

УДК: 627.157

## Движение влекомых наносов над периодическим дном

Ю. Г. Крат<sup>а</sup>, И. И. Потапов<sup>б</sup>

Вычислительный центр, Дальневосточное отделение Российской академии наук,  
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: <sup>а</sup> kratyuliya@mail.ru, <sup>б</sup> potapovii@rambler.ru

*Получено 05.10.2017, после доработки — 28.11.2017.  
Принято к публикации 11.12.2017.*

Движение влекомых наносов по дну напорного канала может приводить к потере устойчивости донной поверхности, когда на дне канала возникают донные волны. Исследование процесса развития донных волн связано с возможностью определения характера движения влекомых наносов по дну периодической формы. Несмотря на большое внимание многих исследователей к данной проблеме, вопрос о развитии процесса донных волн остается открытым и в настоящее время. В значительной мере это связано с тем, что при анализе данного процесса многие исследователи используют в своих работах феноменологические формулы движения влекомых наносов. Полученные в таких моделях результаты позволяют лишь качественно оценить процесс развития донных волн. По этой причине представляет интерес проведение анализа развития донных волн с использованием аналитической модели движения влекомых наносов.

В работе предложена двумерная профильная математическая русловая модель, позволяющая исследовать движение влекомых наносов над периодическим дном. Особенностью математической модели является возможность расчета расхода влекомых наносов по аналитической модели с реологией Кулона – Прандтля, учитывающей влияние уклонов поверхности дна, придонных нормальных и касательных напряжений на процесс движения донного материала. Показано, что при движении донного материала по дну периодической формы диффузионные и напорные расходы влекомых наносов являются разнонаправленными и доминирующими по отношению к транзитному расходу. Изучались влияния параметра перекошенности донной волны на вклад транзитного, диффузионного и напорного расходов в полный расход влекомых наносов. Выполнено сравнение полученных результатов с численными решениями других авторов для донной поверхности косинусоидальной формы.

Ключевые слова: математическое моделирование, напорный канал, донные волны, влекомые наносы, расход влекомых наносов

UDC: 627.157

## Movement of sediment over periodic bed

Yu. G. Krat<sup>a</sup>, I. I. Potapov<sup>b</sup>

Computing Center of Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences,  
Kim-Yu-Chen st. 65, Khabarovsk, 680000, Russia

E-mail: <sup>a</sup> kratyuliya@mail.ru, <sup>b</sup> potapovii@rambler.ru

*Received 05.10.2017, after completion – 28.11.2017.*

*Accepted for publication 11.12.2017.*

The movement of bed load along the closed conduit can lead to a loss of stability of the bed surface, when bed waves arise at the bed of the channel. Investigation of the development of bed waves is associated with the possibility of determining of the bed load nature along the bed of the periodic form. Despite the great attention of many researchers to this problem, the question of the development of bed waves remains open at the present time. This is due to the fact that in the analysis of this process many researchers use phenomenological formulas for sediment transport in their work. The results obtained in such models allow only assess qualitatively the development of bed waves. For this reason, it is of interest to carry out an analysis of the development of bed waves using the analytical model for sediment transport.

The paper proposed two-dimensional profile mathematical riverbed model, which allows to investigate the movement of sediment over a periodic bed. A feature of the mathematical model is the possibility of calculating the bed load transport according to an analytical model with the Coulomb–Prandtl rheology, which takes into account the influence of bottom surface slopes, bed normal and tangential stresses on the movement of bed material. It is shown that when the bed material moves along the bed of periodic form, the diffusion and pressure transport of bed load are multidirectional and dominant with respect to the transit flow. Influence of the effects of changes in wave shape on the contribution of transit, diffusion and pressure transport to the total sediment transport has been studied. Comparison of the received results with numerical solutions of the other authors has shown their good qualitative initiation.

Keywords: mathematical modeling, closed conduit, bed wave, bed load, bed load transport

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 47–60 (Russian).

This work was supported by the comprehensive program of fundamental research of the Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, section 5.1.8, grant 15-I-4-070.

## 1. Введение

Река в процессе движения захватывает донные частицы, переносит их, тем самым меняет рельеф дна, а изменившийся рельеф дна меняет гидродинамику потока [Dodds, Rothman, 2003]. Этот связанный процесс называется русловым процессом. Движение донных частиц может приводить к потере устойчивости донной поверхности, когда на дне возникают донные волны (см., например, [Kennedy, 1963; Kennedy, 1969; Шуляк, 1971; Гришанин, 1974] и др.). Донные волны приводят к изменению гидравлического сопротивления потоку и меняют характер транспорта донных частиц. Поэтому изучение русловых процессов, при которых происходит потеря устойчивости дна, актуально.

В настоящее время существует большое количество гипотез, определяющих причины, по которым происходит развитие донных волн.

Гончаров В. Н. [Гончаров, 1962] связывал развитие донных волн с вихревым характером обтекания частиц, слагающих дно канала.

Кеннеди Дж. Ф. [Kennedy, 1963; Kennedy, 1969], Кереселидзе Н. Б. [Кереселидзе, 1968] развитие донных волн связывали с передачей возмущений, возникающих на свободной поверхности потока при некоторых значениях числа Фруда, ко дну.

Энгелунд Ф. и Фредсо Дж. [Engelund, Fredsoe, 1982] развитие донных волн связывали с фазовым сдвигом между максимумами средней скорости потока и придонными напряжениями, определяющими движение донных наносов.

В работах Гришанина К. В. [Гришанин, 1979], Мельниковой О. Н. [Мельникова, 2006], Михайловой Н. А. [Михайлова, 1966] показано, что развитию донных волн способствуют имеющиеся в турбулентном потоке пульсации, соизмеримые по масштабу с глубиной потока.

