КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 2 С. 231–240

DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-2-231-240

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 519.63

Оценка анизотропии сейсмического отклика от трещиноватых геологических объектов

В. И. Голубев^{1,2,а}, Н. И. Хохлов^{1,2,b}

¹ Московский физико-технический институт, 141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

² Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, 117218, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, к. 1

E-mail: ^aw.golubev@mail.ru, ^bk h@inbox.ru

Получено 05.02.2018. Принято к публикации 20.03.2018.

Сейсмическая разведка является наиболее распространённым методом поиска и разведки месторождений полезных ископаемых: нефти и природного газа. Зародившись в начале XX века, она получила значительное развитие и в настоящий момент используется практически всеми сервисными нефтяными компаниями. Основными ее преимуществами являются приемлемая стоимость проведения полевых работ (по сравнению с бурением скважин) и точность восстановления характеристик подповерхностного пространства. Однако с открытием нетрадиционных месторождений (например, Арктический шельф, Баженовская свита) актуальной стала задача усовершенствования существующих и создания новых технологий обработки сейсмических данных. Значительное развитие в данном направлении возможно с использованием численного моделирования распространения сейсмических волн в реалистичных моделях геологического массива, поскольку реализуется возможность задания произвольной внутренней структуры среды с последующей оценкой синтетического сигнала-отклика.

Настоящая работа посвящена исследованию пространственных динамических процессов, протекающих в геологических средах, содержащих трещиноватые включения, в процессе сейсмической разведки. Авторами построена трехмерная модель слоистого массива, содержащего пласт из флюидонасыщенных трещин, позволяющая оценить сигнал-отклик при варьировании структуры неоднородного включения. Для описания физических процессов используется система уравнений линейно-упругого тела в частных производных второго порядка, которая решается численно сеточно-характеристическим методом на гексаэдральных расчетных сетках. При этом плоскости трещин выделяются на этапе построения расчетной сетки, в дальнейшем используется дополнительная корректировка, обеспечивающая корректный сейсмический отклик для параметров модели, характерных для геологических сред.

В работе получены площадные трехкомпонентные сейсмограммы с общим пунктом взрыва. На их основе проведена оценка влияния структуры трещиноватой среды на анизотропию сейсмического отклика, регистрируемого на дневной поверхности на различном удалении от источника. Установлено, что кинематические характеристики сигнала остаются постоянными, тогда как динамические характеристики для упорядоченных и неупорядоченных моделей могут различаться на десятки процентов.

Ключевые слова: сейсморазведка, геологические трещины, анизотропия сейсмического отклика, математическое моделирование, численные методы, сеточно-характеристический метод

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-02018 офи_м.

DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-2-231-240

UDC: 519.63

Estimation of anisotropy of seismic response from fractured geological objects

V. I. Golubev^{1,2,a}, N. I. Khokhlov^{1,2,b}

¹Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institytsky per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

² Scientific Research Institute for System Studies of the Russian Academy of Sciences, 36/1 Nahimovskij av., Moscow, 117218, Russia

E-mail: ^aw.golubev@mail.ru, ^bk_h@inbox.ru

Received 05.02.2018. Accepted for publication 20.03.2018.

Seismic survey process is the common method of prospecting and exploration of deposits: oil and natural gas. Invented at the beginning of the XX century, it has received significant development and is currently used by almost all service oil companies. Its main advantages are the acceptable cost of fieldwork (in comparison with drilling wells) and the accuracy of estimating the characteristics of the subsurface area. However, with the discovery of non-traditional deposits (for example, the Arctic shelf, the Bazhenov Formation), the task of improving existing and creating new seismic data processing technologies became important. Significant development in this direction is possible with the use of numerical simulation of the propagation of seismic waves in realistic models of the geological medium, since it is possible to specify an arbitrary internal structure of the medium with subsequent evaluation of the synthetic signal-response.

The present work is devoted to the study of spatial dynamic processes occurring in geological medium containing fractured inclusions in the process of seismic exploration. The authors constructed a three-dimensional model of a layered massif containing a layer of fluid-saturated cracks, which makes it possible to estimate the signal-response when the structure of the inhomogeneous inclusion is varied. To describe physical processes, we use a system of equations for a linearly elastic body in partial derivatives of the second order, which is solved numerically by a grid-characteristic method on hexahedral grid. In this case, the crack planes are identified at the stage of constructing the grid, and further an additional correction is used to ensure a correct seismic response for the model parameters typical for geological media.

