

УДК: 519.63

## Выбор граничных условий при моделировании процессов турбулентного переноса в приземном слое атмосферы

Ю. В. Мухартова<sup>1,a</sup>, П. А. Мангура<sup>1,b</sup>, Н. Т. Левашова<sup>1,c</sup>, А. В. Ольчев<sup>2,d</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет,  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, географический факультет,  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

E-mail: <sup>a</sup> muhartova@yandex.ru, <sup>b</sup> mangura95@mail.ru, <sup>c</sup> natasha@npanalytica.ru, <sup>d</sup> aoltche@yandex.ru

*Получено 06.11.2017, после доработки — 21.01.2018.*

*Принято к публикации 25.01.2018.*

Рассмотрены одномерная и двумерная гидродинамические модели турбулентного переноса внутри приземного слоя атмосферы в условиях нейтральной атмосферной стратификации. Обе модели основаны на решении системы усредненных уравнений Навье – Стокса и неразрывности с использованием 1.5-го порядка замыкания, а также уравнений для турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации. С помощью одномерной модели, применимой в случае однородной подстилающей поверхности, проведено исследование по оценке влияния граничных условий на верхней и нижней границах модельной области на результаты расчетов вертикальных профилей скорости ветра и параметров турбулентности. В предложенной модели граничные условия ставились таким образом, чтобы она была согласована с широко используемой классической одномерной моделью, основанной на логарифмическом распределении скорости ветра по высоте, линейной зависимости коэффициента турбулентного обмена от высоты и постоянстве турбулентной кинетической энергии в приземном слое атмосферы в условиях нейтральной атмосферной стратификации. На основе классической модели можно получить ряд соотношений, связывающих градиент скорости ветра, турбулентную кинетическую энергию и скорость ее диссипации, каждое из которых может быть использовано в качестве граничного условия в гидродинамической модели. Из нескольких возможных вариантов постановки граничных условий для скорости ветра и скорости диссипации турбулентной кинетической энергии выбраны те, при которых достигается наименьшее отклонение смоделированных с помощью гидродинамической модели вертикальных профилей искомых величин от классических распределений. Соответствующие граничные условия на верхней и нижней границах использованы при постановке начально-краевой задачи в двумерной гидродинамической модели, позволяющей учитывать сложную структуру рельефа и горизонтальную неоднородность растительности. На основе предложенной двумерной модели с выбранными оптимальными граничными условиями исследована динамика установления турбулентного потока в зависимости от расстояния при обтекании воздушным потоком опушки леса. Для всех рассмотренных начально-краевых задач разработаны и реализованы безусловно устойчивые неявные разностные схемы их численного решения.

Ключевые слова: приземный слой атмосферы, турбулентный перенос, гидродинамическая модель, граничные условия

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 14-14-00956-П.

UDC: 519.63

## Selection of boundary conditions for modeling the turbulent exchange processes within the atmospheric surface layer

Yu. V. Mukhartova<sup>1,a</sup>, P. A. Mangura<sup>1,b</sup>, N. T. Levashova<sup>1,c</sup>, A. V. Olchev<sup>2,d</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,  
Leninskiye Gory 1/2, Moscow, 119991, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geography,  
Leninskiye Gory 1/2, Moscow, 119991, Russia

E-mail: <sup>a</sup> muhartova@yandex.ru, <sup>b</sup> mangura95@mail.ru, <sup>c</sup> natasha@npanalytica.ru, <sup>d</sup> aoltche@yandex.ru

*Received 06.11.2017, after completion – 21.01.2018.*

*Accepted for publication 25.01.2018.*

One- and two-dimensional hydrodynamic models of turbulent transfer within the atmospheric surface layer under neutral thermal stratification are considered. Both models are based on the solution of system of the time-averaged equations of Navier–Stokes and continuity using a 1.5-order closure scheme as well as equations for turbulent kinetic energy and the rate of its dissipation. The influence of the upper and lower boundary conditions on vertical profiles of wind speed and turbulence parameters within the atmospheric surface layer was derived using an one-dimensional model usually applied in case of an uniform ground surface. The boundary conditions in the model were prescribed in such way that the vertical wind and turbulence patterns were well agreed with widely used logarithmic vertical profile of wind speed, linear dependence of turbulent exchange coefficient on height above ground surface level and constancy of turbulent kinetic energy within the atmospheric surface layer under neutral atmospheric conditions. On the basis of the classical one-dimensional model it is possible to obtain a number of relationships which link the vertical wind speed gradient, turbulent kinetic energy and the rate of its dissipation. Each of these relationships can be used as a boundary condition in our hydrodynamic model. The boundary conditions for the wind speed and the rate of dissipation of turbulent kinetic energy were selected as parameters to provide the smallest deviations of model calculations from classical distributions of wind and turbulence parameters. The corresponding upper and lower boundary conditions were used to define the initial and boundary value problem in the two-dimensional hydrodynamic model allowing to consider complex topography and horizontal vegetation heterogeneity. The two-dimensional model with selected optimal boundary conditions was used to describe the spatial pattern of turbulent air flow when it interacted with the forest edge. The dynamics of the air flow establishment depending on the distance from the forest edge was analyzed. For all considered initial and boundary value problems the unconditionally stable implicit finite-difference schemes of their numerical solution were developed and implemented.

Keywords: atmospheric surface layer, turbulent transfer, hydrodynamic model, boundary conditions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 27–46 (Russian).

This work was supported by the Russian Science Foundation (Grant 14-14-00956-P).

