи, что особенно важно при сложной структуре целевой функции и невозможности априорно оценить гладкость с приемлемой точностью. Такая ситуация имеет место в рассматриваемой задаче, так как свойства функции сильно зависят от транспортного графа, на который мы не накладываем сильных ограничений. В статье приводится описание алгоритма, в том числе подробно рассмотрено применение численного дифференцирования для вычисления значения и градиента целевой функции. В работе представлены теоретическая оценка времени работы алгоритма и результаты численных экспериментов на примере небольшого американского города.

Ключевые слова: модель Бэкмана, равновесие Нэша – Вардропа, универсальный метод подобных треугольников, выпуклая оптимизация

Работа поддержана грантами Президента РФ МК-1806.2017.9, МД-1320.2018.1.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2018 VOL. 10 NO. 3 P. 335–345
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-3-335-345

Ки&М

SPECIAL ISSUE

UDC: 519.8

Searching stochastic equilibria in transport networks by universal primal-dual gradient method

A. V. Gasnikov[1,2,a], M. B. Kubentayeva[2,b]

[1]The Institute for Information Transmission Problems RAS,
19 Bolshoy Karetny per., build. 1, Moscow, 127051, Russia
[2]Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

E-mail: [a] gasnikov.av@mipt.ru, [b] kubentayeva-m@yandex.ru

Received 28.02.2018, after completion — 18.05.2018.
Accepted for publication 24.05.2018.

We consider one of the problems of transport modelling — searching the equilibrium distribution of traffic flows in the network. We use the classic Beckman's model to describe time costs and flow distribution in the network represented by directed graph. Meanwhile agents' behavior is not completely rational, what is described by the introduction of Markov logit dynamics: any driver selects a route randomly according to the Gibbs' distribution taking into account current time costs on the edges of the graph. Thus, the problem is reduced to searching of the stationary distribution for this dynamics which is a stochastic Nash – Wardrope equilibrium in the corresponding population congestion game in the transport network. Since the game is potential, this problem is equivalent to the problem of minimization of some functional over flows distribution. The stochasticity is reflected in the appearance of the entropy regularization, in contrast to non-stochastic case. The dual problem is constructed to obtain a solution of the optimization problem. The universal primal-dual gradient method is applied. A major specificity of this method lies in an adaptive adjustment to the local smoothness of the problem, what is most important in case of the complex structure of the objective function and an inability to obtain a prior smoothness bound with acceptable accuracy. Such a situation occurs in the considered problem since the properties of the function strongly depend on the transport graph, on which we do not impose strong restrictions. The article describes the algorithm including the numerical differentiation for calculation of the objective function value and gradient. In addition, the paper represents a theoretical estimate of time complexity of the algorithm and the results of numerical experiments conducted on a small American town.

Keywords: Beckman's model, Nash – Wardrop equilibrium, universal similar triangles method, convex optimization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 335–345 (Russian).

This work was supported by grants MK-1806.2017.9, MD-1320.2018.1.

Постановка задачи

Рассмотрим модель Бэкмана равновесного распределения потоков в транспортной сети [Баймурзина и др., 2018; Гасников и др., 2013]. Сеть представляется в виде ориентированного графа $\langle V, E\rangle$, где V — множество вершин, E — множество ребер; $OD \subset V^2$ — множество пар $w = (i, j)$ «источник–сток», d_w — корреспонденция, отвечающая паре w; затраты на прохождение ребра $e \in E$ описываются функцией $\tau_e(f_e)$, где f_e — поток по данному ребру. Через P_w будем обозначать множество путей из i в j, где $w = (i, j)$, и через $P = \bigcup_{w \in OD} P_w$ — множество всех возможных путей для корреспонденций OD.

Поведение агентов описывается марковской логит-динамикой в повторяющейся игре загрузки транспортной сети [Sandholm, 2010]. Пусть единице потока отвечает $M \gg 1$ агентов. Пусть всего имеется TN шагов игры: T периодов, каждый из которых разбит на $N \gg 1$ частей. Каждый агент на шаге $t + 1 \in \{1, 2, \ldots, TN\}$ независимо от остальных выбирает путь $p \in P_w$ с вероятностью

$$\frac{\lambda}{N}\frac{\exp(-G_p^t/\gamma)}{\sum\limits_{q \in P_w}\exp(-G_q^t/\gamma)},$$

где G_p^t — затраты на пути p на шаге t, а с вероятностью $1-\dfrac{\lambda}{N}$ — тот же путь, который использован на шаге t.

