

УДК: 330.4.51-77

## Моделирование динамики экономических систем с неопределенными параметрами

**Л. Е. Варшавский**

Центральный экономико-математический институт РАН,  
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: hodvar@yandex.ru

*Получено 01.11.2017, после доработки — 16.02.2018.  
Принято к публикации 14.03.2018.*

В статье проводится краткий анализ разработанных робастных методов управления, а также исследование практических аспектов их использования для управления экономическими системами с неопределенными параметрами. Рассматриваются особенности использования разработанных методов управления системами при наличии структурированной неопределенности применительно к задачам стабилизации цены на мировом рынке нефти, а также инфляции в макроэкономических системах. В первом случае с использованием специально разработанной модели ставится задача определения такого управления, которое обеспечивает минимальное отклонение цены нефти от желаемого уровня. Во втором случае решается задача формирования стабилизирующего управления, обеспечивающего в среднесрочной перспективе минимальное отклонение инфляции от желаемого уровня (на основе агрегированной макроэкономической модели среднесрочного развития США).

В результате вычислительных экспериментов найдены предельные уровни неопределенности параметров и законы обратной связи, при которых используемый в работе подход обеспечивает стабилизируемость реальных экономических систем. Проведенные расчеты показывают, что полученные оценки предельных уровней неопределенности параметров являются достаточно консервативными. С помощью метода статистических испытаний исследуется динамика цены на нефть, а также показателя инфляции в условиях найденных предельных уровней неопределенности параметров при использовании рассчитанных робастных законов управления, в случае наихудшего и наилучшего сценариев. Полученные результаты показывают, что рассчитанные робастные законы управления могут быть успешно применены и при большей степени неопределенности параметров исследуемых моделей, чем гарантируется при найденных предельных уровнях неопределенности.

Ключевые слова: экономические системы, стабилизация, робастные методы, неопределенные параметры, структурированная неопределенность

UDC: 330.4.51-77

## Uncertainty factor in modeling dynamics of economic systems

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS,  
47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

E-mail: hodvar@mail.ru

*Received 01.11.2017, after completion — 16.02.2018.*

*Accepted for publication 14.03.2018.*

Analysis and practical aspects of implementing developed in the control theory robust control methods in studying economic systems is carried out. The main emphasis is placed on studying results obtained for dynamical systems with structured uncertainty. Practical aspects of implementing such results in control of economic systems on the basis of dynamical models with uncertain parameters and perturbations (stabilization of price on the oil market and inflation in macroeconomic systems) are discussed. With the help of specially constructed aggregate model of oil price dynamics studied the problem of finding control which provides minimal deviation of price from desired levels over middle range period. The second real problem considered in the article consists in determination of stabilizing control providing minimal deviation of inflation from desired levels (on the basis of constructed aggregate macroeconomic model of the USA over middle range period).

Upper levels of parameters uncertainty and control laws guaranteeing stabilizability of the real considered economic systems have been found using the robust method of control with structured uncertainty. At the same time we have come to the conclusion that received estimates of parameters uncertainty upper levels are conservative. Monte-Carlo experiments carried out for the article made it possible to analyze dynamics of oil price and inflation under received limit levels of models parameters uncertainty and under implementing found robust control laws for the worst and the best scenarios. Results of these experiments show that received robust control laws may be successfully used under less stringent uncertainty constraints than it is guaranteed by sufficient conditions of stabilization.

Keywords: economic systems, stabilization, robust methods, uncertain parameters, structured uncertainty

## 1. Введение

Одна из главных принципиальных проблем управления развитием экономических систем связана с наличием неопределенности как о свойствах самих систем, так и о действующих на них возмущениях. Фактор неопределенности в полной мере присутствует при использовании эконометрических моделей для управления и прогнозирования таких систем. Ориентация на использование эконометрических моделей с усредненными оценками параметров при проведении прогнозных исследований и выработке стратегий может приводить к нежелательной динамике экономических показателей (например, к галопирующей инфляции вследствие неустойчивости возмущенной системы).

Следует, однако, отметить, что для решения практических задач управления и прогнозирования динамики экономических систем обычно используются модели, описываемые, как многие технические системы управления с дискретным временем, линейными разностными уравнениями. Применительно к исследованию технических систем в последние 30–40 лет были разработаны робастные методы, позволяющие обеспечить приемлемое качество управления при неполной информации о системах и действующих на них возмущениях. Эти методы и подходы могут быть в ряде случаев адаптированы к исследованию динамики экономических систем, характеризующихся, однако, большей изменчивостью во времени.

В настоящей статье проводится краткий анализ разработанных робастных методов, а также исследование практических аспектов их использования для управления экономическими системами с неопределенными параметрами. Рассматриваются особенности использования разработанных методов управления системами при наличии структурированной неопределенности применительно к задачам стабилизации цены на мировом рынке нефти, а также уровня инфляции в экономике развитых стран.

## 2. Стабилизация систем с неопределенными коэффициентами

К настоящему времени опубликовано значительное число работ, посвященных робастному управлению систем с неопределенными параметрами и возмущениями, которые опираются на метод функций Ляпунова и идейно близки к теории систем с переменной структурой [Емельянов, 1967] или теории динамических игр [Basar, Bernhard, 1995]. Для линейных систем с неопределенными параметрами

$$X_{t+1} = (A + \Delta A(\sigma_t))X_t + (B + \Delta B(\sigma_t))u_t + E\xi_t, \quad (1)$$

где  $X_t$  — вектор переменных,  $u_t$  — управление,  $\xi_t$  — вектор внешних возмущений,  $A$  и  $B$  — матрицы соответствующей размерности, связанные с номинальной системой,  $\Delta A(\sigma_t)$  и  $\Delta B(\sigma_t)$  — матрицы, связанные с неопределенными параметрами системы ( $\sigma_t$  характеризует неопределенность), рассматривались случаи неструктурированной и структурированной неопределенности.