In the paper, three-component area seismograms with a common explosion point were obtained. On their basis, the effect of the structure of a fractured medium on the anisotropy of the seismic response recorded on the day surface at a different distance from the source was estimated. It is established that the kinematic characteristics of the signal remain constant, while the dynamic characteristics for ordered and disordered models can differ by tens of percents.

Keywords: seismic survey process, geological cracks, seismic signal anisotropy, mathematical simulation, numerical methods, grid-characteristic method

Citation: Computer Research and Modeling, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 231-240 (Russian).

The work was supported by the grant of the RFRB 16-29-02018 ofi_m.



1. Введение

Нефть и газ, безусловно, остаются основными составляющими энергетического комплекса Российской Федерации. Несмотря на бурное развитие альтернативных источников энергии, весь мир в значительной степени зависит от запасов разведанных месторождений. Ввиду их существенного истощения актуальной является задача поиска и разведки новых залежей, для решения которой на практике используют гравиметрические, электромагнитные и сейсмические методы. Последние из них являются стандартом ввиду высокой точности получаемых оценок, относительно невысокой стоимости и хорошо отработанных методик, разработанных в различных сервисных компаниях. Основной задачей, стоящей перед сейсмической разведкой, является восстановление структуры и свойств подповерхностного пространства на основе регистрации колебаний земной поверхности. Для этого необходимо решить обратную задачу, что, в свою очередь, требует решения серии прямых задач с последовательно изменяющейся моделью геологического массива. При этом точность их решения является решающей для корректного восстановления структуры среды. В связи с этим за последнее время было разработано множество различных численных методов, позволяющих с высокой точностью рассчитывать волновое поле в заданной среде с распределенными по пространству параметрами [Carcione et al., 2002; Virieux et al., 2011]. Одним из ограничений данных методов является невозможность явного учета трещиноватых включений, характерных для нефтеносных пластов. Оно было преодолено в работах [Golubev et al., 2015; Kvasov et al., 2011; Golubev et al., 2017] с использованием сеточно-характеристического метода [Petrov et al., 1984; Magomedov et al., 1969] на структурных и неструктурных расчетных сетках.

В связи с открытием нетрадиционных месторождений (например, Баженовская свита) актуальной становится задача оценки анизотропии сейсмического сигнала, обусловленной неоднородной структурой трещиноватых пластов. Для интерпретации полевых данных необходимо знать величины амплитуд сейсмического отклика, кинематические характеристики сигнала, азимутальную изменчивость отклика. Расчет перечисленных и многих других параметров возможен с использованием синтетических сейсмограмм, получаемых в процессе численного моделирования процесса сейсмической разведки.

В настоящей работе были построены трещиноватые модели, отражающие характерные особенности нефтеносных геологических сред. Отличие между моделями заключалось в их внутренней структуре (ориентация и местоположение трещин). Было проведено численное моделирование распространения сейсмических волн и получены синтетические площадные сейсмограммы. Было проведено исследование кинематических и динамических характеристик сейсмического отклика, в том числе его азимутальной анизотропии, для всех моделей и сопоставлены результаты.

2. Математическая постановка задачи

Для описания поведения среды использовалась модель идеального изотропного линейноупругого материала. Приведенная ниже система дифференциальных уравнений в частных производных описывает состояние элементарного объема упругого материала в приближении малых деформаций для трехмерного случая:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \nabla_j \sigma_{ij} \quad (i, j = x, y, z),
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = q_{ijkl} \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial t},
q_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} + \delta_{jk}),$$
(1)

где ρ — плотность материала, λ и μ — параметры Ламе, ∇_j — ковариантная производная по координате j, δ_{ij} — символ Кронекера, v_i — компоненты скорости, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ϵ_{ij} — компоненты тензора деформаций.

Продольная и поперечная скорости звука c_1 и c_2 выражаются через плотность и параметры Ламе следующим образом:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$
 (2)

Систему (1) можно записать в следующей канонической форме системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad (3)$$

где $u = (v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T$ — вектор искомых функций, x, y, z — независимые переменные, v_x, v_y, v_z — компоненты скорости $v, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ — компоненты тензора напряжений σ, A_x, A_y, A_z — матрицы размера 9×9 .