Такая динамика отражает ограниченную рациональность агентов и часто используется в популяционной теории игр [Sandholm, 2010] и теории дискретного выбора [Andersen et al., 1992]. При $N \to \infty$ данная динамика превращается в марковскую динамику в непрерывном времени, которая имеет предельное (стационарное) распределение при $T \to \infty$. В свою очередь, с ростом числа агентов ($M \to \infty$) это распределение концентрируется у наиболее вероятного состояния, которое называется стохастическим равновесием Нэша–Вардропа и может быть найдено как решение следующей оптимизационной задачи [Баймурзина и др., 2018]:

$$F(f, x) = \sum_{e \in E}\sigma_e(f_e) + \gamma\sum_{w \in OD}\sum_{p \in P_w} x_p \ln\left(\frac{x_p}{d_w}\right) \to \min_{f = \Theta x, x \in X}.$$

Здесь x_p — поток по пути p; $\gamma > 0$ — параметр, отвечающий за ограниченную рациональность агентов;

$$\sigma_e(f_e) = \int\limits_0^{f_e}\tau_e(z)\,dz \text{ — выпуклые функции,}$$

$$\Theta = \left\|\delta_{ep}\right\|_{e \in E, p \in P}, \ \delta_{ep} = \mathbb{I}\{e \in p\},$$

$$X = \left\{x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \ w \in OD\right\} \text{ — прямое произведение симплексов.}$$

В качестве $\tau_e(f_e)$ выбрана BPR-функция (обычно берется $\mu = 0.25$) [Ortúzar, Willumsen, 2011; Patriksson, 1994; Гасников и др., 2014]:

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e\left(1 + \rho\left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}},$$

где $\bar{t}_e$ — время прохождения ребра при свободном движении, $\bar{f}_e$ — максимальная пропускная способность ребра.

Заметим, что при $\gamma \to +0$ распределение потока по путям вырождается, и все агенты действуют полностью рационально, т. е. используют только кратчайшие пути.

Переход к двойственной задаче

Запишем переход к двойственной задаче [Гасников и др., 2016; Гасников и др., 2014]:

$$\begin{aligned}
\min_{f=\Theta x, x\in X} F(f,x) &= \min_{f,x\in X}\left[F(f,x) + \sup_t t^T(\Theta x - f)\right] = \\
&= \min_{f,x\in X}\sup_t\left[F(f,x) + t^T(\Theta x - f)\right] = \sup_t \min_{f,x\in X}\left[F(f,x) + t^T(\Theta x - f)\right] = \\
&= \sup_t\left[-\sum_{e\in E}\max_{f_e}(t_e f_e - \sigma_e(f_e)) + \min_{x\in X}\sum_p \gamma x_p\Big(\ln\frac{x_p}{d_w} + \frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E} t_e\delta_{ep}x_p\Big)\right] = \\
&= \max_{t\in\mathrm{dom}\,\sigma^*} -\left[\sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e) + \gamma\psi(t/\gamma)\right],
\end{aligned}$$

где $\mathrm{dom}\,\sigma^*$ — область определения сопряженной к σ функции;

$$\psi(t) = \sum_{w\in OD} d_w\psi_w(t),\ \psi_w(t) = \ln\left(\sum_{p\in P_w}\exp\left(-\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)\right).$$

Для данной выше BPR-функции имеем

$$\sigma_e^*(t_e) = \bar{f}_e\left(\frac{t_e - \bar{t}_e}{\bar{t}_e\rho}\right)^{\mu}\frac{(t_e - \bar{t}_e)}{1+\mu}.$$

Таким образом, решение исходной задачи сводится к решению двойственной задачи:

$$Q(t) = \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e) + \gamma\psi(t/\gamma) \longrightarrow \min_{t\in\mathrm{dom}\,\sigma^*}.$$

При этом значения потоков на ребрах и распределение потоков по путям можно выразить через двойственную переменную t:

$$f = -\nabla\gamma\psi(t/\gamma), \qquad x_p = d_w\frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)}{\sum_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{eq}t_e\right)}, \quad p\in P_w.$$

Также отметим, что в качестве критерия остановки для алгоритма будет выбрано условие на зазор двойственности $D\left(f^{(N)}, x^{(N)}, t^{(N)}\right) = F\left(f^{(N)}, x^{(N)}\right) + Q\left(t^{(N)}\right)$.