## Введение

Задача адекватного описания процессов турбулентного обмена в приземном слое атмосферы требует развития комплексных процесс-ориентированных модельных подходов, позволяющих описать пространственную неоднородность поля скорости ветра, коэффициентов турбулентного обмена и турбулентных потоков тепла, водяного пара, диоксида углерода, других парниковых газов и малых газовых компонент и примесей как над однородной подстилающей поверхностью, так и над поверхностью со сложным рельефом и неоднородным растительным покровом. Расчет поля скорости ветра и турбулентных характеристик в подобных моделях основан на решении уравнений гидротермодинамики и требует корректного задания начальных и граничных условий на границах модельной области [Garratt, 1992; Högström, 1996; Wyngaard, 2010]. Возможные погрешности при выборе граничных условий, очевидно, могут существенно повлиять на точность выполняемых прогнозных оценок характеристик турбулентного режима приземного слоя воздуха. Проверка адекватности модельных расчетов обычно проводится путем их сравнения с данными экспериментальных измерений полей скорости ветра, параметров турбулентности и потоков для разных типов поверхностей с использованием различных измерительных комплексов. При отсутствии измерений проверку адекватности модели можно выполнить также путем сравнения модельных результатов с расчетами, выполненными с применением других модельных подходов.

В настоящее время для расчета вертикальных профилей скорости ветра и коэффициентов турбулентного обмена над горизонтально-однородной поверхностью при условиях нейтральной температурной стратификации в пределах приземного слоя атмосферы используются разные варианты аппроксимаций, основанных главным образом на логарифмическом распределении скорости ветра по высоте и линейной зависимости коэффициента турбулентного обмена от высоты над земной поверхностью. Хорошее соответствие модельных расчетов данным теоретическим распределениям при движении воздушного потока над однородной поверхностью может служить показателем репрезентативности выбранного модельного подхода. При использовании двух- и трехмерных моделей для описания процессов переноса над неоднородными поверхностями, для которых не могут быть применимы классические соотношения для скорости ветра и коэффициентов турбулентности, подобное сопоставление может быть проведено в подобластях, где поток можно считать установившимся. В таких моделях можно согласовать начальные и граничные условия с классическими распределениями, что и сделано в данной работе. Кроме того, рассмотренная в работе двумерная гидродинамическая модель была использована для оценки степени установления потока по мере удаления от элементов шероховатости поверхности на примере опушки леса. Такого рода оценки могут быть полезны, в частности, при выборе или обосновании выбора места наблюдений за потоками тепла, водяного пара, диоксида углерода и других газов с помощью метода турбулентных пульсаций, основанного на допущении о горизонтальной однородности подстилающей поверхности и наличии установившегося горизонтально-однородного турбулентного потока.

## Изменение скорости ветра и параметров турбулентности с высотой над однородной поверхностью

Так как атмосферный пограничный слой является турбулентным, то для его описания обычно используются статистические, а не детерминистические подходы. Это относится как к проводимым измерениям, так и к модельным уравнениям, описывающим поведение пограничного слоя. Учитывая высокую временную изменчивость исследуемых турбулентных течений, для их описания практическую ценность имеет оценка статистических характеристик, таких как усредненная скорость ветра, ковариации случайных составляющих компонент скорости ветра,

турбулентные потоки переносимых веществ, представляющие собой ковариации случайных составляющих концентрации и компонент скорости ветра, и т. д.

В пределах приземного слоя атмосферы (распространяющегося обычно до высоты 100–150 м) в случае горизонтально-однородной подстилающей поверхности средняя скорость  $U$  ветра зависит только от высоты  $z$  над поверхностью, а напряжение поверхностного трения, определяемое ковариацией  $\overline{w'u'}$  случайных составляющих вертикальной ( $w$ ) и горизонтальной ( $u$ ) скорости ветра, с изменением высоты при нейтральной (безразличной) атмосферной стратификации остается постоянным [Garratt, 1992; Högström, 1996; Wyngaard, 2010]. Это позволяет использовать так называемую динамическую скорость (friction velocity)  $u_* = \sqrt{-\overline{w'u'}}$  в качестве нормировочной величины для описания изменения скорости ветра с высотой. При этом коэффициент турбулентного обмена  $K$  над однородной подстилающей поверхностью, свободной от растительности, определяется следующим образом:

$$K \frac{dU}{dz} = u_*^2. \quad (1)$$

Коэффициент  $K$  является важным параметром при моделировании потоков парниковых газов и аэрозолей в приземном слое атмосферы. Измеряемый в полевых условиях вертикальный турбулентный поток  $Q = \overline{w'c'}$  рассматриваемого вещества, где  $c = C + c'$  — концентрация исследуемого вещества,  $C$  — ее среднее значение, а  $c'$  — случайная составляющая, может быть выражен как

$$Q = -K_C \frac{\partial C}{\partial z}.$$

В этом выражении  $K_C$  представляет собой коэффициент турбулентного обмена для рассматриваемого вещества.

Обычно в микрометеорологических моделях делается предположение о пропорциональности коэффициентов  $K_C$  и  $K$ :

$$K_C = \frac{K}{Sc},$$

где  $Sc$  — число Шмидта.

Вертикальный градиент средней скорости ветра  $U(z)$  в случае однородной подстилающей поверхности обратно пропорционален высоте:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{z},$$

где  $\kappa$  — постоянная фон Кармана ( $\kappa \approx 0.4$ ), откуда следует, что

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (2)$$

где  $z_0$  — параметр шероховатости поверхности. Так как за счет трения и взаимодействия с неровностями у поверхности скорость движения воздушного потока замедляется, то на уровне  $z_0$  выполняется условие  $U(z_0) = 0$ . При этом зависимость коэффициента  $K$  от высоты вблизи поверхности может быть представлена как

$$K(z) = u_* \kappa z.$$

Еще одним важным параметром, характеризующим движение воздуха в приземном слое атмосферы, является турбулентная кинетическая энергия  $E$ , представляющая собой полусумму средних значений квадратов пульсаций скорости ветра. За счет изменения средней скорости ветра с высотой происходит генерация турбулентной кинетической энергии, которая в результате