Бэгнольд [Шуляк, 1971], Дебольский В. К. [Железняков, Дебольский, 1971], Шуляк Б. А. [Шуляк, 1971], Коулман С. Е. [Coleman et al., 2003] считали, что диаметр донного материала определяет характер развития донных волн.

Несмотря на достаточное внимание исследователей к данной проблеме (см., например, [Kennedy, 1963–1969; Engelund, Fredsoe, 1982; Шуляк, 1971; Tjerry, 1995; Sanne, 2003; Coleman, 2003] и др.), вопрос о развитии процесса донных волн остается открытым и в настоящее время. В значительной мере это связано с тем, что при анализе процесса развития донных волн используются феноменологические модели движения донного материала (см., например, [Engelund, Fredsoe, 1982; Tjerry, 1995; Sanne, 2003; Coleman, 2003] и др.), что затрудняет или делает невозможным анализ процессов, приводящих к возникновению донных волн. По этой причине представляет интерес проведение анализа развития донных волн с использованием аналитической модели движения донного материала.

В данной работе на основе математической модели, предложенной в [Крат, 2016], сформулирована и решена задача движения донного материала по дну периодической формы в напорном канале. Для расчета движения донного материала применена аналитическая формула расхода влекомых наносов [Петров, Потапов, 2014], учитывающая влияние уклонов дна, придонных нормальных и касательных напряжений на процесс движения донного материала.

Численные исследования выявили, что при движении донного материала по дну периодической формы расходы влекомых наносов, связанные с уклонами дна и градиентом придонного давления, разнонаправлены и доминируют над расходом, связанным с придонным касательным напряжением.

Изучались влияния параметра перекошенности донных волн на поля расходов влекомых наносов и скоростей изменения донной поверхности при обтекании гидродинамическим потоком периодического дна.

Для оценки полученных результатов приведено сравнение численных расчетов с решениями других авторов.

## 2. Математическая модель задачи

Исследование процесса развития донных волн связано с возможностью определения характера движения влекомых наносов по дну периодической формы. Рассмотрим математическую постановку задачи движения влекомых наносов над периодическим дном напорного канала в двумерной профильной постановке. Расчетная область задачи приведена на рис. 1. Ось  $x$  направлена по течению потока. Координата  $z$  направлена перпендикулярно вверх (рис. 1).

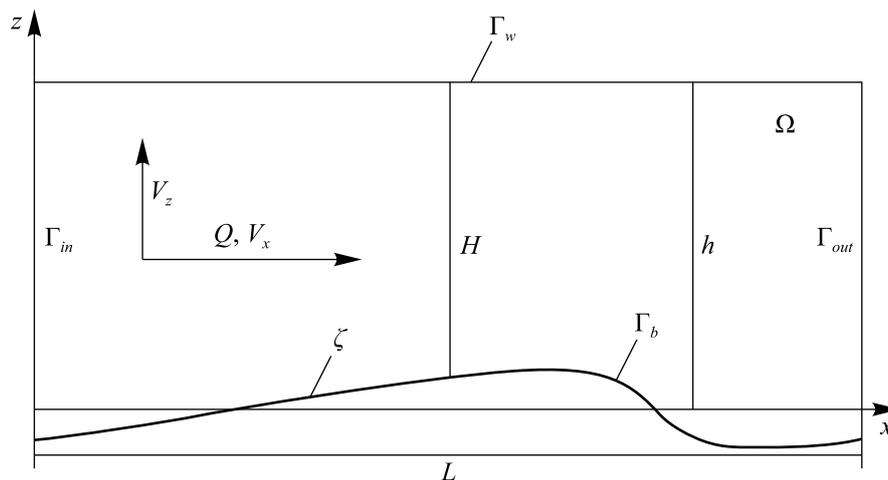


Рис. 1. Схема расчетной области напорного канала с периодической донной поверхностью

Пусть  $z = \zeta(t, x)$  — отметка дна,  $H = h + \zeta(t, x)$  — глубина напорного канала,  $h$  — средняя глубина напорного канала,  $L$  — длина донной волны.

Математическая постановка рассматриваемой задачи включает в себя:

– профильные уравнения Рейнольдса [Розовский, 1957]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\rho_w} \mathbf{F} + \frac{1}{\rho_w} (\nabla \cdot \mathbf{T}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

– уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где  $t$  — время,  $\mathbf{x} = \{x, z\}$  — вектор пространственных координат расчетной области  $\Omega$ ,  $\mathbf{V} = \{V_x, V_z\}$  — вектор осредненной скорости потока,  $\mathbf{F} = \{F_x, F_z\}$  — компоненты вектора объемных сил,  $\rho_w$  — плотность воды.

Тензор напряжений  $\mathbf{T}$  определяется уравнением состояния [Розовский, 1957]

$$\mathbf{T} = -P \boldsymbol{\delta} + (\nu_t + \nu) (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где  $P$  — гидродинамическое давление,  $\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — символ Кронекера,  $\nu$  — кинематическая вязкость потока,  $\nu_t$  — кинематический коэффициент турбулентной вязкости потока.

Турбулентная вязкость потока  $\nu_t$  определяется по алгебраической модели турбулентности [Розовский, 1957]:

$$\nu_t = \frac{gHV}{MC_s}, \quad M = 0.7C_s + 6.0, \quad C_s = 6.67 \sqrt{g} \left( \frac{H}{d} \right)^{1/6}, \quad (4)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $H$  — глубина гидродинамического потока,  $V$  — осредненная по глубине скорость потока,  $C_s$  — коэффициент Шези,  $d$  — диаметр донного материала.