Алгоритм численного решения

Универсальный метод подобных треугольников

Ниже, согласно [Баймурзина и др., 2018], изложен возможный способ решения двойственной задачи, позволяющий при этом восстанавливать решение прямой задачи, исходя из подхода, описанного в [Nesterov, 2009; Nemirovski et al., 2010]. Итоговая задача выпуклой композитной оптимизации на множестве простой структуры:

$$\tilde{Q}(t) = \underbrace{\Phi(t)}_{\gamma\psi(t/\gamma)} + \underbrace{h(t)}_{\sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e)} \longrightarrow \min_{t\in\mathrm{dom}\,\sigma^*}.$$

Обозначим квадрат расстояния начального значения параметра до решения данной задачи через $R^2 = \frac{1}{2}\|t^* - y^0\|^2$, где $y^0 = \bar{t}$, t^* — решение задачи (если решение не единственно, то выбирается то, которое доставляет минимум $\|t^* - y^0\|^2$).

Пусть $L_\nu \leq \infty$ (то есть допускается равенство бесконечности) выбрано так, что выполнено неравенство [Nesterov, 2005; Nesterov, 2013]

$$\|\nabla\Phi(t) - \nabla\Phi(y)\|_2 \leq L_\nu \|t - y\|_2^\nu, \ \nu \in [0, 1], \quad L_0 < \infty.$$

Положим

$$\phi_0(t) = \alpha_0 \left[\Phi(y^0) + \left\langle \nabla\Phi(y^0), t - y^0 \right\rangle + h(t) + \frac{1}{2}\left\|t - y^0\right\|_2^2\right],$$

$$\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t) + \alpha_{k+1}\left[\Phi(y^{k+1}) + \left\langle \nabla\Phi(y^{k+1}), t - y^{k+1} \right\rangle + h(t)\right].$$

Приведем описание универсального метода подобных треугольников (УМПТ) [Гасников, Нестеров, 2018]:

$k = 0:$

$$A_0 = \alpha_0 = \frac{1}{L_0^0}, \ j_0 = 0, \ t^0 = u^0 = \operatorname{argmin}_{t\in \operatorname{dom}\sigma^*} \phi_0(t);$$

$k = 1, 2, \ldots :$

1. $L_{k+1}^0 = L_k^k/2, \ j_{k+1} = 0;$

2. $$\begin{cases} \alpha_{k+1} := \dfrac{1}{2L_{k+1}^{j_{k+1}}} + \sqrt{\dfrac{1}{4\left(L_{k+1}^{j_{k+1}}\right)^2} + \dfrac{A_k}{L_{k+1}^{j_{k+1}}}}, \ A_{k+1} := A_k + \alpha_{k+1}, \\ y^{k+1} := \dfrac{\alpha_{k+1}u^k + A_k t^k}{A_{k+1}}, \ u^{k+1} := \operatorname{argmin}_{t\in \operatorname{dom}\sigma^*} \phi_{k+1}(t), \\ t^{k+1} := \dfrac{\alpha_{k+1}u^{k+1} + A_k t^k}{A_{k+1}}. \end{cases}$$

До тех пор, пока

$$\Phi(y^{k+1}) + \left\langle \nabla\Phi(y^{k+1}), t^{k+1} - y^{k+1} \right\rangle + \frac{L_{k+1}^{j_{k+1}}}{2}\left\|t^{k+1} - y^{k+1}\right\|_2^2 + \frac{\alpha_{k+1}}{2A_{k+1}}\varepsilon < \Phi(t^{k+1}),$$

выполнять $j_{k+1} := j_{k+1} + 1, \ L_{k+1}^{j_{k+1}} = 2^{j_{k+1}} L_{k+1}^0$.

3. Критерий остановки: $D(f^{(k)}, x^{(k)}, t^{(k)}) < \varepsilon D(f^{(1)}, x^{(1)}, t^{(1)})$.