каскадного процесса передается от наиболее крупномасштабных (энергонесущих) вихрей к вихрям все более и более мелкого масштаба, до тех пор, пока не произойдет ее переход (диссипация) в тепловую энергию. При этом в условиях нейтральной атмосферной стратификации в случае однородной подстилающей поверхности величина  $E$  не зависит от высоты и пропорциональна квадрату динамической скорости [Garratt, 1992]:

$$E = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad (3)$$

где  $C_\mu$  — безразмерный коэффициент, а скорость ее диссипации имеет вид

$$\varepsilon(z) = \frac{u_*^3}{\kappa z}.$$

При описании скорости ветра над поверхностью, покрытой высокой растительностью, необходимо учитывать ее существенное уменьшение внутри растительного покрова за счет аэродинамического сопротивления воздушному потоку. Для учета влияния высокой растительности на вертикальное распределение скорости ветра в выражение (2) вводится дополнительный параметр, характеризующий высоту  $d$  слоя вытеснения воздушного потока (displacement height):

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_0}. \quad (4)$$

С учетом  $d$  выражения для  $K$  и  $\varepsilon$  можно записать в виде

$$K(z) = u_* \kappa (z-d), \quad (5)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{u_*^3}{\kappa(z-d)}. \quad (6)$$

При проведении полевых исследований параметры  $d$  и  $z_0$  рассчитываются по данным измерений вертикальных профилей скорости ветра при условиях атмосферы, близких к нейтральным. Величины  $d$  и  $z_0$  главным образом зависят от высоты и плотности растительного покрова [Raupach, Thom, 1981]. В наиболее простых случаях в исследованиях принимается, что  $d$  составляет около 60 %, а  $z_0$  — около 10 % от высоты деревьев. Обзор измеренных значений параметров  $d$  и  $z_0$  для различных типов однородных поверхностей представлен, например, в [Monteith, Unsworth, 1990].

В работе [Shaw, Pereira, 1982] с использованием модели высокого порядка замыкания было проведено теоретическое исследование по оценке соотношения между высотой слоя вытеснения  $d$ , параметром шероховатости  $z_0$ , индексом листовой поверхности  $LAI$  (суммарная площадь поверхности фитоэлементов, отнесенная к единице площади поверхности земли), сопротивлением растительности  $c_d$  и вертикальным распределением фитомассы  $LAD$ . Было показано, что соотношение  $d/h$  для растительности с разной плотностью и вертикальной структурой может изменяться в пределах от 0.4 до 0.9.

В работе [Raupach, 1994] предложено аналитическое выражение для параметров  $z_0$  и  $d$  как функций  $LAI$  и высоты крон  $h$ . В случае равномерного распределения фитомассы по высоте для отношения высоты слоя вытеснения  $d$  к высоте крон  $h$  получено выражение:

$$\frac{d}{h} = 1 - \frac{1 - \exp(-\sqrt{a \cdot LAI})}{\sqrt{a \cdot LAI}}, \quad (7)$$

где  $a = 7.5$  — эмпирическая постоянная.

Параметр шероховатости  $z_0$  связан с величинами  $d$  и  $h$  соотношением

$$\frac{z_0}{h} = \left(1 - \frac{d}{h}\right) \cdot \exp\left(-\kappa \frac{U(h)}{u_*} - \Psi_h\right), \quad (8)$$

где  $U(h)$  — значение скорости ветра на высоте крон,  $\Psi_h = \ln(c_w) - 1 + c_w^{-1}$  — функция влияния слоя шероховатости (roughness sublayer), характеризующая отклонение профиля скорости ветра от логарифмического непосредственно над кронами деревьев,  $c_w = \frac{z_w - d}{h - d}$ ,  $z_w$  — верхний предел высоты слоя шероховатости. При проведении расчетов величина  $c_w$  может быть принята постоянной ( $c_w = 2$ ) [Monteith, Unsworth, 1990].

Выражения (7) и (8) получены в [Raupach, 1994] в предположении, что имеет место приблизительное равенство

$$\frac{U(h)}{u_*} \cong 3.3 \quad (9)$$

для крон с индексом листовой поверхности  $LAI$  больше 1, что, как правило, выполняется для большей части взрослых древостоев [Jarvis et al., 1976].

Рассмотренные зависимости скорости ветра  $U$  и коэффициента  $K$  от высоты строятся только при  $z \geq z_0 + d$ , однако для практических целей бывает важно получить соответствующие величины и рассчитать потоки также и внутри высокой растительности, в частности, как с однородной, так и неоднородной горизонтальной структурой. Для этих целей могут служить гидродинамические модели различной степени сложности. При этом весьма важной оказывается постановка адекватных начальных и граничных условий в соответствующей начально-краевой задаче.

### Одномерная гидродинамическая модель движения воздуха над однородной подстилающей поверхностью

В основе большинства гидродинамических моделей, описывающих движение воздушно-го потока в приземном слое атмосферы, лежит усредненная система уравнений Навье–Стокса и неразрывности. В данной работе использовано замыкание 1.5-го порядка соответствующей системы, предусматривающее применение гипотезы Буссинеска о пропорциональности турбулентных потоков (ковариаций случайных составляющих скорости) производным усредненных значений компонент скорости ветра, а также выражение коэффициента  $K$  через величины  $E$  и  $\varepsilon$  [Бояршинов, Горемыкин, 2004; Sogachev, Panferov, 2006; Бояршинов, Балабанов, 2013; Левашова и др., 2015; Мухартова и др., 2015]:

$$K = C_\mu E^2 \varepsilon^{-1}. \quad (10)$$

Рассмотрим прежде всего «одномерную» гидродинамическую модель движения воздуха над ровной поверхностью с однородной растительностью, характеризующейся высотой  $h$  и плотностью фитомассы  $LAD(z)$ . Осредненная система уравнений для горизонтальной скорости ветра  $U$ , турбулентной кинетической энергии  $E$  и величины  $\varphi = \frac{\varepsilon}{E}$  в случае нейтральной температурной стратификации имеет вид [Sogachev, Panferov, 2006]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial U}{\partial z} \right) + F_u, \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\sigma_E} \frac{\partial E}{\partial z} \right) + P_E - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\sigma_\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\varphi}{E} (C_{\varphi 1} P_E - C_{\varphi 2} \varepsilon) + \Delta_\varphi, \end{cases} \quad (11)$$