Расчетная область  $\Omega$  снизу ограничена подвижной донной поверхностью  $\zeta$ , для определения которой используется кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s(1-\varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad x \in \Gamma_b, \quad (5)$$

где  $\rho_s$  — плотность донных частиц,  $\varepsilon$  — коэффициент пористости песчаного дна,  $G$  — удельный массовый расход влекомых наносов, который определяется по аналитической модели [Петров, Потапов, 2014], учитывающей локальные уклоны донной поверхности, придонные касательные и нормальные напряжения

$$G = G_0 T^{3/2} \left( A - B \frac{\partial \zeta}{\partial x} - C \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (6)$$

где

$$A = 1 - \chi, \quad B = \frac{1}{\tan \varphi} \left( \frac{\chi}{2} + (1 - \chi) \frac{1+s}{s} \right), \quad C = \frac{1 - \chi}{s \tan \varphi},$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s}{\sqrt{\rho_w \kappa F_a}}, \quad T_0 = \frac{9 \kappa^2 d F_a}{8 c_x}, \quad F_a = g(\rho_s - \rho_w),$$

$$\chi = \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad s = f \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, \quad p = \frac{P_b}{g \rho_w}.$$

Здесь  $T_0$  — напряжение, определяющее начало движения донных частиц,  $s$  — параметр стратификации активного придонного слоя, в котором переносятся донные частицы,  $f$  — концентрация влекомых частиц в активном придонном слое,  $\varphi$  — угол внутреннего трения донных частиц,  $\kappa$  — постоянная Кармана,  $c_x$  — коэффициент лобового сопротивления донных частиц,  $d$  — диаметр частиц потока,  $P_b$  — придонное давление,  $p$  — гидравлический напор.

Вектор сил  $\mathbf{R} = \{R_x, R_z\}$  на поверхности нижней границы  $\Gamma_b$  определен как

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{R}, \quad T = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad P_b = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_b, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n} = (n_x, n_z)$  — вектор нормали,  $\boldsymbol{\tau} = (-n_z, n_x)$ .

Уравнения (1)–(7) замыкаются периодическими граничными условиями в расчетной области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_w \cup \Gamma_b$ , представленной на рис. 1.

На входе  $\Gamma_{in}$  и выходе  $\Gamma_{out}$  расчетной области  $\Omega$  установим периодические граничные условия:

$$\mathbf{V}(t, x, z) = \mathbf{V}(t, x + L, z), \quad x, z \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \quad (8)$$

$$G(t, x) = G(t, x + L), \quad x \in \Gamma_{in}, \Gamma_{out}. \quad (9)$$

На верхней ( $\Gamma_w$ ) и нижней ( $\Gamma_b$ ) границах расчетной области  $\Omega$  выполняются статические граничные условия:

$$\mathbf{V}(t, x, z) = 0, \quad x, z \in \Gamma_w, \Gamma_b. \quad (10)$$

Для замыкания уравнений (1)–(6) установим начальные условия:

$$\mathbf{V}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{V}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (11)$$

$$\zeta(0, \mathbf{x}) = \zeta_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_b, \quad (12)$$

где  $\mathbf{V}^0 = \{V_x^0, V_z^0\}$  — вектор скорости потока в начальный момент времени,  $\zeta_0$  — начальный уровень донной поверхности, определенной на границе  $\Gamma_b$ .

### 3. Анализ влияния геометрии донных волн на движение влекомых наносов

На основе математической постановки задачи (1)–(12) рассмотрено влияние перекошенности донной волны на характер движения донного материала. Выполнен анализ вклада различных механизмов движения донного материала по дну периодической формы, представленной на рис. 1. Периодическая донная поверхность  $\zeta$  определялась параметрической формулой, предложенной в работе [Крат, 2016]:

$$Z = F + S_n, \quad F = -\sin \frac{\pi x}{2}, \quad S_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ x^{2n-1}, & n > 1, \end{cases}$$

где  $n = \overline{1, N}$  – параметр перекошенности донной волны.

Функция  $Z(x)$  использовалась как прототип для получения периодической функции дна  $\zeta(x) = \zeta(x + L)$ . Для этого периодическая функция дна  $\zeta(x) = \zeta(x + L)$  представлялась в виде конечного ряда Фурье:

$$\zeta(x) = \zeta_0 \sum_{m=1}^M C_m \sin \frac{2\pi m x}{L},$$

коэффициенты которого определялись по формуле

$$C_m = \int_{-1}^1 Z(x) \sin \frac{2\pi m x}{L} dx \cdot \left( \int_{-1}^1 \left( \sin \frac{2\pi m x}{L} \right)^2 dx \right)^{-1},$$

где  $\zeta_0$  – амплитуда донной волны.

На рис. 2 кривыми 1–4 показана геометрия донной поверхности напорного канала для различных значений параметра перекошенности донной волны  $n = 0, 2, 4, 6$ . Полученные кривые для  $\zeta$  использовались в качестве начальной геометрии донной поверхности в задаче (1)–(12).

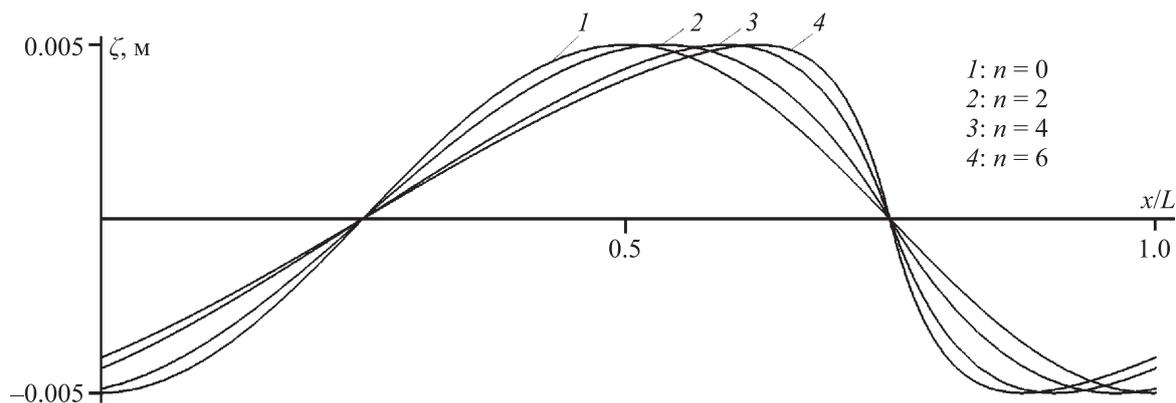


Рис. 2. Геометрия донной поверхности напорного канала для различных значений параметра перекошенности донной волны,  $n = 0, 2, 4, 6$

Для решения задачи (1)–(12) использовался алгоритм, предложенный в работе [Крат, 2016], основанный на методе контрольных объемов [Патанкар, 1984].