Верхняя оценка на число итераций, согласно [Баймурзина и др., 2018; Гасников, Нестеров, 2018], равна

$$N = O\left(\inf_{\nu\in[0,1]} \left(\frac{L_\nu R^{1+\nu}}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{1+3\nu}}\right). \tag{1}$$

При этом имеется следующая оценка на константу Липшица:

$$L_1 \leq \frac{H}{\gamma} \sum_{w\in OD} d_w. \tag{2}$$

Вычисление (суб-)градиентов функций

Согласно распределению Гиббса вероятность выбора пути, длина которого сильно превосходит длину кратчайшего, будет очень мала, и поэтому вклад таких маршрутов можно не учитывать. Таким образом, будем рассматривать только те пути, число ребер которых не больше некоторой величны $H = O(\operatorname{diam} G)$. В частности, для манхэттенской транспортной сети $H = O(\sqrt{n})$.

Введем классы путей: P^l_{ij} — множество всех путей из i в j, состоящих ровно из l ребер, $\tilde{P}^l_{ij}$ — множество всех путей из i в j, состоящих из не более чем l ребер. Зафиксируем источник (вершину) $i \in V$ и введем следующие функции для $j \in V$, $l = 1, \ldots, H$:

$$\begin{cases} a^l_{ij}(t) = \gamma\psi_{P^l_{ij}}(t/\gamma) = \gamma \ln\left(\sum\limits_{p\in P^l_{ij}} \exp\left(-\sum\limits_{e\in E}\delta_{ep}t_e/\gamma\right)\right), \\ b^l_{ij}(t) = \gamma\psi_{\tilde{P}^l_{ij}}(t/\gamma) = \gamma \ln\left(\sum\limits_{p\in \tilde{P}^l_{ij}} \exp\left(-\sum\limits_{e\in E}\delta_{ep}t_e/\gamma\right)\right). \end{cases}$$

Некоторые из этих функций могут быть равны $-\infty$. Это означает, что соответствующее множество маршрутов пустое. Данные функции можно вычислять рекурсивным образом:

$$a^1_{ij}(t) = b^1_{ij}(t) = \begin{cases} -t_e, e = (i \to j) \in E, \\ -\infty, e = (i \to j) \notin E; \end{cases}$$

для $j \in V, l = \overline{1, H-1}$

$$\begin{cases} a^{l+1}_{ij}(t) = \gamma \ln\left(\sum\limits_{k:e=(k\to j)\in E} \exp\left(\left(a^l_{ik}(t) - t_e\right)/\gamma\right)\right), \\ b^{l+1}_{ij}(t) = \gamma\ln\left(\exp\left(b^l_{ij}(t)/\gamma\right) + \exp\left(a^{l+1}_{ij}(t)\right)\right). \end{cases}$$

На каждом шаге l необходимо сделать $O(n)$ арифметических операций. Следовательно, для вычисления $\gamma\psi(t/\gamma)$ необходимо сделать $O(SHn)$ арифметических операций, где S — число источников (как правило, можно считать $S \ll n$). Причем вычисление функции $\gamma\psi(t/\gamma)$ (и ее градиента) можно проводить параллельно на S процессорах.

Используя быстрое автоматическое дифференцирование [Ким и др., 1984], опишем способ вычисления градиента функции $\gamma\psi^i(t/\gamma) = \sum\limits_{j:w=(i,j)\in OD} d_w\gamma\psi_w(t/\gamma)$:

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial b^H_{ij}} = d_{ij}, \qquad \frac{\partial\psi^i}{\partial a^H_{ij}} = 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi^i}{\partial b^l_{ij}} = \dfrac{\partial\psi^i}{\partial b^{l+1}_{ij}}\dfrac{\partial b^{l+1}_{ij}}{\partial b^l_{ij}}, \ j \in V, \ l = \overline{H-1, 1}, \\ \dfrac{\partial\psi^i}{\partial a^l_{ij}} = \dfrac{\partial\psi^i}{\partial b^l_{ij}}\dfrac{\partial b^l_{ij}}{\partial a^l_{ij}} + \sum\limits_{k:e=(j\to k)\in E} \dfrac{\partial\psi^i}{\partial a^{l+1}_{ik}}\dfrac{\partial a^{l+1}_{ik}}{\partial a^l_{ij}}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial\psi^i}{\partial t_e} = \sum_{l=0}^{H-1}\frac{\partial\psi^i}{\partial a^{l+1}_{ij}}\frac{\partial a^l_{ij}}{\partial t_{e=(k,j)}}.$$

Таким образом, для вычисления градиента $\gamma\psi(t/\gamma) = \sum\limits_{i\in O}\gamma\psi^i(t/\gamma)$ требуются время $O(SHn)$ и память $O(SHn)$. Так же как и при вычислении значения функции $\gamma\psi(t/\gamma)$, описанная выше схема вычисления градиента может быть распараллелена на S процессорах.