где  $F_u = -c_d \cdot LAD \cdot U^2$  — горизонтальная компонента приходящейся на единицу массы силы динамического трения, возникающей при взаимодействии воздушного потока с элементами растительности [Дубов и др., 1978],  $LAD$  — суммарная площадь поверхности листьев в единичном объеме,  $c_d$  — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления элементов растительности,  $P_E = K \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$  — сдвиговая генерация турбулентной кинетической энергии. Безразмерные величины  $\sigma_E^\varphi$  и  $\sigma_\varphi$  ( $\sigma_E^\varphi = \sigma_\varphi = 2$ ) представляют собой число Прандтля для турбулентной кинетической энергии и турбулентное число Шмидта для функции  $\varphi$  соответственно.

Выбор в качестве третьей искомой функции масштаба частоты (удельной скорости диссипации ТКЭ)  $\varphi$  обусловлен тем, что данная модель обладает меньшей неопределенностью в турбулентных числах Прандтля и Шмидта в пределах растительного покрова, нежели модель, в которой используется уравнение непосредственно для функции  $\varepsilon$  [Sogachev, Panferov, 2006].

Безразмерные множители  $C_{\varphi 1} = 0.52$  и  $C_{\varphi 2} = 0.8$  являются модельными постоянными [Wilcox, 1998]. Слагаемое  $\Delta_\varphi$  в последнем уравнении системы (11) описывает увеличение диссипации турбулентной кинетической энергии за счет взаимодействия воздушного потока с растительностью и в первом приближении выражается как [Sogachev, Panferov, 2006; Olchev et al., 2009]:

$$\Delta_\varphi = 12 \sqrt{C_\mu} \cdot (C_{\varphi 2} - C_{\varphi 1}) \cdot c_d \cdot LAD \cdot |\mathbf{V}| \cdot \varphi, \quad (12)$$

где  $\mathbf{V}$  — вектор усредненной скорости ветра.

Будем рассматривать систему уравнений (10)–(12) при  $t > 0$  в области  $z \in (h_0, H)$ , где  $h_0$  — некоторая высота над поверхностью,  $H$  — высота приземного слоя атмосферы. Для того чтобы получить начально-краевую задачу для функций  $U(t, z)$ ,  $E(t, z)$  и  $\varphi(t, z)$ , систему (10)–(12) необходимо дополнить начальными условиями при  $t = 0$  и граничными условиями при  $z = h_0$  и  $z = H$ .

Рассмотрим вначале движение воздуха над ровной поверхностью с однородной растительностью, для которой параметры  $z_0$  и  $d$  известны, и сформулируем начально-краевую задачу в области  $z \in [h_0, H]$ , где  $h_0 \geq z_0 + d$ . В качестве начальных условий примем логарифмическое распределение (4) горизонтальной скорости ветра по высоте:

$$U(0, z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z - d}{z_0},$$

зададим  $E(0, z)$  в соответствии с равенством (3) и будем считать, что в начальный момент времени  $\varepsilon(0, z)$  задается распределением (6). Это позволяет получить следующее начальное условие для функции  $\varphi$ :

$$\varphi(0, z) = \frac{u_* \sqrt{C_\mu}}{\kappa(z - d)}.$$

Будем считать, что на нижней границе  $z = h_0$  расчетной области поток турбулентной кинетической энергии  $E$  равен нулю, а верхняя граница  $z = H$  расположена достаточно далеко от элементов шероховатости поверхности, так что в соответствии с (3) в окрестности  $z = H$  функция  $E$  постоянна. Это позволяет сформулировать для  $E(t, z)$  условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=h_0} = \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=H} = 0.$$

Граничные условия на верхней и нижней границах расчетной области для горизонтальной составляющей скорости ветра  $U$  и вспомогательной функции  $\varphi$  можно сформулировать несколькими способами, так чтобы в случае однородной подстилающей поверхности рассматриваемая

гидродинамическая модель была согласована с классическими распределениями  $U$ ,  $E$  и  $K$  по высоте.

Если положить  $h_0 = z_0 + d$ , то на нижней границе можно поставить условие прилипания

$$U|_{z=h_0} = 0. \quad (13)$$

Учитывая, что при нейтральных условиях стратификации в окрестности однородной подстилающей поверхности справедливы равенства (1), (3) и (4), позволяющие связать значение производной  $\frac{\partial U}{\partial z}$  со значением самой функции  $U(t, z)$  соотношением

$$K \frac{\partial U}{\partial z} = \left( \ln \frac{z-d}{z_0} \right)^{-1} C_\mu^{1/4} E^{1/2} \kappa U, \quad (14)$$

то, если выбрать  $h_0 > z_0 + d$ , равенство (14) можно использовать в качестве граничного условия при  $z = h_0$ , как это делается, например, в работе [Foudhil et al., 2005].