### 2а. Системы с неструктурированной неопределенностью

При этом варианте неопределенности, который рассматривался в серии работ 1970-х — начала 1990-х гг., неопределенность характеризуется в самом общем виде, например в виде ограничения на нормы матриц  $\Delta A(\sigma_t)$  и  $\Delta B(\sigma_t)$  (см., например, [Shen, Kung, 1990]). В большом числе этой серии работ предполагалось выполнение условия стабилизируемости номинальной системы и так называемого условия согласованности (matching condition; см., в частности, [Gutman, 1979; Corless, Leitmann, 1981; Zak, 1988]), т. е.

$$\Delta A(\sigma_t) = BC(\sigma_t), \quad E = BD, \quad (2)$$

где  $C(\sigma_t)$  и  $D$  — некоторые матрицы соответствующей размерности. С учетом (2) исходное соотношение (1) можно переписать в виде

$$X_{t+1} = AX_t + B(u_t + e(X_t, \sigma_t)), \quad (1a)$$

где

$$\Delta A(\sigma_t) + E\xi_t = B(C(\sigma_t)X_t + D\xi_t) = Be(X_t, \sigma_t). \quad (3)$$

При условии ограничения на норму возмущения  $e(X_t, \sigma_t)$ ,

$$\|e(X_t, \sigma_t)\| \leq \gamma_1 \|X_t\| + \gamma_2 = \gamma \|X_t\|, \quad (4)$$

показано, что стабилизирующее управление с обратной связью имеет релейный вид. Частным видом такого управления является следующее [Chen, 2000]:

$$u_t = \left\{ \begin{array}{l} \frac{-B'PAX_t}{\|B'PAX_t\|} \alpha \gamma(X_t), \quad \text{если } \|B'PAX_t\| > \varepsilon \\ \frac{-B'PAX_t}{\varepsilon} \alpha \gamma(X_t), \quad \text{если } \|B'PAX_t\| \leq \varepsilon \end{array} \right\}, \quad (5)$$

где  $P > 0$  — стабилизирующая матрица для номинальной системы, т. е.

$$APA - P = -Q < 0, \quad (6)$$

матрица  $Q > 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $\varepsilon > 0$  — подбираемые параметры (выше под нормами векторов и матриц понимаются соответственно евклидова и спектральная нормы).

Следует, однако, отметить, что условие согласованности (2) во многих практически важных случаях не выполняется. Кроме того, часто закон управления (5) приводит к резким изменениям управляющей переменной (возникает так называемый эффект дребезжания (chattering)), что ограничивает его использование на практике.

## 2b. Системы со структурированной неопределенностью

При структурированной неопределенности матрицы, связанные с неопределенными параметрами системы, представимы в виде произведения других матриц:

$$(\Delta A, \Delta B) = (E_1, E_2)F(D_1, D_2), \quad (7)$$

где  $F'F \leq I$ ,  $I$  — единичная матрица. В частном случае, когда  $D_1 = D$ ,  $E_1 = E$ , а  $D_2$  — нулевая матрица ( $D_2 = 0$ ), в [Garcia et al., 1994] показано, что система (1) с неопределенностью (7) квадратично стабилизируема линейной обратной связью  $u_t = -Kx_t$  тогда и только тогда, когда существуют  $\varepsilon > 0$  и положительно-определенная матрица  $P > 0$ , удовлетворяющие алгебраическому уравнению Риккати

$$A'(P^{-1} + BR^{-1}B' - \varepsilon DD')^{-1}A - P + \varepsilon^{-1}E'E + Q = 0 \quad (8)$$

и ограничению

$$\varepsilon^{-1}I - D'PD > 0, \quad R > 0, \quad Q > 0. \quad (9)$$

<sup>1</sup> Система (1) является квадратично-стабилизируемой, если существуют закон управления в форме линейной обратной связи  $u_t = -Kx_t$ , положительно-определенная матрица  $P > 0$  и константа  $\alpha_2$  такие, что для всех  $X_t$  и  $t$ , а также неопределенностей  $F$ , удовлетворяющих (7) и  $F'F \leq I$ , выполняется неравенство  $X_t'(A + \Delta A + BK)'P(A + \Delta A + BK)X_t - X_t'PX_t \leq -\alpha \|X_t\|^2$  (см. [Garcia et al., 1994]).

При этом матрица обратной связи  $K$  имеет следующий вид:

$$K = R^{-1}B'(P^{-1} + BR^{-1}B' - \varepsilon DD')^{-1}A. \quad (10)$$

Можно также показать (см. [Garcia et al., 1994]), что для системы с неопределенностью (7) справедлива следующая оценка сверху на величину квадратичной целевой функции с весовыми матрицами  $Q > 0$  и  $R > 0$ , входящими в (8):

$$\min_{u_t} \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} [X_t' Q X_t + u_t' R u_t] \leq X_0' P X_0. \quad (11)$$

В упомянутой работе показано также, что если при некоторых  $Q > 0$ ,  $R > 0$  и  $\varepsilon^* > 0$  существует положительное решение уравнения Риккати (8), то для любых положительно-определенных матриц  $Q_1 > 0$  и  $R_1 > 0$  существует такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что уравнение Риккати (8), в котором  $Q > 0$  и  $R > 0$  заменены на  $Q_1 > 0$  и  $R_1 > 0$ , имеет положительно-определенное решение для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ .

Там же предложен алгоритм определения стабилизирующего управления, состоящий из 3 этапов. На первом этапе подбираются матрицы  $Q > 0$  и  $R > 0$ , а также начальное значение  $\varepsilon_0$ . На втором этапе исследуется существование решения уравнения Риккати (8), удовлетворяющего неравенству (9). При положительном исходе может быть использован закон управления (10). В противном случае следует перейти к третьему этапу, состоящему в последовательном уменьшении  $\varepsilon_0$ , например в 2 раза, и возвращении к этапу 2 (в случае неуспеха). В случае когда значение  $\varepsilon_i = \varepsilon_0 * 2^{-i}$  достигнет предельной точности компьютера, расчеты следует прекратить и признать безрезультатными.

Для решения алгебраического уравнения Риккати может быть применен метод, основанный на применении преобразования Шура к матрице Гамильтона расширенной системы [Laub, 1979]:

$$H = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}(BR^{-1}B' - \varepsilon DD') \\ (Q + 1/\varepsilon * E'E)A^{-1} & A' + (Q + 1/\varepsilon * E'E)A^{-1}(BR^{-1}B' - \varepsilon DD') \end{pmatrix} \quad (12)$$

и далее на использовании собственных векторов преобразованной матрицы для вычисления решения уравнения Риккати (8).

Другой способ основан на использовании итерационной процедуры для получения установившегося решения  $P > 0$  разностного уравнения Риккати:

$$P_{t+1} = A'(P_t^{-1} + BR^{-1}B' - \varepsilon DD')A + \varepsilon^{-1}E'E + Q. \quad (8a)$$

В случае стабилизируемой невозмущенной (номинальной) системы (1), т. е. при  $\Delta A = \Delta B = D_1 = E_1 = 0$ , а также при выполнении некоторых других необременительных условий, в работе [Stoorvogel, Weeren, 1994, p. 691] рекомендована следующая последовательность расчетов: на первом этапе вычисляется решение уравнения Риккати для линейного квадратичного регулятора  $P_{LQR}$  (т. е. при отсутствии возмущений), на втором этапе определяется установившееся решение уравнения (8a)  $P > 0$  при начальном значении  $P_0 = P_{LQR}$ .