Расчеты велись при следующих параметрах:  $L = 0.1$  м,  $H = 0.05$  м,  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $Q = 0.025$  м<sup>3</sup>/с,  $z_0 = 0.005$  м,  $\rho_s = 2650$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varphi = 28$ ,  $d = 0.001$  м,  $\kappa = 0.2$ ,  $f = 0.1$ ,  $c_x = 0.5$ .

При выполнении анализа влияния параметра перекошенности донной волны  $n$  на движение влекомых наносов формула (6) была записана в виде

$$G = G_1 + G_2 + G_3,$$

где

$$G_1 = G_0 T^{3/2} A, \quad G_2 = -G_0 T^{3/2} B \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad G_3 = -G_0 T^{3/2} C \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (13)$$

Здесь  $G_1$  — доля расхода влекомых наносов на невозмущенном дне (транзитный расход),  $G_2$  — доля расхода влекомых наносов, определяемая уклоном донной поверхности (диффузионный расход, характеризующий гравитационное осыпание донного материала),  $G_3$  — доля расхода влекомых наносов, определяемая градиентом придонного напора (напорный расход).

При анализе мгновенных расходов влекомых наносов, определяемых по формулам (13), использовались геометрии донных волн, представленные на рис. 2, определяемые значением параметра перекошенности донной волны  $n$ .

На рис. 3 представлены кривые 1–4 демонстрируют полные расходы влекомых наносов в зависимости от параметра перекошенности донной волны  $n$ .

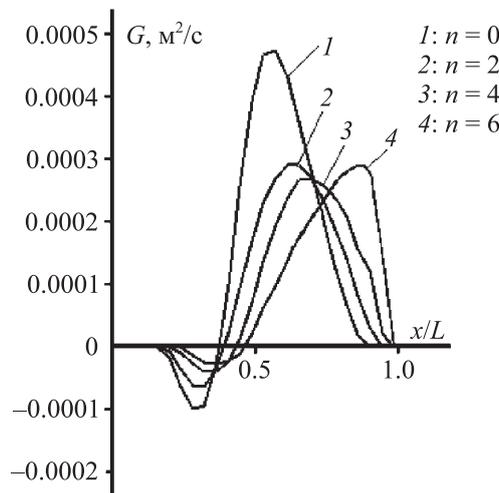


Рис. 3. Зависимость полного объемного расхода  $G$  от параметра перекошенности донной волны  $n$

Анализ полученных кривых показывает, что с ростом параметра перекошенности донной волны  $n$  максимальные значения расходов влекомых наносов по отношению к расходу для симметричной донной волны ( $n = 0$ ) уменьшаются в 0.62, 0.55 раза при  $n = 2, 4$  и снова возрастают до значения 0.61 при  $n = 6$ .

Это объясняется тем, что максимальные значения расходов от придонных касательных напряжений  $T$ , развивающиеся на напорном склоне донной волны, уменьшаются с ростом параметра перекошенности (рис. 4), при этом уменьшается доля расхода транзитных наносов  $G_1$  (рис. 5, кривые 1–4). Соответственно, на напорном склоне донной волны уменьшаются расходы, определяемые уклоном дна (рис. 6, кривые 1–4) и градиентом гидравлического напора (рис. 7, кривые 1–4). Дальнейший рост перекошенности донной волны  $n = 6$  приводит к тому, что значение ее уклона  $\partial \zeta / \partial x$  на подветренном склоне увеличивается, приводя к увеличению гравитационного осыпания донного материала (рис. 6, кривая 4) и, как следствие, к росту максимального расхода наносов.

На рис. 5, 6 и 7 представлены графики расходов влекомых наносов (13), определяемые механизмами транзитного ( $G_1$ ), диффузионного ( $G_2$ ) и напорного ( $G_3$ ) движения донного материала.

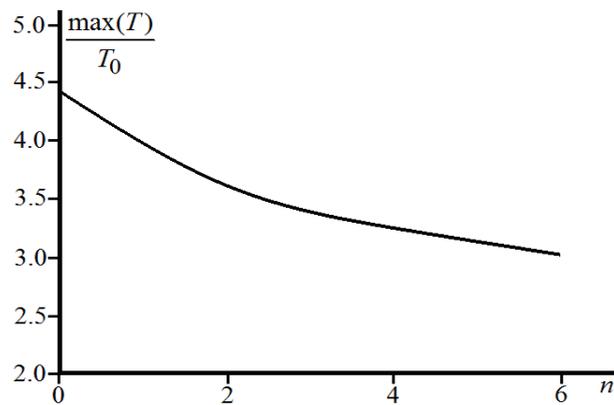


Рис. 4. График интерполяции максимальных значений придонных касательных напряжений  $T$  в зависимости от параметра перекошенности донной волны  $n$