Из соотношений (1), (3), (4) следует, что в случае нейтральной стратификации над однородной подстилающей поверхностью при условии установившегося потока (когда нет зависимости от  $t$ ) выполняются равенства

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*^2}{K} = \frac{u_*}{\kappa(z-d)} = \frac{C_\mu^{1/4} E^{1/2}}{\kappa(z-d)}, \quad (15)$$

которыми можно воспользоваться для постановки граничных условий при  $z = H$  в рассматриваемой нестационарной модели:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=H} = \left. \frac{C_\mu^{1/4} E^{1/2}}{\kappa(z-d)} \right|_{z=H}. \quad (16)$$

Кроме того, над однородной подстилающей поверхностью можно получить условие на производную  $\partial U / \partial z$  без явной зависимости от  $d$ . Так как для установившегося потока из равенств (3) и (6) следует, что

$$\varphi = \frac{u_* \sqrt{C_\mu}}{\kappa(z-d)} = \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}}{\kappa(z-d)} \leftrightarrow \kappa(z-d) = \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}}{\varphi},$$

то вместо равенства (16) получаем

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=H} = \left. \frac{\varphi}{C_\mu^{1/2}} \right|_{z=H}. \quad (17)$$

Поскольку над однородной подстилающей поверхностью в случае установившегося потока в соответствии с классической моделью должно выполняться равенство

$$\varphi = \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}}{\kappa(z-d)}, \quad (18)$$

его можно взять в качестве граничного условия для функции  $\varphi$  при  $z = h_0$  и  $z = H$ . Также для функции  $\varphi$  можно поставить граничные условия, не содержащие явной зависимости от  $d$ . Для этого заметим, что в рамках классической модели соотношение (18) эквивалентно равенству

$$\varphi = \frac{C_\mu E}{K}, \quad (19)$$

которое тоже можно взять в качестве граничных условий на верхней и нижней границах расчетной области в гидродинамической модели.



## Результаты использования различных граничных условий в одномерной гидродинамической модели в случае низкой травянистой растительности

Для исследования влияния граничных условий на результаты моделирования при использовании одномерной модели был проведен ряд тестовых расчетов  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью, характеризуемой заданным параметром  $z_0$ , для различных сочетаний граничных условий. Для полученных распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  по высоте вычислялись их среднеквадратичные отклонения  $dU$ ,  $dE$  и  $dK$  от теоретических профилей  $U_{\text{theor}}(z)$ ,  $E_{\text{theor}}(z)$  и  $K_{\text{theor}}(z)$ , задаваемых распределениями (4), (3) и (5) соответственно. Расчеты проведены для набора параметров  $z_0 = 0.02$  м,  $u_* = 0.4$  м/с.

Для численного решения соответствующей начально-краевой задачи использована неявная разностная схема на неравномерной сетке  $z = z_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $z_1 = h_0$ ,  $z_M = H$  с постоянным минимальным шагом  $\Delta z = 0.17$  м вблизи поверхности земли до высоты 1 м и линейно растущим шагом  $\Delta z_{m+1}/\Delta z_m = 1.01$  при  $z > 1$  м. Шаг по времени был взят равным  $1/3$  с. Расчеты проводились до тех пор, пока максимальные изменения величин  $U$ ,  $E$  и  $K$  при переходе с предыдущего шага по времени на новый не достигли значений порядка  $10^{-4}$  м/с,  $10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с соответственно.

Результаты расчетов показали, что для  $h_0 = z_0$  при использовании условия прилипания (13) распределения  $U$ ,  $E$  и  $K$  несколько лучше соответствуют распределениям  $U_{\text{theor}}$ ,  $E_{\text{theor}}$  и  $K_{\text{theor}}$  при использовании условия (19) для функции  $\varphi$  на нижней границе  $z = h_0$  независимо от условий для  $U$  и  $\varphi$  на верхней границе расчетной области. При этом были получены следующие среднеквадратичные отклонения:  $dU = 0.1736$  м/с,  $dK = 0.1214$  м<sup>2</sup>/с и  $dE = 0.0553$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

Тестирование граничного условия (14) проводилось для  $h_0$ , взятого на 0.02 м выше уровня  $z_0$ . При этом согласование модельных и теоретических результатов для  $U$  и  $E$  получилось на порядок лучше, чем в предыдущем случае. Наименьшее отклонение получено при использовании условия (18) для функции  $\varphi$  при  $z = h_0$  независимо от условий для  $U$  и  $\varphi$  на верхней границе расчетной области:  $dU = 0.0445$  м/с,  $dK = 0.1059$  м<sup>2</sup>/с и  $dE = 0.0061$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>.

Результаты сравнения вычисленных с помощью гидродинамической модели и теоретических профилей  $U$ ,  $K$  и  $E$  приведены на рис. 1, 2.

## Модификация граничных условий в случае высокой (лесной) растительности

В случае высокой (лесной) растительности основная цель использования гидродинамической модели состоит в том, чтобы рассчитать распределения  $U$ ,  $E$  и  $K$  по высоте и при  $z < z_0 + d$ . Но если нижняя граница  $h_0$  расчетной области выбрана ниже уровня  $z_0 + d$ , то и начальные условия необходимо задавать при всех  $z \in [h_0, H]$ , в том числе при  $z < z_0 + d$ . Будем рассматривать соответствующую задачу как задачу на установление искомых распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  по высоте. Тогда в качестве начальных условий можно взять, например, соотношения

$$U(0, z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z - d_f}{z_0^f}, \quad E(0, z) = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varphi(0, z) = \frac{u_* \sqrt{C_\mu}}{\kappa(z - d_f)},$$

где  $z_0^f$  и  $d_f$  — параметр шероховатости и высота слоя вытеснения для открытой местности, и проводить расчеты до тех пор, пока нормы разностей  $\Delta U$ ,  $\Delta E$  и  $\Delta K$  на новом и предыдущем шаге по времени не станут меньше некоторых заданных значений. При этом вблизи поверхности за счет сопротивления растительности воздушному потоку скорость движения воздуха и турбулентная