Критерий остановки

Положим

$$f^k = -\nabla\gamma\psi(y^k/\gamma), \qquad x_p^k = d_w \frac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum\limits_{e\in E}\delta_{ep}y_e^k\right)}{\sum\limits_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum\limits_{e\in E}\delta_{eq}y_e^k\right)}, \qquad p\in P_w, \quad w\in OD,$$

$$\bar{f}^N = \frac{1}{A_N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k f^k, \qquad \bar{x}^N = \frac{1}{A_N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k x^k.$$

Тогда оценка сверху на зазор двойственности $D(\bar{f}^N,\bar{x}^N,t^N) = F(\bar{f}^N,\bar{x}^N) - Q(t^N) \geq 0$ выглядит следующим образом [Баймурзина и др., 2018]:

$$D(\bar{f}^N,\bar{x}^N,t^N) = \left\{\sum_{e\in E}\sigma_e\left(\bar{f}_e^N\right) + \gamma\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}\bar{x}_p^N\ln(\bar{x}_p^N/d_w)\right\} + \left\{\gamma\psi\left(t^N/\gamma\right) + \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e^N)\right\} \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{e\in E}\sigma_e\left(\bar{f}_e^N\right) + \gamma\frac{1}{A^N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\sum_{w\in OD}\sum_{p\in P_w}x_p^k\ln(x_p^k/d_w)\right\} + \left\{\gamma\psi\left(t^N/\gamma\right) + \sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e^N)\right\}.$$

Последнее выражение эффективно вычисляется и поэтому будет использовано в критерии остановки для оценки сверху на зазор двойственности.

Перейдем к описанию вычисления суммы $\sum\limits_{p\in P_w} x_p^k\ln(x_p^k/d_w)$, $w = (i,j) \in OD$. Для этого вначале введем вспомогательную переменную $\tilde{x}_p(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum\limits_{e\in E}\delta_{ep}t_e\right)}{C}$, $x_p = d_w\tilde{x}_p$, где C — нормировочная константа, равная $\sum\limits_{q\in P_w}\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\sum\limits_{e\in E}\delta_{eq}t_e\right) = \exp\left(\frac{b_{ij}^H}{\gamma}\right)$.

$$\sum_{p\in P_w}\tilde{x}_p\ln\tilde{x}_p = \sum_{p\in P_w}\tilde{x}_p\left(-\frac{1}{\gamma}\sum_{e\in E}\delta_{ep}t_e - \frac{b_{ij}^H}{\gamma}\right) = \left[\sum_{p\in P_w}\tilde{x}_p = 1\right] = -\frac{1}{\gamma}\left(b_{ij}^H + \sum_{e\in E}t_e\sum_{p\in P_w}\delta_{ep}\tilde{x}_p\right).$$

Тогда

$$\sum_{p\in P}x_p\ln\left(x_p/d_w\right) = \sum_{w\in OD}d_w\sum_{p\in P_w}\tilde{x}_p\ln\tilde{x}_p = -\frac{1}{\gamma}\left(\sum_{w\in OD}d_w b_{ij}^H + \sum_{e\in E}t_e\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p\right) =$$

$$= \left[\sum_{p\in P}\delta_{ep}x_p = f_e(t)\right] = -\frac{1}{\gamma}\left(\underbrace{\sum_{w\in OD}d_w b_{ij}^H}_{\Phi(t)} + \langle t, f\rangle\right).$$

Учитывая, что $f = -\nabla\Phi(t)$, получаем

$$\gamma\sum_{p\in P}x_p\ln\left(x_p/d_w\right) = -\Phi(t) + \langle t, \nabla\Phi(t)\rangle.$$

Эксперименты

Численные эксперименты проведены на данных небольшого американского города Анахайм [URL: https://github.com/bstabler/TransportationNetworks]: 416 вершины, 914 ребер и 104,694.40 корреспонденций.