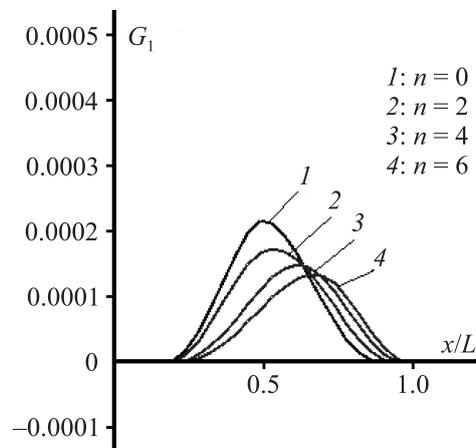


Рис. 5. Изменение транзитного расхода  $G_1(T)$  от параметра перекошенности донной волны  $n$

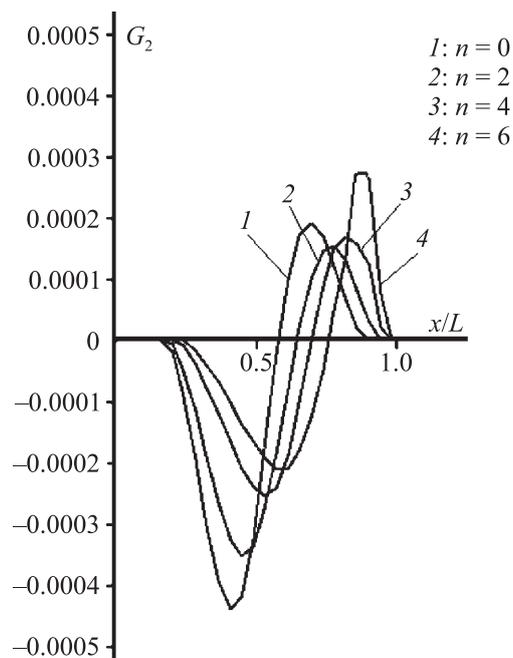


Рис. 6. Изменение диффузионного расхода  $G_2(\partial\zeta/\partial x)$  от параметра перекошенности донной волны  $n$

На рис. 5 кривыми 1–4 представлены транзитные расходы влекомых наносов, полученные при различных параметрах перекошенности донной волны. Анализ кривых показывает, что с ростом параметра перекошенности доля транзитных наносов по отношению к транзитному расходу для симметричной донной волны ( $n = 0$ ) уменьшается в 0.75, 0.66, 0.57 раза для  $n = 2, 4, 6$  соответственно. Это объясняется тем, что максимум придонных касательных напряжений  $T$ , развивающийся на напорном склоне донной волны, уменьшается с ростом параметра  $n$  (рис. 5).

На рис. 6 кривыми 1–4 представлены диффузионные расходы влекомых наносов, полученные при различных параметрах перекошенности донной волны. Анализ полученных кривых показывает, что движение донного материала является разнонаправленным для напорного и подветренного склона донной волны.

С ростом параметра перекошенности донной волны  $n$  максимальные значения диффузионных расходов на напорном склоне по отношению к диффузионному расходу для симметричной донной волны ( $n = 0$ ) уменьшаются в 0.8, 0.6, 0.48 раза для  $n = 2, 4, 6$  соответственно. Уменьшение максимальных значений диффузионного расхода на напорном склоне донной волны связано как с уменьшением значений касательных придонных напряжений на напорном склоне (рис. 4), так и с уменьшением величины уклона напорного склона донной волны  $\partial\zeta/\partial x$ , происходящем при увеличении параметра перекошенности донной волны  $n$ .

Зависимость максимальных значений диффузионного расхода на подветренном склоне донной волны является более сложной. Для параметра перекошенности донной волны  $n = 2$  уменьшение значений придонных касательных напряжений (рис. 4) приводит к уменьшению диффузионного расхода в 0.79 раза по отношению к расходу для симметричной донной волны ( $n = 0$ ). Дальнейшее возрастание параметра перекошенности донной волны  $n = 4, 6$  приводит к росту максимальных значений расхода гравитационного осыпания в 0.89, 1.42 раза (рис. 6) в связи с увеличением уклона подветренного склона донной волны.

На рис. 7 кривыми 1–4 представлены напорные расходы влекомых наносов, полученные при различных параметрах перекошенности донной волны. Анализ кривых показывает, что движение донного материала, как и при диффузионном расходе влекомых наносов, является разнонаправленным для напорного и подветренного склонов донной волны. Однако доминирующим является расход наносов на напорном склоне донной волны, который более чем в 16 раз превышает расход на подветренном склоне. С ростом параметра перекошенности донной волны максимальные значения напорных расходов влекомых наносов по отношению к напорному расходу для симметричной донной волны ( $n = 0$ ) монотонно уменьшаются в 0.66, 0.56, 0.44 раза для  $n = 2, 4, 6$ .

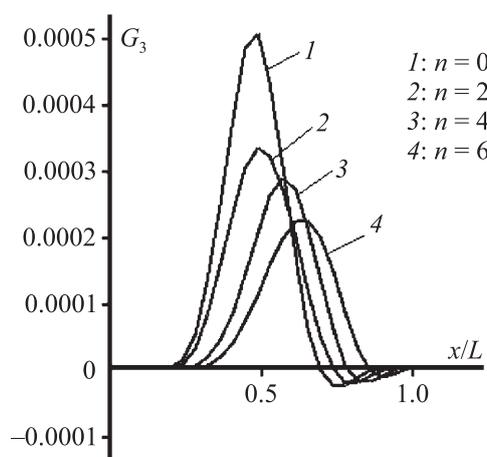


Рис. 7. Изменение напорного расхода  $G_3(\partial p/\partial x)$  от параметра перекошенности донной волны  $n$