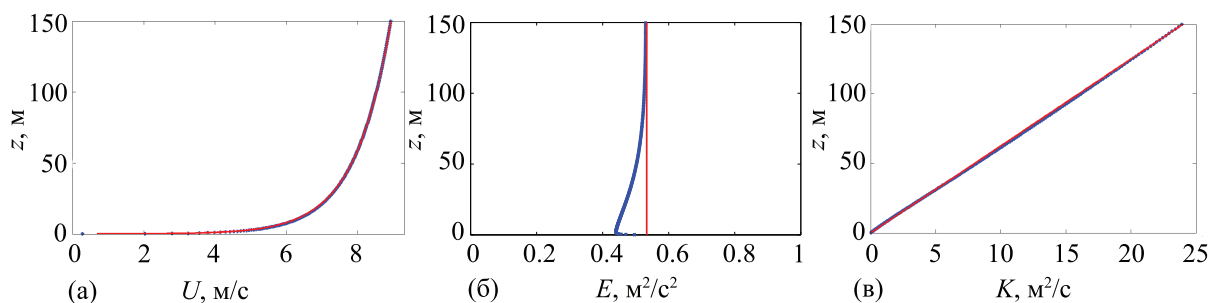


Рис. 1. Результаты расчетов распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью с низкой травянистой растительностью с использованием граничных условий (13) для  $U$  и (19) для  $\varphi$  при  $z = h_0$ . Красные линии — теоретические профили рассматриваемых функций, синими точками обозначены результаты расчетов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

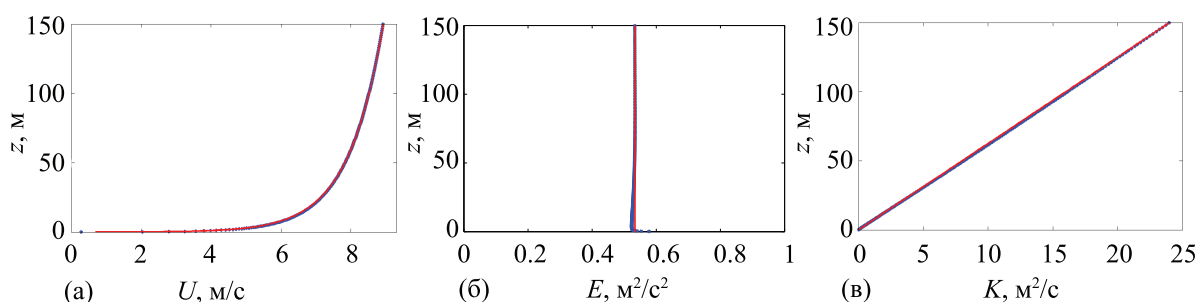


Рис. 2. Результаты расчетов распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью с низкой травянистой растительностью с использованием граничных условий (14) для  $U$  и (18) для  $\varphi$  при  $z = h_0$ . Красные линии — теоретические профили рассматриваемых функций, синими точками обозначены результаты расчетов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

кинетическая энергия будут уменьшаться при любом из рассмотренных выше граничных условий при  $z = h_0$ , в которых также используем значения  $z_0^f$  и  $d_f$  вместо  $z_0$  и  $d$  там, где это необходимо. Более существенную роль в модели будут играть условия на верхней границе  $z = H$ .

Модельные расчеты проводились над ровной поверхностью с однородной лесной растительностью высотой  $h = 20$  м и листовым индексом  $LAI = 4$ . При этом теоретические значения параметров логарифмического профиля скорости ветра, определяемые соотношениями (7), (8) и (9), имеют вид  $d = 16.36$  м,  $z_0 = 0.8$  м и  $u_* = 0.67$  м/с. Система уравнений решалась до тех пор, пока при переходе с предыдущего шага по времени на новый максимальные изменения функций  $U$ ,  $E$  и  $K$  не достигли величин порядка  $10^{-4}$  м/с,  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с соответственно.

Результаты расчетов показали, что в случае однородной высокой растительности более хорошее согласование модельных и теоретических результатов в области  $z \geq z_0 + d$  достигается при использовании для функции  $U$  условия прилипания (13) на нижней границе  $z = h_0$ , что представляется вполне естественным, так как в этом условии не используются  $z_0^f$  и  $d_f$ .

При заданных условиях на верхней границе  $z = H$  результаты моделирования оказались не зависящими от выбора условия для функции  $\varphi$  при  $z = h_0$ . Поэтому всюду далее на нижней границе будем использовать для  $\varphi$  условие (19), не содержащее явной зависимости от высоты слоя вытеснения.

Наилучшее согласование модельных и теоретических результатов было получено при использовании условия

$$\varphi \Big|_{z=H} = \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}}{\kappa(z - d_f)} \Big|_{z=H} \quad (20)$$

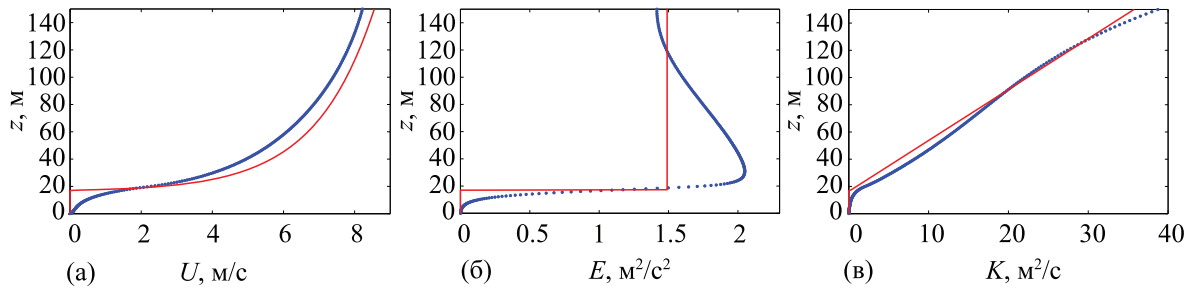


Рис. 3. Результаты расчетов распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью с высокой (лесной) растительностью с использованием граничных условий (17) для  $U$  и (20) для  $\varphi$  при  $z = H$ . Красные линии — теоретические профили рассматриваемых функций, синими точками обозначены результаты расчетов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