Для решения системы (1) используется явный численный метод, основанный на классе сеточно-характеристических схем. Переход от одного временного слоя к другому может быть записан в виде

$$u^{n+1} = F(A_x, A_y, A_z)u^n,$$
(4)

где *F* — оператор перехода, вид которого определяет конкретную разностную схему. В работе используется следующая схема расщепления:

$$F(A_{x}, A_{y}, A_{z}) = F_{z}(A_{z})F_{y}(A_{y})F_{x}(A_{x}).$$
(5)

Таким образом, решение исходной системы сводится к последовательному решению трех одномерных систем, причем для решения следующей системы используется решение предыдущей как начальное приближение:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + A_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + A_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + A_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$
(6)

матрицы A_x , A_y , A_z разрежены и диагонализуемы. В результате начальная система сводится к системе с матрицей $A_x = A_y = A_z = \text{diag}(c_1, -c_1, c_2, -c_2, c_2, -c_2, 0, 0, 0)$. Затем полученные системы уравнений переноса вида $u_t + au_x = 0$, где a > 0, решаются с использованием сеточно-характеристической схемы:

$$u_{m}^{n+1} = u_{m}^{n} + \sigma(\Delta_{0} + \Delta_{2})/2 + \sigma^{2}(\Delta_{0} - \Delta_{2})/2 + \frac{\sigma(\sigma^{2} - 1)}{6}(\Delta_{1} - 2\Delta_{0} + \Delta_{2}),$$

$$\Delta_{0} = u_{m-1}^{n} - u_{m}^{n},$$

$$\Delta_{1} = u_{m-2}^{n} - u_{m-1}^{n},$$

$$\Delta_{2} = u_{m}^{n} - u_{m+2}^{n},$$
(7)

где $\sigma = \frac{a\tau}{h}$, τ — шаг по времени, h — шаг по координате. Данная схема устойчива для чисел

Куранта, которые меньше или равны единице, и имеет третий порядок точности по времени и координате. В качестве модели трещиноватой среды использовалась двухбереговая модель трещины, рассмотренная в [Григорьевых и др., 2015].

3. Построение геологических моделей

Совместно с сотрудниками Научно-технического центра «Газпром нефти» (Павловский Ю. В., Екименко А. В., ООО «Газпромнефть НТЦ») была построена модель трещиноватой геологической среды. Она представляла собой трехмерный слоистый параллелепипед, содержащий флюидонасыщенные трещины. Размер модели составлял 10500 × 10500 × 3900 м. Мощность слоев (сверху вниз): 550 м, 200 м, 3150 м. Первый и третий слои характеризовались следующими параметрами, близкими к параметрам геологических пород: скорость продольных волн 4500 м/с, скорость поперечных волн 2250 м/с, плотность 2500 кг/м³. Второй слой был контрастным и обладал другими характеристиками: скорость продольных волн 6000 м/с, скорость поперечных волн 3000 м/с, плотность 2500 кг/м³. На глубине 600 м во втором слое располагались вертикальные флюидонасыщенные трещины, задаваемые в виде прямоугольников с нормалью вдоль оси *ОХ* и размерами 100 м (вдоль *ОУ* и *ОZ*). Расстояние вдоль *ОХ* и *ОУ* между ближайшими трещинами составляло 50 м. Трещиноватая среда покрывала в горизонтальной плоскости прямоугольник размером 2400 на 2400 м. Описанная модель получила название *vertical_oriented*.

В дальнейшем на основе описанной базовой модели были построены еще три модели, различающиеся характеристиками трещиноватого включения. Рассматривались следующие модификации, включая базовую:

- все трещины вертикальные, ориентированы одинаково вдоль оси *OY*, расстояние между ближайшими составляет 50 м (*vertical_oriented*);
- все трещины вертикальные, ориентированы случайно с равномерным распределением по азимуту, расстояние между ближайшими 150 м (*vertical_random360*);
- все трещины вертикальные, ориентированные случайно по азимуту в диапазоне от -30 до +30 градусов (*vertical_random30*), расстояние между ближайшими 100 м;
- все трещины наклонены к вертикальной оси на 30 градусов, ориентированы одинаково вдоль *OY* (*30grad_oriented*), расстояние между ближайшими 100 м.

Дополнительно были построены две простые модели:

- однородная модель со свойствами, совпадающими со свойством первого слоя (*homogeneous*);
- слоистая модель, полученная из базовой исключением трещиноватого блока (layered).

При проведении всех расчетов в работе использовалась площадная система наблюдений с расстоянием 10 м между ближайшими приемниками. Шаг по времени был выбран 0.8 мс, а всего моделировалось 1440 шагов. В качестве источника использовалось точечное возбуждение, заглубленное на 50 м со временной зависимостью в виде импульса Рикера с частотой 35 Гц.