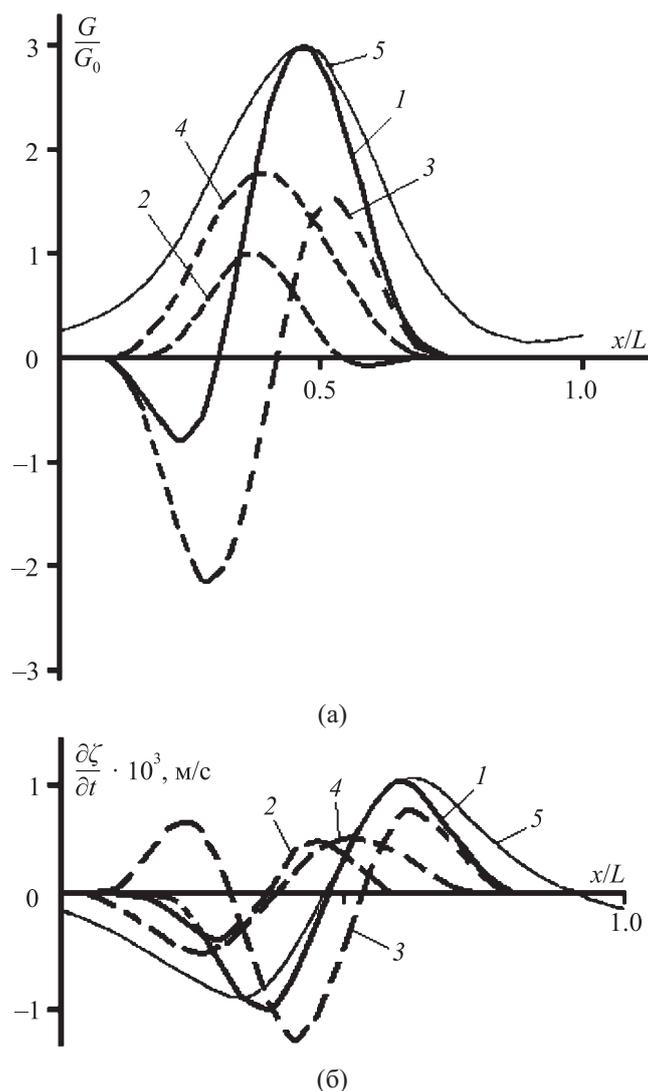


Рис. 8. Сравнение решений, полученных по предложенной русловой модели с численными результатами, представленными в [Richards, Taylor, 1981]: кривые 1 — полный расход влекомых наносов и скорость изменения дна; кривые 2, 3, 4 — расходы влекомых наносов  $G_1, G_2, G_3$ , влияющие на движение донного материала и скорость изменения дна; кривые 5 — расход наносов, определяемый феноменологической моделью Бэгнольда [Richards, Taylor, 1981], и скорость изменения дна

Для оценки полученных результатов приведено их сравнение с численными решениями, представленными в работе [Richards, Taylor, 1981] (рис. 8).

На рис. 8 кривыми 1–4 представлены результаты численных расчетов для косинусоидального дна (параметр перекошенности донной волны  $n = 0$ ), полученные по математической модели (1)–(12).

На рис. 8, а кривые 2–4 отражают вклад долей расходов влекомых наносов  $G_1, G_2, G_3$  в полный расход  $G$  (кривая 1). На рис. 8, б кривые 2–4 отражают скорости изменения дна, формируемые вкладами долей расходов  $G_1, G_2, G_3$  и полным расходом  $G$  (кривая 1).

Кривыми 5 показан расход влекомых наносов (рис. 8, а) и формируемая им скорость изменения донной поверхности (рис. 8, б), полученные в работе [Richards, Taylor, 1981] с использованием феноменологической модели движения влекомых наносов Бэгнольда. Отметим качественное согласование полных расходов движения донного материала (рис. 8, а, кривые 1 и 5)

и скоростей изменения донной поверхности канала (рис. 8, б, кривые 1 и 5). Количественные отличия в расходах можно объяснить тем, что в работе [Richards, Taylor, 1981] при выполнении расчетов авторы полагали, что  $T \gg T_0$  и значением  $T_0$  можно пренебречь. Однако, как видно из графиков (рис. 8), это предположение справедливо только для участка, близкого к вершине донной волны.

Из полученных результатов следует, что при развитии донных волн наиболее значащий вклад в расход влекомых наносов вносят диффузионные ( $G_2$ ) и напорные ( $G_3$ ) доли расходов. Максимальные значения данных расходов в 1.8 и 2 раза превосходят расход, определяемый транзитным расходом влекомых наносов  $G_1$ . Однако для определения влияния долей расходов на характер развития донной волны при разных значениях параметра ее перекошенности необходимо исследовать значения градиентов транзитного, диффузионного и напорного расходов над вершиной волны. Это следует из уравнения Экснера (5), поскольку суммарное значение гра-

диентов  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial G_k}{\partial x}$  над вершиной донной волны определяет направление ее развития: намыв или размыв. Результаты исследований зависимости градиентов расходов от параметра перекошенности, аппроксимированные для удобства анализа в виде кривых, приведены на рис. 9, а и 9, б. Из приведенных результатов следует, что градиенты диффузионного и напорного расходов (кривые 2, 3) в целом доминируют над градиентом транзитного расхода (кривая 1).

Из результатов, приведенных на рис. 9, а, следует, что при относительной амплитуде донной волны  $\zeta_0/H = 0.02$  положительные градиенты транзитного и напорного расходов (кривые 1, 3) доминируют над градиентом диффузионного (кривая 2)  $\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_3}{\partial x} > \left| \frac{\partial G_2}{\partial x} \right|$ , что приво-