### 3. Практические аспекты стабилизации систем с неопределенными коэффициентами

Опыт использования рассмотренного выше подхода к учету структурированной неопределенности вида (7) показывает высокую чувствительность матриц  $K$  в (10), определяющих за-

кон управления, к выбору начального значения параметра  $\varepsilon_0$ . Во многих случаях при использовании метода Шура [Laub, 1979] уменьшение  $\varepsilon_i$  приводит к тому, что собственные значения матрицы Гамильтона (12) оказываются лежащими на единичной окружности в комплексной плоскости, что, как правило, не позволяет далее проводить вычисления. Поэтому более предпочтительным представляется использовать итерационную процедуру поиска положительно-определенного решения уравнения Риккати (8) или неравенства

$$A'(P^{-1} + BR^{-1}B' - \varepsilon DD')^{-1}A - P + \varepsilon^{-1}E'E + Q \leq 0, \quad (8b)$$

выполнение которого, наряду с (9), является достаточным условием стабилизируемости системы (1) с неопределенностью (7) (см., например, [Коган, 1999]). При этом матрица  $Q$  может быть и положительно-полуопределенной, т. е. достаточно положить  $Q \geq 0$ .

Изложенный подход к управлению системами при наличии структурированной неопределенности рассматривается ниже применительно к задачам стабилизации цены на мировом рынке нефти, а также уровня инфляции в экономике развитых стран (на примере экономики США).

#### 4. Модель стабилизации цены на мировом рынке нефти

В связи со значительной волатильностью цены на нефть на мировом рынке члены нефтяного картеля ОПЕК предпринимают попытки стабилизации цены путем согласованного сокращения объемов добычи нефти и вводимых мощностей. Стабильные и достаточно высокие цены на нефть, являющуюся одним из главных источников дохода для стран, входящих в картель, могли бы повысить эффективность управления экономикой этих стран и тем самым способствовать их успешному экономическому развитию. Одно из успешных соглашений по ограничению добычи нефти в странах-членах ОПЕК с целью стабилизации цены вступило в силу в конце 2016 г. (к нему присоединились и ряд других стран, в том числе и Россия).

Следует отметить, что одним из неперенных условий успешной разработки и реализации планов согласованного сокращения объемов добычи нефти с целью стабилизации ее цены является наличие адекватной модели динамики показателей мирового рынка нефти. Вместе с тем при построении и использовании такой модели следует учитывать следующие факторы неопределенности, которые влияют на качество прогнозов показателей рынка нефти [Варшавский, 2003; Варшавский, 2011]:

- неполнота информации о показателях рынка нефти, в частности об объемах добычи нефти и величине добываемых мощностей в ОПЕК;
- наличие большого числа «шумовых» и шоковых возмущений, связанных с действием плохо предсказуемых факторов (биржевое ценообразование, политические события, несоблюдение дисциплины нефтедобычи в ОПЕК, действия крупных нефтяных компаний, природно-климатические изменения и т. д.);
- изменение режимов функционирования рынка и, как следствие, изменение во времени параметров модели.

Рассмотренный в подпараграфе 2b подход к учету неопределенности может быть полезен при разработке стратегии стабилизации цены на рынке товарных продуктов, и, в частности, на рынке нефти. С целью демонстрации возможности его применения в настоящей статье на основе данных компании «Бритиш Петролеум» (сокр. BP) за 2005–2016 гг. разработана агрегированная модель, которая может быть использована доминирующим участником рынка нефти, ОПЕК, для стабилизации цены.

Первый блок модели описывает соотношение между ценой нефти марки WTI  $P_{wti,t}$  и приростом соотношения между индексом высокотехнологичных компаний NASDAQ Composite (IXIC) и индексом S&P500 —  $\Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_t$ , а также приростом мировой добычи неф-

ти  $\Delta Q_t$  (в отчетах ВР содержатся данные об объемах добычи нефти вместе с газовым конденсатом и фракциями сжиженных газов — NGL):

$$P_{witi} = \lambda_1 P_{witi-1} + b_1 \Delta Q_t + a_0 \Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_t + \zeta_{1t}. \quad (13)$$

Значения параметров полученных регрессионных зависимостей следующие:  $\lambda_1 = 1.180$ ,  $b_1 = -4.4547$ ,  $a_0 = -185.765$  (коэффициент детерминации зависимости (13) составляет  $R^2 = 0.970$ , а t-статистики параметров  $\lambda_1$ ,  $b_1$ ,  $a_0$  — 11.569, -1.054 и -3.413 соответственно).

Второй блок описывает динамику зависимости объема добычи нефти  $Q_{\text{nonOPEC}t}$  (в млн баррель/сут) в странах, не входящих в ОПЕК, и цены нефти марки WTI (в долл. за баррель) с помощью модели распределенного запаздывания Паскаля 2-го порядка:

$$Q_{\text{nonOPEC}t} = \frac{b_2 z}{(z - \lambda_2)^2} P_{witi} + \zeta_{2t}, \quad (14)$$

где  $z$  — оператор сдвига:  $zx_t = x_{t+1}$ ,  $\zeta_{1t}$ ,  $\zeta_{2t}$  — случайные возмущения.

Значения параметров распределенного запаздывания (14) следующие:  $\lambda_2 = 0.836$ ,  $b_2 = 0.0194$ , а коэффициент вариации имеет весьма низкое значение ( $v = 0.008$ ), что свидетельствует о близком соответствии расчетных и фактических данных.

В наибольшей степени волатильность характерна для неустойчивого соотношения (13), в котором  $\lambda_1 = 1.180 > 1$  и один из коэффициентов статистически малозначим. Данный результат отражает значительное влияние на цену отмеченных в начале настоящего параграфа факторов.

При найденных значениях параметров построенную модель можно представить в пространстве состояний в виде

$$X_t = \begin{pmatrix} 1.094 & 3.113 & -2.993 & -4.455 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.019 & -0.699 & 1.672 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} -185.765 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} \xi_t, \quad (15)$$

$$y_t = (1 \ 0 \ 0 \ 0) X_t,$$

где  $X_t = \begin{pmatrix} P_{witi} - P_{widi} \\ Q_{\text{nonOPEC}t-1} - Q_{\text{nonOPEC}d} \\ Q_{\text{nonOPEC}t} - Q_{\text{nonOPEC}d} \\ \Delta Q_{\text{OPEC}t} - \Delta Q_{\text{OPEC}d} \end{pmatrix}$  — вектор отклонений исследуемых показателей от значений,

соответствующих желаемому уровню цены  $P_{widi}$  и связанному с ним через (14) объему добычи нефти в странах, не входящих в ОПЕК  $Q_{\text{nonOPEC}d}$  (в работе принято, что  $P_{widi} = 60$  долл. за баррель: в 2016 г. именно на этот уровень цены ориентировался ОПЕК на среднесрочную перспективу, так как его увеличение повлекло бы за собой рост добычи сланцевой нефти в США и связанные с этим негативные последствия, в частности потерю рыночной доли),  $u_t$  — вторая разность отклонения прироста добычи нефти в ОПЕК  $\Delta Q_{\text{OPEC}t}$  от уровня  $\Delta Q_{\text{OPEC}d}$ , соответствующего задаваемым уровням  $P_{widi}$  и  $\Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_d$ , а  $\xi_t = \Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_t - \Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_d$ , причем принятое значение  $\Delta(\text{Nasdaq/S\&P500})_d$  составляет 0.065, что равно среднему значению этого показателя за последние 10–15 лет.