4. Результаты расчетов

Необходимо отметить, что результатом численного расчета является набор сеточных функций — зависимостей каждой компоненты тензора напряжений и вектора скорости от индекса узла расчетной сетки и момента времени. Ввиду того что при полевых работах наиболее распространено измерение лишь вертикальной компоненты скорости в работе анализировались лишь сейсмограммы, построенные по компоненте V_z . Зарегистрированные синтетические площадные сейсмограммы на первом этапе редуцировались до главных профилей, ориентированных вдоль координатных осей. На рис. 1 представлена сейсмограмма вдоль *OX* (перпендикулярно плоскости трещин) для модели *vertical oriented*.

Четко идентифицируются поверхностные волны и отраженная волна от первой границы раздела слоев. За ней следует сложный сигнал, который и несет информацию о структуре трещиноватого блока. Так как основной интерес представлял собой сигнал-отклик от трещиноватого объекта, была проведена процедура подавления мешающих анализу поверхностных волн. Для этого выполнялся расчет с фиксированной системой наблюдения в модели *homogeneous*, после чего вычислялась разностная сейсмограмма (рис. 2).



Рис. 1. Сейсмограмма вдоль профиля *OX* по вертикальной компоненте скорости для модели *vertical_oriented*. Цветом показана амплитуда сейсмического сигнала. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала



Рис. 2. Сейсмограмма вдоль профиля *OX* по вертикальной компоненте скорости для модели *vertical_oriented*. Выполнена фильтрация поверхностных волн с использованием модели *homogeneous*. Цветом показана амплитуда сейсмического сигнала. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ _



Рис. 3. Сейсмограмма вдоль профиля *OX* по вертикальной компоненте скорости для модели *layered*. Выполнена фильтрация поверхностных волн с использованием модели *homogeneous*. Цветом показана амплитуда сейсмического сигнала. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Оценить вклад трещиноватого объекта в волновое поле можно путем сопоставления приведенных сейсмограмм с аналогичными, полученными для модели *layered* (рис. 3). Предварительно также была проведена процедура фильтрации поверхностных волн. Качественное сопоставление показывает, что значительно искажается второй пик отраженной волны, а также добавляется высокочастотный сигнал в виде шлейфа.

Основной целью работы являлось изучение сейсмического отклика, генерируемого от трещиноватого геологического объекта, включая анализ анизотропии сейсмического сигнала, регистрируемого на дневной поверхности. Для этого производились измерения V_z на концентрических профилях с центром в точке расположения источника и радиусами 500 м, 1000 м, 2000 м и 3000 м. Представляет интерес анализ влияния внутренней структуры трещиноватого объекта как на кинематические, так и на динамические параметры отклика.

На рис. 4 представлены времена регистрации первого отклика для двух моделей: *layered* и *vertical_oriented*. Как видно, они совпадают с высокой точностью. Для остальных моделей (*vertical_random360*, *vertical_random30*, *30grad_oriented*) времена прихода также не отличаются от приведенных, что свидетельствует о том, что структура трещиноватой среды не влияет на кинематические характеристики отклика.

В работе была изучена зависимость амплитуды зарегистрированного сигнала (максимум первого отклика) от азимута на приемник для всех описанных моделей. Для модели *layered* наблюдаемая анизотропия объясняется внутренней анизотропией расчетной схемы, коррекция на которую была в дальнейшем проведена для всех остальных моделей. На рис. 5 представлены результаты для моделей *vertical_oriented* и *vertical_random360*. Для модели *vertical_oriented* наблюдается значимая зависимость амплитуды сигнала от азимута на уровне десятков процентов. В том случае, если ориентация трещин по азимуту хаотична, можно ожидать существенного снижения анизотропии сигнала, хотя некоторая ее часть и может остаться, что обусловлено наличием выделенного направления *OZ* даже в такой рандомизированной среде. На рис. 5 кривые для *vertical_random360* значительно ближе к горизонтальной прямой линии для всех рассматриваемых удалений, что подтверждает предположения.

Также было проведено сравнение сигналов, регистрируемых в моделях vertical_oriented и 30grad_oriented (рис. 6). Для наклонных трещин анизотропия сигнала тоже уменьшилась, что, однако, может означать уход его целевой части из области наблюдения в соответствии с представлениями из геометрической оптики, когда распространение волны считается прямолиней-

ным вдоль некоторого луча с углом падения, равным углу отражения. Необходимо отметить, что данная изученная модель с большим углом отклонения от вертикали носит лишь академический интерес, так как геологические макротрещины, как правило, имеют вертикальную/субвертикальную ориентацию, т. е. не отклоняются от вертикали более чем на 5–10 градусов.

На рис. 7 представлены сигналы, зарегистрированные от всех моделей. В целом, хотя и присутствует общий коридор по амплитуде, в который для каждого радиуса попадают сигналы от всех моделей, наблюдаемая анизотропия по азимуту достаточно велика.