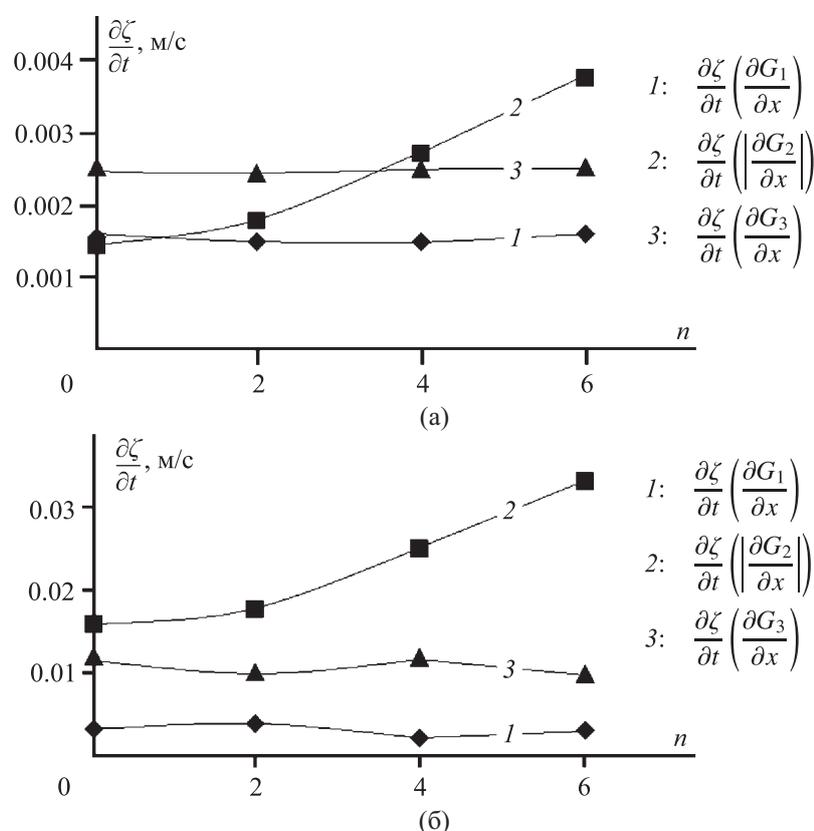


Рис. 9. Изменение скоростей движения донной волны с различными амплитудами  $\zeta_0$  от параметра ее перекошенности  $n$ : а)  $\zeta_0 = 0.001$  м; б)  $\zeta_0 = 0.005$  м

дит к росту донной волны. Увеличение параметра перекошенности волны при данной амплитуде приводит к росту отрицательного градиента диффузионного расхода  $\frac{\partial G_2}{\partial x}$ , что при высоких значениях параметра перекошенности волны может приводить к ее размыву.

При увеличении амплитуды донной волны ( $\zeta_0/H = 0.1$ ) (рис. 9, б) градиент диффузионного расхода влекомых наносов (кривая 2) доминирует над градиентами транзитного и напорного расходов (кривые 1, 3)  $\left| \frac{\partial G_2}{\partial x} \right| > \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_3}{\partial x}$ , что приводит к размыву волны.

Из результатов, приведенных на рис. 9, а и 9, б, следует, что при увеличении параметра перекошенности донной волны  $n$  градиенты транзитного и напорного расходов над вершиной волны (кривые 1, 3) изменяются слабо и зависят только от относительной ее высоты  $\zeta_0/H$ , а градиент диффузионного расхода (кривая 2) возрастает, что при малых амплитудах растущих донных волн может приводить к остановке их роста, а при больших амплитудах — ускорять размыв донных волн.

## Заключение

1. Предложена двумерная профильная математическая русловая модель для исследования скорости движения донной поверхности и расхода влекомых наносов в зависимости от геометрии донной поверхности напорного канала. Особенностью предложенной математической модели является учет транспорта влекомых наносов по аналитической модели с реологией Кулона – Прандтля, учитывающей влияние уклонов поверхности дна, придонных нормальных и касательных напряжений на движение донного материала.

2. Показано, что при развитии донных волн диффузионные и напорные расходы влекомых наносов являются разнонаправленными и доминирующими по отношению к транзитному расходу. Проведен анализ влияния параметра перекошенности донной волны на вклад транзитного, диффузионного и напорного расходов в полный расход влекомых наносов. С ростом параметра перекошенности донной волны уменьшаются максимальные значения придонных касательных напряжений, что приводит к монотонному уменьшению расходов влекомых наносов, определяемых транзитным и напорным расходами.

3. Показано, что при развитии донных волн градиенты диффузионного расхода являются отрицательными по отношению к положительным градиентам напорного и транзитного расходов. Если над вершиной донной волны доминирует градиент диффузионного расхода, то происходит сглаживание донной волны, а при доминировании градиентов транзитного и напорного расходов происходит рост волны на дне канала. Из расчетов следует, что донные волны с маленькой амплитудой растут, а волны с большой амплитудой размываются. Следовательно, для любых значений параметра перекошенности донной волны должна существовать критическая высота волны, при которой механизмы роста и сглаживания донных волн находятся в равновесии. С увеличением перекошенности донной волны ее критическая высота должна уменьшаться.

4. Выполнено сравнение полученных результатов с численными решениями других авторов для периодической донной поверхности, показавшее их качественное согласование.

## Список литературы (References)

- Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков: учебник. — Л.: Изд-во ГИМИЗ, 1962. — 368 с.  
 Goncharov V. N. Dinamika ruslovykh potokov [Dynamics of channel flows]. — Leningrad: Izd-vo GIMIZ, 1938. — 368 p. (in Russian).
- Гришанин К. В. Устойчивость русел рек и каналов. — Л.: Гидрометеиздат, 1974. — 143 с.  
 Grishanin K. V. Ustojchivost' rusel rek i kanalov [Stability of the river and canal channels]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1974. — 143 p. (in Russian).