Нами ставилась задача определения такого управления  $u_t$ , которое обеспечивает минимальное отклонение цены от желаемого уровня ( $y_t = P_{witi} - P_{widi}$ ) в соответствии с критерием

$$\frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\infty} (y_t^2 + Ru_t^2) \rightarrow \min_{u_t} \quad (16)$$

при наличии неопределенности в значениях параметров в виде (7), где

$$D_1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 0, \quad (17)$$

$$E = \begin{pmatrix} \Delta p_m(1) * 1.1800 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta p_m(2) * 0.0864 & \Delta p_m(2) * 3.1134 & -\Delta p_m(2) * 2.9936 & -\Delta p_m(2) * 4.4547 \\ -\Delta p_m(3) * 0.0864 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta p_m(4) * 6.2267 & -\Delta p_m(4) * 7.4483 & 0 \\ \Delta p_m(3) * 0.0194 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta p_m(4) * 1.3978 & \Delta p_m(4) * 1.6720 & 0 \end{pmatrix}$$

( $dp_{\max} = [\Delta p_m(1), \Delta p_m(2), \Delta p_m(3), \Delta p_m(4)]$  — вектор максимальных по модулю относительных отклонений от номинальных значений для 4-х параметров модели ( $\lambda_1, b_1, \lambda_2, b_2$ ), определяющих динамику системы;  $dp_{\max}$  соответствует предельному уровню неопределенности).

В результате расчетов, проведенных в соответствии с изложенной в подпараграфе 2b процедурой, получено, что при  $R = 100.5$ ,  $\varepsilon_0 = 0.001$  максимальные значения компонентов вектора  $dp_{\max}$ , при которых удовлетворяются условия (8b) и (9), составляют  $\Delta p_m(1) = 0.0250$ ,  $\Delta p_m(2) = 0.0631$ ,  $\Delta p_m(3) = 0.0950$ ,  $\Delta p_m(4) = 0.01251$ . При этом вектор обратной связи, определяемый в соответствии с (10), имеет вид  $K_{oil} = [-0.0983, -0.7109, 0.6625, 1.3115]$ .

Расчеты с использованием найденного закона обратной связи показали, что полученные значения компонентов вектора  $dp_{\max}$  являются весьма консервативными.

На рис. 1–2 приведены графики, характеризующие возможную динамику цены нефти WTI, а также добычи нефти в ОПЕК, при использовании найденного закона управления  $K_{oil}$ , когда значения возмущений параметров системы (15) изменяются следующим образом:

$$dp(i, t) = \gamma * \eta_i(t) * dp_m(i), \quad (18)$$

где  $\eta_i(t)$  — процесс типа «белый шум» с равномерным распределением внутри интервала  $[-1; +1]$ , а  $dp_m(i)$  — компоненты вектора  $dp_{\max}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

В результате 10 000 испытаний определялись траектории с максимальным и минимальным отклонением цены нефти от желаемого уровня  $P_{wti} = 60$  долл/баррель (в соответствии с евклидовой нормой за 10-летний период). На рис. 1, 2 представлены траектории цены нефти, а также объемов добычи нефти в ОПЕК, соответствующие наихудшему ( $W P_{wti}$ ) и наилучшему ( $B P_{wti}$ ) сценариям при  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 2$ . Как видно из графиков, увеличение в 2 раза отклонений параметров модели по сравнению с теми отклонениями, при которых удовлетворяются условия (8b) и (9), практически не влияет на динамику и величину данных показателей.

Во всех рассмотренных вариантах (включая вариант отсутствия изменений параметров при  $\gamma = 0$ ) использование полученного регулятора приводит к стабильным уровням цены максимум через 6–7 лет. В то же время при принятых предположениях о неизменности динамики соотношения между фондовыми индексами  $\xi_t$  через 5 лет потребуется сократить суточный объем добычи нефти в ОПЕК (включая NGL) примерно на 1.5–2 млн баррелей, после чего начнется постепенное возвращение этого показателя на начальный уровень (рис. 1 и 2).

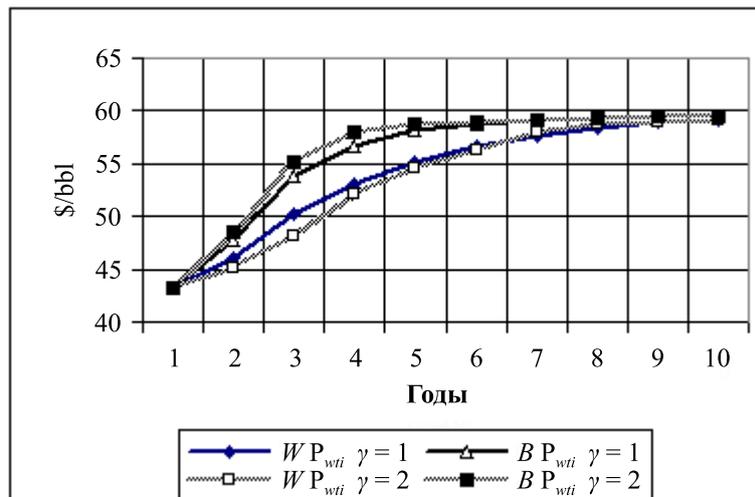


Рис. 1. Динамика цены нефти WTI в долл./баррель  $P_{witi}$  при ее стабилизации с помощью регулятора  $u_t = -K_{oil} X_t$  в случае наихудшего ( $WP_{witi}$ ) и наилучшего ( $BP_{witi}$ ) сценариев изменения параметров модели (15)