Рис. 4. Время регистрации сигнала в точках дневной поверхности. Зависимость от расстояния до источника R и от азимута. Представлены результаты для моделей *layered* и *vertical_oriented*. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала



Рис. 5. Амплитуды сигнала, зарегистрированного на дневной поверхности на различных удалениях R от источника. Сравнение результатов для моделей *vertical_oriented* и *vertical_random360*. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ





Рис. 6. Амплитуды сигнала, зарегистрированного на дневной поверхности на различных удалениях R от источника. Сравнение результатов для моделей vertical_oriented и 30grad_oriented. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала



Рис. 7. Амплитуды сигнала, зарегистрированного на дневной поверхности на различных удалениях R от источника. Сравнение результатов для моделей vertical_oriented, 30grad_oriented, vertical_random360, vertical_random30. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

5. Заключение

В работе проведена серия расчетов сейсмического отклика от трещиноватой геологической среды в полной трехмерной постановке с изменяющейся внутренней структурой. Использовался сеточно-характеристический метод на гексаэдральных расчетных сетках. Характерный размер построенных трещиноватых моделей — 10 × 10 × 4 км, частота сигнала источника 35 Гц, скоростные характеристики слоев 4500–6000 м/с, протяженность трещин 100 м, с интервалом между ближайшими 50 м. Система наблюдений выбиралась так, чтобы обеспечить регистрацию отраженных волн с углами отражения вплоть до критических. Анализ синтетических сейсмограмм показал, что:

- изученные варианты структуры трещиноватой среды не влияют на время прихода сейсмического отклика;
- при наличии ориентированной структуры в среде наблюдается значимая анизотропия регистрируемого сигнала;
- при хаотизации среды (по азимуту) анизотропия регистрируемого сигнала снижается;
- для всех изученных моделей сред анизотропия сигнала не превышает 40 %.

Использование описанного в статье метода компьютерного моделирования распространения упругих волн в трещиноватых средах предоставляет новую информацию геологам на этапе интерпретации полевых данных сейсмической разведки. Ее использование может уменьшить число сухих скважин и, соответственно, снизить стоимость добычи нефти и газа.

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мегакласса» НИЦ «Курчатовский институт» (http://ckp.nrcki.ru/).

Список литературы (References)

- Григорьевых Д. П., Хохлов Н. И., Петров И. Б. Математическое моделирование трещин в твердых деформируемых телах с использованием гексаэдральных сеток // Труды Московского физико-технического института. — 2015. — Т. 7, № 4 (28). — С. 28–37. *Grigorievikh D. P., Khokhlov N. I., Petrov I. B.* Matematicheskoe modelirovanie treschin v tverdikh deformiruemikh telakh c ispolzovaniem geksaedralnikh setok [Mathematical simulation of cracks in solid deformable bodies with the usage of hexahedral meshes] // Trudi Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo instituta. — 2015. — Vol. 7, No. 4 (28). —
- P. 28–37. Carcione J. M., Herman G. C., Kroode P. E. Y2K Review Article: Seismic modeling // Review Litera-
- ture And Arts Of The Americas. 2002. Vol. 67, Is. 4. P. 1304–1325. *Virieux J., Calandra H., Plessix R. E.* A review of the spectral, pseudo-spectral, finite-difference and
- finite-element modelling techniques for geophysical imaging // Geophysical Prospecting. 2011. Vol. 59, Is. 5. P. 794–813.
- Golubev V. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I., Shul'ts K. I. Numerical computation of wave propagation in fractured media by applying the grid-characteristic method on hexahedral meshes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 55, Is. 3. — P. 509–518.
- Kvasov I. E., Pankratov S. A., Petrov I. B. Numerical study of dynamic processes in a continuous medium with a crack initiated by a near-surface disturbance by means of the grid-characteristic method // Math. Models. Comput. Simul. — 2011. — Vol. 3, Is. 3. — P. 399–409.
- Golubev V. I., Gilyazutdinov R. I., Petrov I. B., Khokhlov N. I., Vasyukov A. V. Simulation of dynamic processes in three-dimensional layered fractured media with the use of the grid-characteristic numerical method // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2017. — Vol. 58, Is. 3. — P. 539–545.
- Petrov I. E., Kholodov A. S. Numerical study of some dynamic problems of the mechanics of a deformable rigid body by the mesh-characteristic method // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1984. — Vol. 24, Is. 3. — P. 61–73.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S. The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1969. Vol. 9, Is. 2. P. 158–176.