- Гришанин К. В.* Динамика русловых потоков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 211 с.  
*Grishanin K. V.* Dinamika ruslovyh potokov [Dynamics of channel flows]. — 2-e izd., pererab. i dop. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1979. — 211 p. (in Russian).
- Железняков Г. В., Дебольский В. К.* О грядовом движении наносов при их различной плотности // Докл. ВАСХНИЛ. — 1971. — № 2.  
*Zheleznyakov G. V., Debol'skij V. K.* O grjadovom dvizhenii nanosov pri ih razlichnoj plotnosti [Ridge sediment movement with their different density] // Dokl. VASHNIL. — 1971. — No. 2. (in Russian).
- Кереселидзе Н. Б.* К проблеме устойчивости течения потока и его твердых границ в размываемых грунтах // Тр. ТНИИСГЭИ. — 1968. — Вып. 1.  
*Kereselidze N. B.* K probleme ustojchivosti techenija potoka i ego tverdyh granic v razmyvaemyh gruntah [The problem of stability of flow and its solid boundaries in eroded bed] // Tr. TNISGJEI. — 1968. — Vol. 1 (in Russian).
- Крат Ю. Г.* Математическое моделирование донной неустойчивости в каналах с песчаным основанием: диссертация канд. физ.-мат. наук (05.13.18), защищена 21.02.17. ФГБОУ Науки ВЦ ДВО РАН, Хабаровск, 2017. — 116 с.  
*Krat Yu. G.* Matematicheskoe modelirovanie donnoj neustojchivosti v kanalakh s peschanyim osnovaniem: dissertacija kand. fiz.-mat. nauk (05.13.18), zashhishhena 21.02.17. [Mathematical modeling of the instability bed in channels with sandy base: thesis of Cand. fiz.-mat. Sciences (05.13.18), protected 21.02.17.] — FGBOU Nauki VC DVO RAN, Habarovsk, 2017. — 116 p. (in Russian).
- Крат Ю. Г., Потанов И. И.* Устойчивость дна в напорных каналах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7. — С. 1061–1068.  
*Krat Yu. G., Potapov I. I.* Ustojchivost' dna v napornyh kanalakh [Bottom stability in closed conduits] // Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. — 2015. — Vol. 7. — P. 1061–1068 (in Russian).
- Крат Ю. Г., Потанов И. И.* Влияние размера частиц донных наносов на длину волны донных возмущений в напорных каналах // Прикладная механика и техническая физика. — 2016. — Т. 57, № 3. — С. 60–64.  
*Krat Yu. G., Potapov I. I.* Vlijanie razmera chastic donnyh nanosov na dlinu volny donnyh vozmushhenij v napornyh kanalakh [Effect of sediment particle size on bed wavelength in closed conduits] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2016. — Vol. 57, No. 3. — P. 60–64 (in Russian).
- Мельникова О. Н.* Динамика руслового потока: учебное пособие. — М.: МАКС Пресс, 2006. — 139 с.  
*Mel'nikova O. N.* Dinamika ruslovogo potoka: uchebnoe posobie [Dynamics of the channel flow]. — Moscow: MAKS Press, 2006. — 139 p. (in Russian).
- Михайлова Н. А.* Перенос твердых частиц турбулентными потоками воды. — Л.: Гидрометеиздат, 1966. — 236 с.  
*Mihajlova N. A.* Perenos tverdyh chastic turbulentnymi potokami vody [The transport of solid particles by turbulent water flows]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1966. — 236 p. (in Russian).
- Патанкар С. В.* Численные методы решения задачи теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.  
*Patankar S.* Numerical heat transfer and fluid flow. — New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980 (in English).
- Петров А. Г., Потанов И. И.* Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // Прикладная механика и техническая физика. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 100–105.  
*Petrov A. G., Potapov I. I.* Perenos nanosov pod dejstviem normal'nyh i kasatel'nyh pridonnyh naprjazhenij s uchetom uklona dna [Sediment transport under normal and tangential bottom stresses with the bottom slope taken into account] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2014. — Vol. 55, No. 5. — P. 100–105 (in Russian).
- Розовский И. Л.* Движение воды на повороте открытого русла. — Киев: Изд. АН УССР, 1957. — 188 с.  
*Rozovskij I. L.* Dvizhenie vody na povorote otkrytogo rusla [Movement of water at the turn of the open channel]. — Kiev: Izd. AN USSR, 1957. — 188 p. (in Russian).
- Шуляк Б. А.* Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости. — М.: Наука, 1971.  
*Shulyak B. A.* Fizika voln na poverhnosti sypuchej sredy i zhidkosti [Dynamics of the channel flow]. — Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).

- Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.* Closed-conduit bed-forms initiation and development // *Journal of Hydraulic Engineering*. — 2003. — Vol. 129, No. 12. — P. 956–965.
- Dodds P. S., Rothman D. H.* Scaling, universality and geomorphology // *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* — 2000. — Vol. 28. — P. 571–610.
- Engelund F., Fredsoe J.* Sediment ripples and dunes // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1982. — Vol. 4. — P. 13–37.
- Fredsoe J.* Shape and dimensions of stationary dunes in rivers // *J. of the Hydraulics Division of the American Society of Civil Engineers*. — 1982. — Vol. 108. — P. 932–947.
- Kennedy J. F.* The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels // *Fluid Mech.* — 1963. — Vol. 16, No. 14. — P. 521–544.
- Kennedy J. F.* The formation of sediment ripples, dune and antidunes // *Annual review of fluid mechanics*. — 1969. — Vol. 1. — P. 147–168.
- Richards K. J., Taylor P. A.* A numerical model of flow over sand waves in water of finite depth // *Geophys. J. R. astr.* — 1981. — Soc. 65. — P. 103–128.
- Sanne L. N.* Modelling af sand dunes in steady and tidal flow // Ph.D. Thesis. Coastal and river engineering section, Technical university of Copenhagen, Denmark. — 2003.
- Tjerry S., Fredsoe J.* Calculation of dune morphology // *J. Geophys. Res.* — 2005. — Vol. 110. — P. 1–13.
- Tjerry S.* Morphological calculation of dunes in alluvial rivers // Ph.D. Thesis. Institute of hydrodynamics and hydraulic engineering, Technical university of Denmark. — 1995.