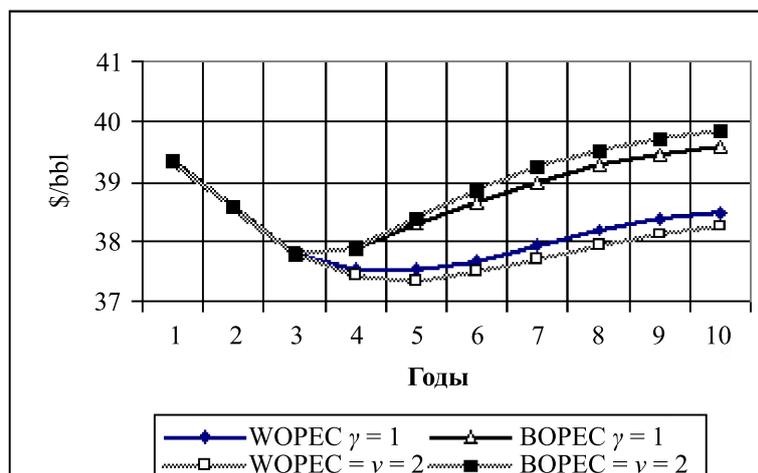
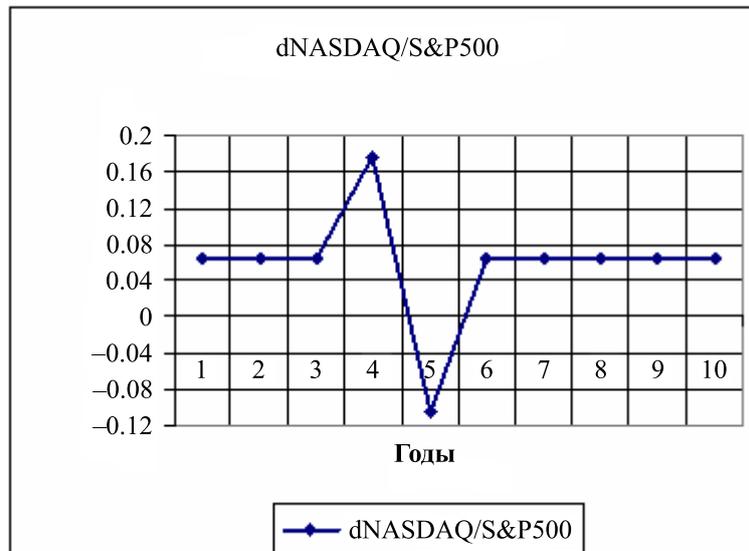
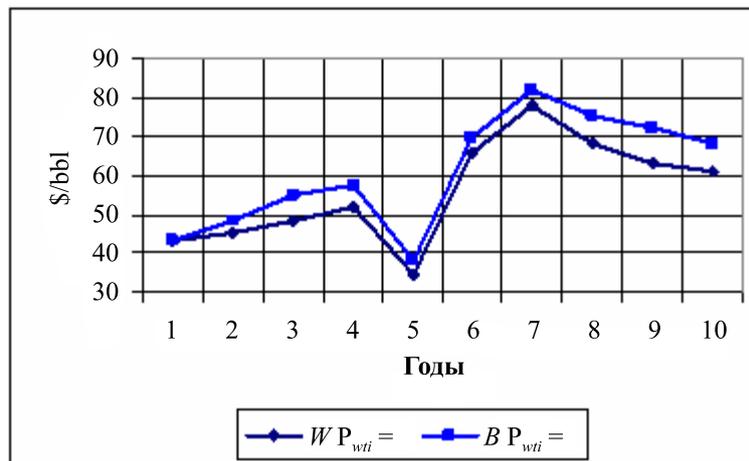


Рис. 2. Динамика объемов добычи нефти для стран ОПЕК при стабилизации цены на нефть с помощью регулятора  $u_t = -K_{oil} X_t$  в случае наихудшего ( $WP_{witi}$ ) и наилучшего ( $BP_{witi}$ ) сценариев изменения параметров модели (15)

Кроме того, исследовалось влияние весьма вероятных в ближайшей перспективе шоков экзогенной переменной, прироста соотношения между индексом высокотехнологичных компаний  $\Delta(Nasdaq/S\&P500)_t$  на цену на нефть при законе управления  $K_{oil}$  (рис. 3, 4). В результате 10 000 испытаний определялись траектории с максимальным ( $WP_{witi}$ ) и минимальным ( $BP_{witi}$ ) отклонением цены нефти от уровня  $P_{witi} = 100$  долл./баррель (также в соответствии с евклидовой нормой за 10-летний период) при случайном изменении параметров в соответствии с (18) при  $\gamma = 2$ .

Расчеты показывают, что после резкого спада показателя  $\Delta(Nasdaq/S\&P500)_t$  цена повысится примерно до 80 долл./баррель, после чего будет происходить постепенное увеличение разницы между максимальным и минимальным вариантами до 7 долл./баррель к концу рассматриваемого периода (рис. 4).

Рис. 3. Условная динамика показателя  $\Delta(\text{NasdaqS\&P500})_t$ Рис. 4. Реакция цены на нефть  $P_{wit}$  (в долл./баррель) на шоковое изменение  $\Delta(\text{NasdaqS\&P500})_t$  в соответствии с рис. 3 при использовании закона управления  $K_{oil}$  в случае наихудшего ( $W P_{wit}$ ) и наилучшего ( $B P_{wit}$ ) сценариев

## 5. Макроэкономическая модель среднесрочного развития США

Рассмотренный в подпараграфе 2b подход может быть использован и в макроэкономических исследованиях, в частности в задачах стабилизации уровня инфляции. Актуальность подобных задач связана с наметившимся интересом к таргетированию инфляции со стороны как нашего Центробанка, так и Центробанков многих других стран.

Для исследования применимости изложенного в подпараграфе 2b подхода при формировании макроэкономической динамики ниже рассматривается агрегированная эконометрическая макроэкономическая модель среднесрочного развития США, разработанная на основе данных официальной американской статистики и имеющая структуру, соответствующую монетаристским моделям (см., например, [Blanchard, 2006; Debelle, 1999; Варшавский, 2013; Варшавский, 2016]). Разработанная модель включает следующие блоки:

- блок оценки темпов прироста ВВП,  $gdp_t$ , связывающий темпы прироста этого показателя со ставкой рефинансирования  $fed_{t-1}$  и с темпами прироста значений индекса S&P500<sub>t</sub>:

$$gdp_t = \frac{b_1}{z - \lambda_1} fed_t + a_1 S\&P500_t + \zeta_{1t}; \quad (19)$$

- блок оценки уровня безработицы  $U6_t$ :

$$U6_t = \lambda_2 U6_{t-1} + b_2 gdp_t + a_2 + \zeta_{2t}; \quad (20)$$

- блок оценки инфляции, представляющий динамический вариант уравнения Филипса, связывающего уровни безработицы в соответствии с показателями  $U6_t$ , с показателем инфляции  $\pi_t$  (в качестве показателя инфляции в данной статье взят темп прироста индекса цен затрат на личное потребление, PCE):

$$\pi_t = \left[ \frac{b_3 z}{(z - \lambda_3)^2} + b_4 \right] U6_t + a_3 + \zeta_{3t}, \quad (21)$$

причем  $\zeta_{1it}$ ,  $\zeta_{2t}$ ,  $\zeta_{3t}$  — случайные возмущения,  $i = 1, 2, 3$ . Значения параметров полученных зависимостей следующие:  $\lambda_1 = 1.274$ ,  $b_1 = -0.230$ ,  $\lambda_2 = 0.768$ ,  $b_2 = -1.030$ ,  $\lambda_3 = 0.848$ ,  $b_3 = -0.0262$ ,  $b_4 = -0.267$ ,  $a_1 = 0.070$ ,  $a_2 = 4.509$ ,  $a_3 = 14.647$ . При проведении расчетов исследовалась возможность достижения 2-процентного уровня инфляции  $\pi_d = 2.0\%$  (в соответствии с индексом PCE) и желаемого уровня безработицы  $U6_d = 9\%$  (отметим, что зависимость (21) построена так, что принятые равновесные уровни инфляции и безработицы согласованы между собой).