На рис. 1 показано, как меняется решение с ростом γ в сравнении с наилучшим известным решением [URL: https://github.com/bstabler/TransportationNetworks] для предельного случая $\gamma \to +0$. Результаты для последних трех графиков представлены в логарифмической шкале по обеим осям. На рис. 2 представлена зависимость числа итераций от параметра γ, на рис. 3 — от точности ε. Как видим, в обоих случаях имеются схожие степенные зависимости с порядком меньшим $1/2$, что согласуется с теоретическими оценками (1) и (2). На рис. 4 показана зависимость абсолютной величины зазора двойственности от номера итерации. Видим, что в какой-то момент скорость сходимости резко повышается и что сходимость не является монотонной.

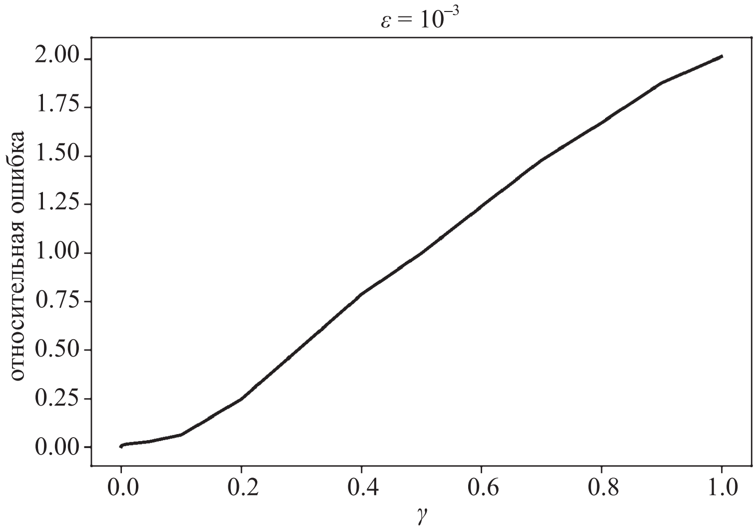

Рис. 1. Зависимость $\|f - f^*\|_1/\|f^*\|_1$ от γ при относительной точности $\epsilon = 10^{-3}$

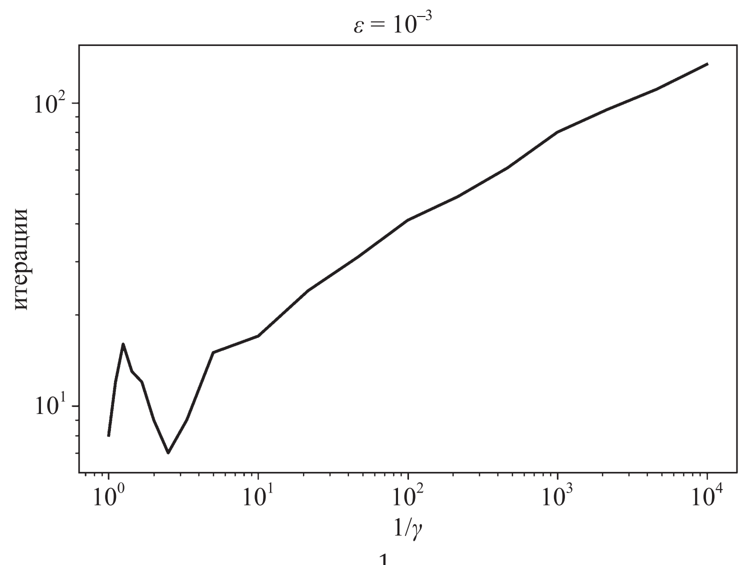

Рис. 2. Зависимость числа итераций от $\dfrac{1}{\gamma}$ при относительной точности $\epsilon = 10^{-3}$