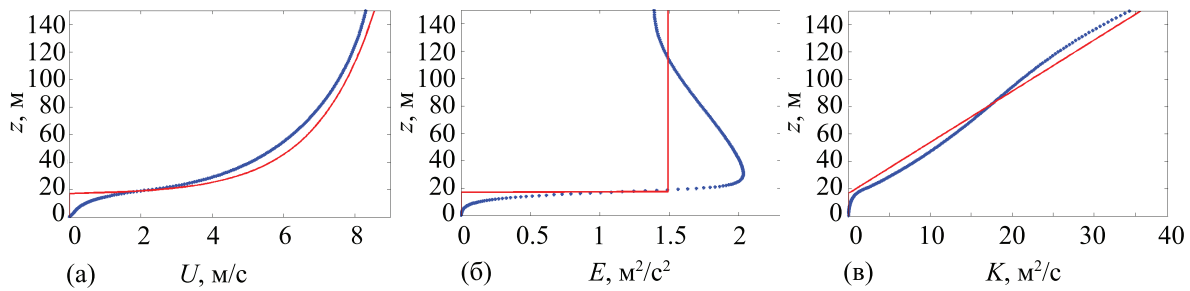


Рис. 4. Результаты расчетов распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью с высокой (лесной) растительностью с использованием граничных условий (17) для  $U$  и (20) для  $\varphi$  при  $z = H$ , в которых подставлено теоретическое значение параметра  $d$  вместо  $d_f$ . Красные линии — теоретические профили рассматриваемых функций, синими точками обозначены результаты расчетов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

на верхней границе расчетной области (рис. 3). Среднеквадратичные отклонения модельных распределений от теоретических в области  $z \geq z_0 + d$ , где определены теоретические значения, составили:  $dU = 0.54$  м/с,  $dE = 0.37$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $dK = 1.38$  м<sup>2</sup>/с. Соответствующие результаты приведены на рис. 3.

На рис. 4 представлены результаты моделирования с тем же набором граничных условий, но при использовании в равенстве (20) теоретического значения  $d$  вместо  $d_f$ . Среднеквадратичные отклонения модельных значений от теоретических при этом принимают значения  $dU = 0.55$  м/с,  $dE = 0.36$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $dK = 1.5$  м<sup>2</sup>/с, то есть использование  $d$  вместо  $d_f$  в данном случае никакого преимущества не дает. Это можно объяснить тем, что на верхней границе расчетной области вариация параметра  $d$  сказывается не сильно. В самом деле, рассмотрим погрешность, возникающую в выражении в правой части равенства (20) при условии, что  $d_f = d + \delta d$ :

$$\frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}|_{z=H}}{\kappa(H - d_f)} = \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}|_{z=H}}{\kappa(H - d - \delta d)} \approx \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}|_{z=H}}{\kappa(H - d)} + \frac{C_\mu^{3/4} E^{1/2}|_{z=H}}{\kappa(H - d)^2} \delta d.$$

Для  $H = 150$  м погрешность в правой части условия (20), обусловленная отличием  $d$  от  $d_f$ , составляет величину порядка  $6 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>, в то время как сама функция  $\varphi$  при  $z = H$  имеет значение порядка  $10^{-3}$  с<sup>-1</sup>.

При использовании на верхней границе расчетной области условия (19) для функции  $\varphi$ , не содержащего явной зависимости от  $d$ , результаты получаются хуже, чем при использовании условия (20), в особенности для коэффициента  $K$ :  $dU = 0.43$  м/с,  $dE = 0.31$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $dK = 4.08$  м<sup>2</sup>/с.

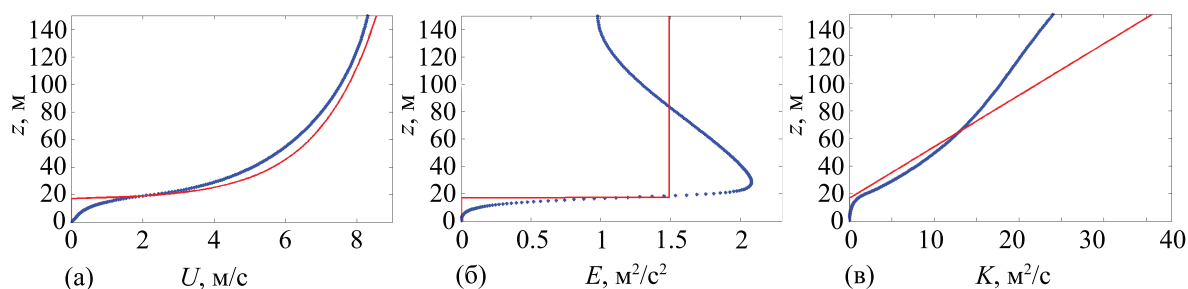


Рис. 5. Результаты расчетов распределений  $U$ ,  $E$  и  $K$  над однородной поверхностью с высокой (лесной) растительностью с использованием граничных условий (17) для  $U$  и (19) для  $\varphi$  при  $z = H$ . Красные линии — теоретические профили рассматриваемых функций, синими точками обозначены результаты расчетов. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Это может объясняться слабым влиянием  $d$  на искомые функции при  $z = H$ , особенностями алгоритма расчета  $K$  при переходе с одного слоя по времени на другой и тем, что в условии (20) коэффициент  $K$  не задействован. Соответствующие результаты моделирования приведены на рис. 5.