Построенную модель можно представить в пространстве состояний в виде

$$X_t = \begin{pmatrix} 1.274 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.230 \\ -1.311 & 0.768 & 0.000 & 0.000 & 0.237 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & -0.026 & -0.719 & 1.696 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{pmatrix} X_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.072 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} \xi_t, \quad (22)$$

$$y_t = (-0.000 \quad 0.267 \quad 0.000 \quad 1.000 \quad 0.000) X_t,$$

где  $X_t$  — отклонения исследуемых показателей от значений, соответствующих желаемому уровню инфляции  $\pi_d = 2\%$ ,  $y_t = \pi_t - \pi_d$  — выходная переменная (отклонение инфляции от желаемого уровня),  $u_t = fed_t - fed_{t-1}$  — прирост ставки рефинансирования,  $\xi_t$  — отклонение темпа прироста индекса S&P 500 от вероятной величины (принято, что она составит 8%, как и средняя величина S&P 500 после кризиса 2008–2009 гг.).

При формировании критерия оптимальности для рассмотренной модели следует учитывать, что основными провозглашаемыми задачами Федеральной резервной системы США (ФРС) является обеспечение максимальной занятости и стабильных цен ([Blanchard, 2006; Варшавский, 2016]). Однако ввиду того, что в настоящее время считается, что в США достигнута полная занятость, но инфляция находится на недопустимо низком уровне, в качестве критерия оптимальности модели в настоящей работе принят критерий минимума суммы квадратов отклонений инфляции от желаемого уровня на среднесрочную перспективу, имеющий такой же формальный вид критерия, как и в предыдущем примере (см. (16)).

Управляющей переменной в модели (22) с критерием (16) является прирост ставки рефинансирования  $u_t$ , а экзогенной —  $\xi_t$ . Неопределенность вида (7) моделировалась с помощью следующих матриц:

$$D_1 = D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 0, \quad (23a)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} dp_m(1)*1.274 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -dp_m(2)*0.230 \\ -dp_m(1)*1.274*1.030 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dp_m(2)*1,030*0.230 \\ -dp_m(3)*1.274*1.030 & 0 & 0 & 0 & dp_m(3)*1,030*0.230 \\ 0 & dp_m(4)*0.768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -dp_m(5)*0.026 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dp_m(6)*2*0.848^2 & dp_m(6)*2*0.848 & 0 \end{pmatrix}, \quad (23b)$$

где  $dp_m(i)$  — максимальное по модулю относительное изменение  $i$ -го параметра модели (19)–(21),  $i = 1, 2, \dots, 6$ , входящего в матрицу  $A$  системы (22).

В результате компьютерных расчетов, проведенных в соответствии с изложенной в подпараграфе 2b методикой, при  $R = 7$  найдена оценка  $dp_{\max}$  — вектора максимальных по модулю значений возмущений 6 параметров:  $\lambda_1, b_1, b_2, \lambda_2, b_3, \lambda_3$  (эти параметры входят в матрицу  $A$  и определяют динамику системы), при которой удовлетворяются условия (8b) и (9) для  $P > 0$ . Она составляет  $dp_{\max} = [0.025, 0.11, 0.05, 0.025, 0.125, 0.04]$ .

Кроме того, следует отметить чувствительность матрицы  $P$ , удовлетворяющей (8b) и (9), а также вектора  $K$  к начальным значениям параметра  $\varepsilon_0$ . В таблице 1 приведены значения коэффициентов векторов обратной связи  $K = K(\varepsilon_0)$ , а также величина показателя  $H_\infty$ , характеризующего в настоящем исследовании влияние изменения темпов прироста индекса S&P500<sub>t</sub> на уровень инфляции  $\pi_t$  при изменении начального значения параметра  $\varepsilon_0$  в пределах 0.11–0.13. Однако ввиду того, что найденным векторам обратной связи соответствуют близкие значения максимальных собственных чисел матрицы замкнутой системы  $A_1 = A - BK$ , лежащие в диапазоне 0.934–0.941, динамика исследуемых макроэкономических показателей для номинальной системы при  $K = K(\varepsilon_0)$ , приведенных в таблице 1, оказывается схожей (рис. 5).

Таблица 1. Влияние начальных значений параметра  $\varepsilon_0$  на характеристики управления

Показатели	$\varepsilon_0 = 0.11$	$\varepsilon_0 = 0.12$	$\varepsilon_0 = 0.13$
$K' = K'(\varepsilon_0)$	-3.5477	3.7319	-4.0366
	0.1879	0.2244	0.2803
	0.9372	1.1654	1.5097
	-1.1958	-1.4869	-1.9257
	1.4788	1.5251	1.6035
$H_\infty$	37.9817	35.7625	33.4956

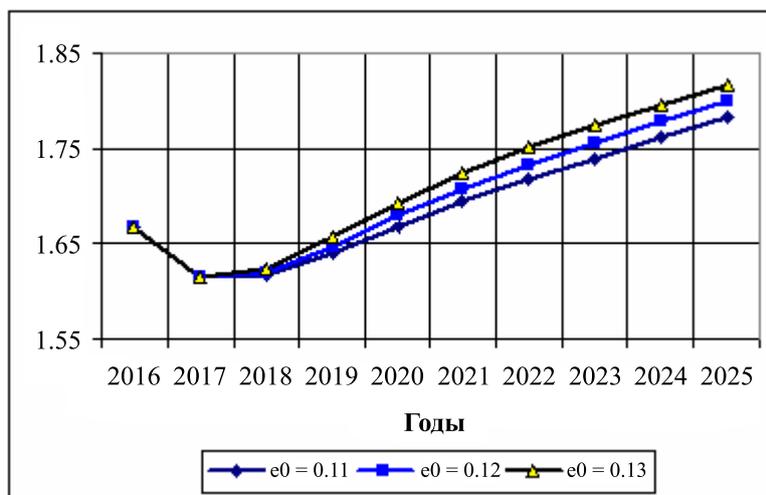


Рис. 5. Динамика показателя инфляции PCE (в %) при использовании законов управления  $K = K(\varepsilon_0)$ , соответствующих различным начальным значениям параметра  $\varepsilon_0$  (таблица 1)