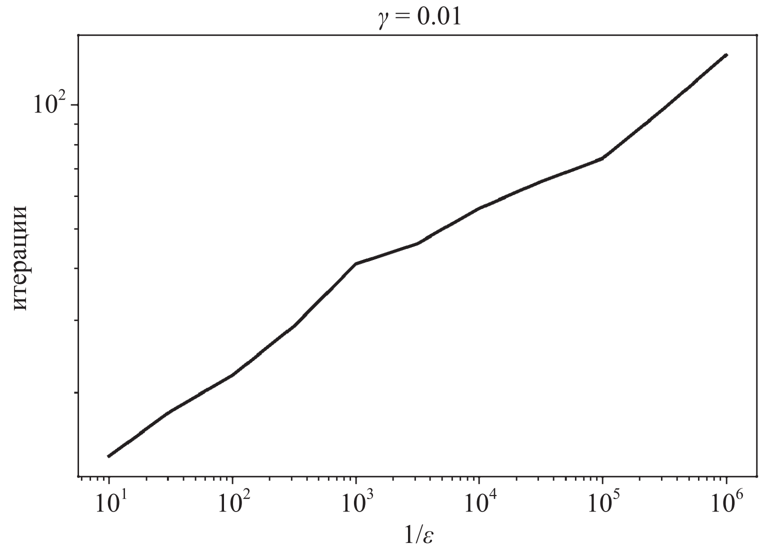

Рис. 3. Зависимость числа итераций от относительной точности при $\gamma = 0.01$

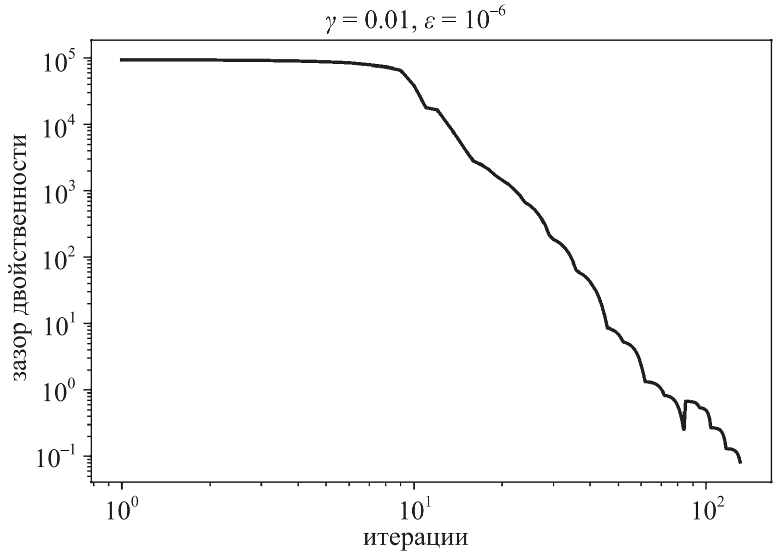

Рис. 4. Зависимость абсолютной величины зазора двойственности от номера итерации при $\gamma = 0.01$ и относительной точности $\epsilon = 10^{-6}$

Заключение

Мы рассмотрели классическую модель Бэкмана равновесного распределения потоков в случае, когда вводится с помощью марковской логит-динамики ограниченная рациональность агентов (появляется один новый параметр γ). Как видим, в таком случае к потенциалу $\sum\limits_{e \in E} \sigma_e(f_e)$ добавляется энтропийный член с параметром γ. Минимизация такой функции должна осуществляться по переменной x, описывающей распределение потоков по всем возможным путям $P = \bigcup\limits_{w \in OD} P_w$ для корреспонденций OD, то есть размерность x равна $\|P\|$ (это число растет экспоненциально от количества ребер в графе). Но при переходе к двойственной задаче решается задача минимизации по двойственному параметру t, размерность которого равна количеству ребер в транспортном графе, и при этом искомые значения потоков на ребрах f можно выразить через данный параметр.

Для решения данной двойственной задачи использовали универсальный прямо-двойственный метод подобных треугольников. Его особенность заключается в адаптивной настройке на локальную гладкость задачи, что особенно важно при сложной структуре целевой функции и невозможности априорно оценить гладкость с приемлемой точностью. Такая ситуация имела место в нашей задаче, так как свойства функции сильно зависят от транспортного графа, на который мы не накладывали сильных ограничений.

Подробно рассмотрели применение численного дифференцирования для вычисления значения и градиента целевой функции. И наконец, представили результаты численных экспериментов для данной задачи на примере небольшого американского города. Как видим, время работы алгоритма не противоречит теоретической оценке. Разность с точным решением для нестохастического случая растет пропорционально γ.

Список литературы (References)

Баймурзина Д. Р., Гасников А. В., Гасникова Е. В., Двуреченский П. Е., Ершов Е. И., Кубентаева М. Б., Лагуновская А. А. Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях // ЖВМ и МФ. — 2018. — Т. 58.

Baimurzina D. R., Gasnikov A. V., Gasnikova E. V., Dvurechensky P. E., Ershov E. I., Kubentaeva M. B., Lagunovskaya A. A. Universalnyi metod poiska ravnovesii i stohasticheskih ravnovesii v transportnyh setyah [Universal similar triangulars method for searching equilibriums in traffic flow distribution models] // ZhVM & MF [Comp. Math. & Math. Phys.]. — 2018. — Vol. 58 (in Russian).

Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Дорн Ю. В., Максимов Ю. В. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и модели стабильной динамики // Математическое моделирование, 2016. — Т. 28, № 10. — С. 40–64.

Gasnikov A. V., Dvurechenskiy P. E., Dorn Yu. V., Maksimov Yu. V. Chislennyye metody poiska ravnovesnogo raspredeleniya potokov v modeli Bekmana i modeli stabilnoy dinamiki [Searching equillibriums in Beckmann's and Nesterov–de Palma's models] // Matematicheskoye modelirovaniye [Mathematical modelling]. — 2014. — Vol. 28, No. 10. — P. 40–64 (in Russian).

Гасников А. В., Дорн Ю. В., Нестеров Ю. Е, Шпирко С. В. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26:6. — С. 34–70.

Gasnikov A. V., Dorn Yu. V., Nesterov Yu. E., Shpirko S. V. O trekhstadiynoy versii modeli statsionarnoy dinamiki transportnykh potokov [On the three-stage version of stable dynamic model] // Matematicheskoye modelirovaniye [Mathematical modelling]. — 2014. — Vol. 26:6. — P. 34–70 (in Russian).

Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. — М.: МЦНМО, 2013. — 427 с., 2-е изд. — URL: http://www.mou.mipt.ru/gasnikov1129.pdf

Gasnikov A. V., Klenov S. L., Nurminskiy E. A., Kholodov Ya. A., Shamray N. B. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye transportnykh potokov [Introduction to mathematical modeling of transport flows]. — Moscow: MTSNMO, 2013. — P. 427. Ed. no. 2. — URL: http://www.mou.mipt.ru/gasnikov1129.pdf (in Russian).

Гасников А. В., Нестеров Ю. Е. Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизаци // ЖВМ и МФ. — 2018. — Т. 58, № 1. — С. 51–68.

Gasnikov A. V., Nesterov Yu. E. Universalnyi metod poiska ravnovesii i stohasticheskih ravnovesii v transportnyh setyah [Universal fast gradient method for stochastic composite optimization problems] // ZhVM & MF [Comp. Math. & Math. Phys.]. — 2018. — Vol. 58, No. 1. — P. 51–68 (in Russian).

Ким К., Нестеров Ю., Скоков В., Черкасский Б. Эффективные алгоритмы для дифференцирования и задачи экстремали // Экономика и математические методы. — 1984. — Т. 20. — С. 309–318.

Kim K., Nesterov Yu., Skokov V., Cherkasskii B. Effectivnye algoritmy dlya differencirovaniya i zadachi ekstremali [Effective algorithms for differentiation and extremal problem] // Ekonomika i matematicheskie metody [Economics & Mathematical Methods]. — 1984. — Vol. 20. — P. 309–318 (in Russian).

Andersen S. P., de Palma A., Thisse J. Discrete choice theory of product differentiation. — MIT Press; Cambridge, 1992.

Ben Stabler. Transportation Networks [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/bstabler/TransportationNetworks

Meruza Kubentayeva. Transportation network programms [Электронный ресурс]. — URL: https://github.com/MeruzaKub/TransportNet

Nemirovski A., Onn S., Rothblum U. G. Accuracy certificates for computational problems with convex structure // Mathematics of Operation Research. — 2010. — Vol. 35, No. 1. — P. 52–78.

Nesterov Yu. Gradient methods for minimizing composite functions // Math. Prog. — 2013. — Vol. 140, No. 1. — P. 125–161.

Nesterov Yu. Primal-dual subgradient methods for convex problems // Math. Program. Ser. B. — 2009. — Vol. 120, No. 1. — P. 261–283.

Nesterov Yu. Smooth minimization of non-smooth function // Math. Program. Ser. A. — 2005. — Vol. 103, No. 1. — P. 127–152.

Ortúzar J. D., Willumsen L. G. Modelling transport. — JohnWilley & Sons, 2011.

Patriksson M. The traffic assignment problem. Models and methods. — Utrecht, Netherlands: VSP, 1994.

Sandholm W. Population games and Evolutionary dynamics. Economic Learning and Social Evolution. — MIT Press; Cambridge, 2010.