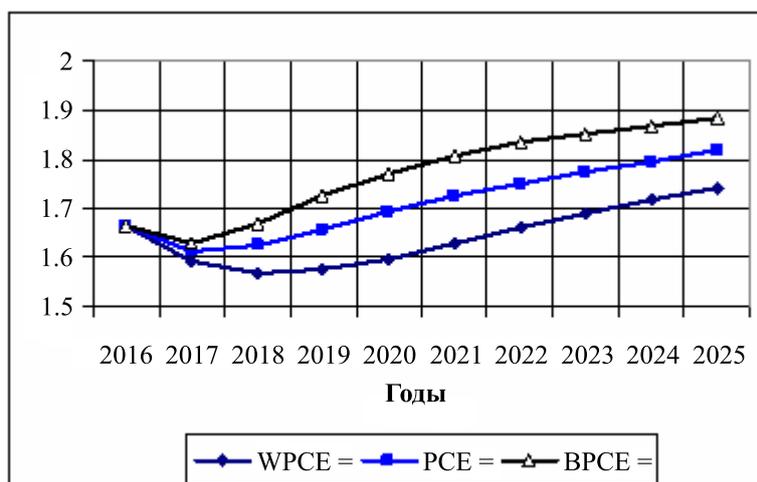


Рис. 6. Динамика показателя инфляции PCE (в %) при использовании закона управления  $K = K(0.13)$ , в случае наилучшего (BPCE) и наихудшего (WPCE) сценариев

Как и в § 4, для анализа динамики макроэкономических показателей при случайном изменении параметров и при применении закона управления  $K = K(0.13)$  использовался метод статистических испытаний. Изменения параметров происходили в соответствии с правилом (18). В результате 100 000 испытаний определялись траектории с максимальным и минимальным отклонением показателя инфляции от желаемого уровня  $PCE_d = \pi_d = 2\%$  (в соответствии с евклидовой нормой за 10-летний период). На рис. 6 представлены траектории показателя инфляции, соответствующие наихудшему (WPCE) и наилучшему (BPCE) сценариям при  $\gamma = 1$ . В соответствии с расчетами в 2019–2025 гг. отклонение показателя инфляции при этих сценариях составит примерно 0.15–0.17 %.

Следует отметить, что оценка вектора максимальных значений параметров  $dp_{\max}$ , при которой удовлетворяются условия (8b) и (9), обеспечивающие устойчивость возмущенной системы, является достаточно консервативной. Так, устойчивость возмущенной системы при использовании найденного закона управления  $K = K(\varepsilon_0)$  сохраняется и при увеличении ряда

компонентов этого вектора, в частности при  $dp_{\max}^1 = [0.05, 0.11, 0.05, 0.05, 0.125, 0.08]$ . Как показывают результаты статистического моделирования в соответствии с (18) при векторе максимальных возмущений параметров  $dp_{\max}^1$ , диапазон отклонений показателей между наихудшим (WPCE) и наилучшим (BPCE) сценариями лишь незначительно изменяется (рис. 7).

Кроме того, исследовалось влияние возможных в ближайшей перспективе шоковых изменений индекса S&P500<sub>t</sub> (рис. 8) на макроэкономические показатели, получаемые при законе управления  $K = K(0.13)$  (рис. 9).

Расчеты показывают, что после резкого спада индекса S&P500<sub>t</sub> различие между наихудшим и наилучшим вариантами несколько увеличится и составит около 0.2 % (рис. 9). Следует, однако, иметь в виду, что в результате подобного катаклизма может коренным образом измениться режим макроэкономической системы, так, что, возможно, даже возмущенная система уравнений не будет адекватно описывать реальные процессы.

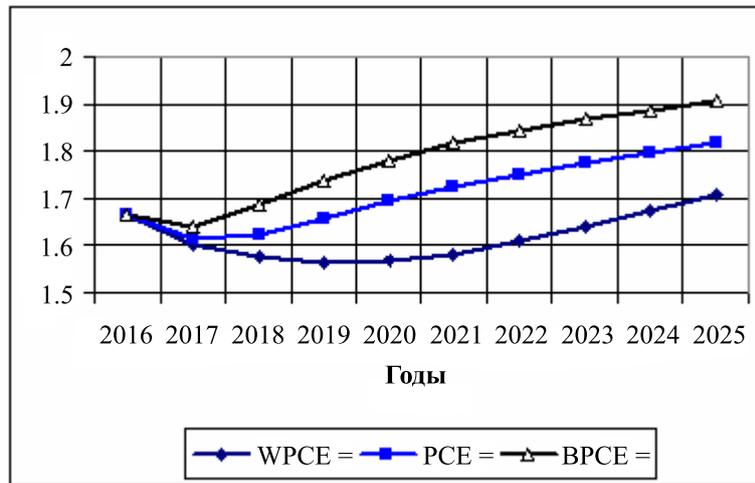


Рис. 7. Динамика показателя инфляции PCE (в %) при использовании закона управления  $K = K(0.13)$  и векторе возмущения параметров  $dp_{\max}^1$  в случае наихудшего (WPCE) и наилучшего (BPCE) сценариев

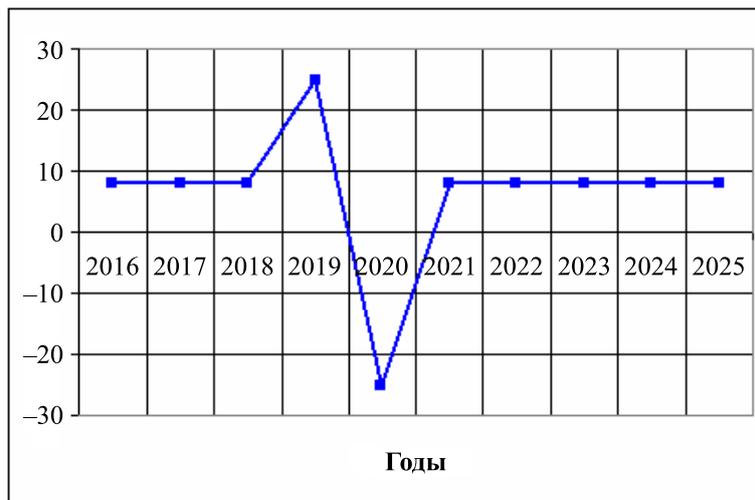


Рис. 8. Условная динамика темпов прироста индекса S&P500<sub>t</sub> (в %)

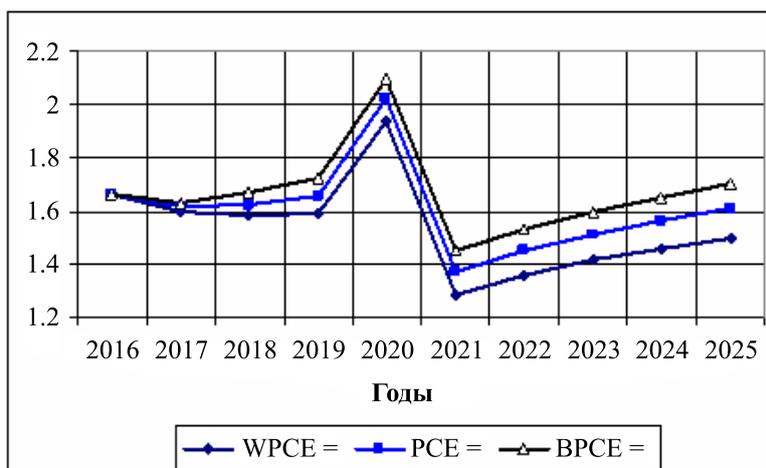


Рис. 9. Реакция показателя инфляции PCE (в %) на шоковое изменение темпов прироста индекса S&P500<sub>t</sub> в соответствии с рис. 4 при использовании закона управления  $K = K(0.13)$  в случае наилучшего (WPCE) и наилучшего (BPCE) сценариев

## 6. Заключение

Рассмотренные в статье робастные методы управления системами при наличии структурированной неопределенности могут быть использованы в задачах стабилизации ключевых экономических показателей реальных экономических систем.

В результате вычислительных экспериментов найдены предельные уровни неопределенности параметров и законы обратной связи, при которых используемый в работе подход обеспечивает стабилизируемость реальных экономических систем. Вместе с тем полученные оценки предельных уровней неопределенности параметров являются весьма консервативными.

Расчеты, проведенные с помощью метода статистических испытаний, показывают, что полученные робастные законы управления могут быть применены и при большей степени неопределенности параметров рассмотренных моделей, чем гарантируется при найденных предельных уровнях.

Обнаружена чувствительность результатов к выбору начального значения параметра  $\varepsilon_0$ , а также к начальным значениям экономических показателей. В связи с этим при использовании рассмотренного подхода выбор наиболее эффективного закона управления экономическими системами целесообразно осуществлять с учетом как теоретических, так и специфических ограничений, характерных для конкретных экономических систем.

## Список литературы (References)

- Варшавский Л. Е.* Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капиталов- и наукоёмкой продукции (производственные мощности, цены, технологические изменения). — М.: ЦЭМИ РАН, 2003. — 354 с.
- Varshavskii L. E.* Issledovanie investitsionnykh strategii firm na rynkakh kapitalo- i naukoemkoi produktsii (proizvodstvennye moshchnosti, tseny, tekhnologicheskie izmeneniya) [The Study of investment strategies of firms on the markets of capital and R&D intensive products]. — Moscow: CEMI RAS, 2003. — 354 p. (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Финансовая система и товарные рынки: вакханалия либерализации и попытки регулирования // Экономика и математические методы. — 2011. — Т. 47, № 1. — С. 55–65.
- Varshavskii L. E.* Finansovaya sistema i tovarnye rynki: vakkhanaliya liberalizatsii i popytki regulirovaniya [Financial system and commodities market: bacchanalia of Liberalization and efforts of Regulation] // Economics and the Mathematical Methods. — 2011. — Vol. 47, No. 1. — P. 55–65 (in Russian).

- Варшавский Л. Е.* Моделирование динамики макроэкономических показателей США и анализ сценариев их поведения в пострецессионный период // Концепции. — 2013. — № 1 (30). — С. 32–42.  
*Varshavskii L. E.* Modelirovanie dinamiki makroekonomicheskikh pokazatelei SShA i analiz stsensariiev ikh povedeniya v postretsessionnyi period [Modeling and analysis of scenarios of behaviour of US macroeconomic indicators in postrecession period] // CONCEPCII. — 2013. — No. 1 (30). — P. 32–42 (in Russian).
- Варшавский Л. Е.* Исследование сценариев изменения макроэкономических показателей США в среднесрочной перспективе // Анализ и моделирование экономических и социальных процессов. Математика. Компьютер. Образование: Сб. научных трудов. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. — № 4 (23). — С. 72–85.  
*Varshavskii L. E.* Issledovanie stsensariiev izmeneniya makroekonomicheskikh pokazatelei SShA v srednesrochnoi perspective // Analiz i modelirovanie ekonomicheskikh i sotsial'nykh protsessov [Studying scenarios of behavior of macroeconomic indicators of the USA over the middle-range period] // Analysis and Modeling of Economic and Social Processes. Mathematics. Computing. Education: Proceedings of the 23<sup>rd</sup> International Conference (Issue 23). — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2016. — No. 4 (23). — P. 72–85 (in Russian).
- Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.  
*Emel'janov S. V.* Sistemy avtomaticheskogo upravlenija s peremennoj strukturoj [Automatic control systems with variable structure]. — Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).
- Коган М. М.* Линейно-квадратичная игра в условиях неопределенности и синтез робастных  $H^\infty$ -субоптимальных регуляторов // АИТ. — 1999. — № 3. — С. 131–143.  
*Kogan M. M.* Linear quadratic game under condition of uncertainty and synthesis of  $H^\infty$ -suboptimal regulators // Automation and Remote Control. — 1999. — No. 3. — P. 131–143. (Original Russian paper: *Kogan M. M.* Linejno-kvadraticznaja igra v uslovijah neopredelennosti i sintez robustnyh  $H^\infty$ -suboptimal'nyh reguljatorov // Avtomatika i telemekhanika. — 1999. — No. 3. — P. 131–143.)
- Basar T., Bernhard P.*  $H^\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems // A Dynamic Game Approach. — 1995. — Birkhauser. — Boston.
- Blanchard O. J.* Macroeconomics. — NJ: Pearson/Prentice Hall, 2006.
- Chen Y. H.* Partial Compensation for Uncertain Discrete Systems // Dynamics and Control. — 2000. — No. 1 (10). — P. 47–61.
- Corless M., Leitmann G.* Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems Transactions on Automatic Control. — 1981. — No. 5 (26). — P. 1139–1143.
- Debelle G.* Inflation Targeting and Output Stabilization/Research Bank of Australia, Research Discussion Paper, 1999–08.
- Garcia G., Bernussou J., Arzeiler D.* Robust Stabilization of Discrete-Time Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty // Systems & Control Letters. — 1994. — No. 5 (22). — P. 327–339.
- Gutman S.* Uncertain Dynamical Systems — Lyapunov min-max Approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — No. 2 (24). — P. 437–443.
- Laub A. A.* A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — No. 6 (24). — P. 913–921.
- Shen J.-C., Kung F.-C.* Designing Robust Discrete-Time Systems by Pole Assignment // Control.— Theory and Advanced technology. — 1990. — No. 4 (6). — P. 669–681.
- Stoorvogel A. A., Weeren A. J. T. M.* The Discrete-Time Riccati Equation Related to the  $H^\infty$  Control Problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1994. — No. 3 (39). — P. 686–691.
- Zak S.* Robust State Feedback Stabilization of Discrete-Time Uncertain Dynamical Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1988. — No. 9 (33). — P. 887–891.