Кроме того, в случае высокой растительности также было проведено сравнение параметров  $z_0$ ,  $d$  и  $u_*$ , найденных с использованием гидродинамической модели, с соответствующими теоретическими параметрами  $z_0^{\text{theor}}$ ,  $d^{\text{theor}}$  и  $u_*^{\text{theor}}$ , получаемыми с помощью соотношений (7)–(9).

Для вычисления параметров  $z_0$ ,  $d$  и  $u_*$  по полученным в результате использования гидродинамической модели значениям  $U(z)$  использовался метод наименьших квадратов. Пусть  $\{U_m\}_{m=1}^M$  — вычисленные значения горизонтальной компоненты скорости ветра, соответствующие высотам  $z_m$ . Составим функционал:

$$\Phi(u_*, d, z_0) = \sum_{m=m_0}^M \left( U_m - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z_m - d}{z_0} \right)^2,$$

где  $m_0$  таково, что  $z_{m_0} \geq h$ . Функционал достигает своего минимального значения при выполнении условий

$$\begin{cases} \sum_{m=m_0}^M \left( U_m - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z_m - d}{z_0} \right) \ln \frac{z_m - d}{z_0} = 0, \\ \sum_{m=m_0}^M \left( U_m - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z_m - d}{z_0} \right) \frac{1}{z_m - d} = 0, \\ \sum_{m=m_0}^M \left( U_m - \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z_m - d}{z_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Из системы (21) получаем

$$u_* = \frac{(M - m_0 + 1)\kappa I_5(d) - \kappa I_2 I_7(d)}{(M - m_0 + 1)I_6(d) - I_4(d)I_7(d)}, \quad \ln z_0 = \frac{I_4(d)I_5(d) - I_2 I_6(d)}{(M - m_0 + 1)I_5(d) - I_2 I_7(d)},$$

где для удобства введены следующие обозначения:

$$I_1(d) = \sum_{m=m_0}^M U_m \ln(z_m - d), \quad I_2 = \sum_{m=m_0}^M U_m, \quad I_3(d) = \sum_{m=m_0}^M \ln^2(z_m - d), \quad I_4(d) = \sum_{m=m_0}^M \ln(z_m - d),$$

$$I_5(d) = \sum_{m=m_0}^M \frac{U_m}{z_m - d}, \quad I_6(d) = \sum_{m=m_0}^M \frac{\ln(z_m - d)}{z_m - d}, \quad I_7(d) = \sum_{m=m_0}^M \frac{1}{z_m - d},$$

а параметр  $d$  является корнем уравнения

$$I_1(d) - \frac{I_4(d)I_5(d) - I_2I_6(d)}{(M - m_0 + 1)I_5(d) - I_2 \cdot I_7(d)} \cdot I_2 - \frac{(M - m_0 + 1)I_5(d) - I_2 \cdot I_7(d)}{(M - m_0 + 1)I_6(d) - I_4(d)I_7(d)} \cdot I_3(d) + \\ + 2 \frac{I_4(d)I_5(d) - I_2I_6(d)}{(M - m_0 + 1)I_6(d) - I_4(d)I_7(d)} \cdot I_4(d) - \\ - \frac{(M - m_0 + 1) \cdot (I_4(d)I_5(d) - I_2I_6(d))^2}{[(M - m_0 + 1)I_6(d) - I_4(d)I_7(d)] \cdot [(M - m_0 + 1)I_5(d) - I_2 \cdot I_7(d)]} = 0.$$

Наилучшее согласование теоретических ( $d^{\text{theor}} = 16.36$  м,  $z_0^{\text{theor}} = 0.8$  м и  $u_*^{\text{theor}} = 0.67$  м/с) и рассчитанных с помощью гидродинамической модели результатов также получено при использовании для функции  $U$  условий прилипания (13) на нижней границе области и условия (17) на верхней границе, а также условия (20) для функции  $\varphi$  на верхней границе независимо от условия для нее при  $z = h_0$ . Вычисленные значения параметров имеют вид  $d = 15.05$  м,  $z_0 = 1.43$  м и  $u_* = 0.654$  м/с. Неудовлетворительные результаты были получены при использовании условия (19) при  $z = H$  для функции  $\varphi$ .

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод, что при моделировании поля скорости ветра и режима турбулентности над поверхностью, покрытой низкой растительностью или полностью лишенной растительности, целесообразно использовать для горизонтальной составляющей скорости ветра  $U$  условие (14) на нижней границе области и условие (17) на верхней границе, поскольку оно не содержит зависимости от  $d$  в явном виде. При наличии высокой растительности по всей длине расчетной области при  $z = h_0$  для  $U$  предпочтительнее использовать условие прилипания (13). Для функции  $\varphi$  в обоих случаях как на нижней, так и на верхней границе следует использовать условие (18) или (20).

## Описание двумерной гидродинамической модели

Построим обобщение рассмотренной выше гидродинамической модели на двумерный случай, позволяющее учитывать пространственную неоднородность подстилающей поверхности. Предположим, что имеющиеся в рассматриваемой области препятствия или элементы шероховатости расположены по оси  $Ox$ , перпендикулярно которой поверхность остается однородной. Тогда все искомые функции будут зависеть от координат  $x$  и  $z$ . Пусть  $\mathbf{V} = \{U, W\}$  — усредненный вектор скорости ветра, где  $U$  и  $W$  — его горизонтальная и вертикальная компоненты соответственно,  $\delta P$  — обусловленное наличием горизонтальных неоднородностей отклонение давления от равновесного давления, определяемого гидростатическим распределением. Тогда усредненная система уравнений Навье–Стокса и неразрывности для компонент скорости ветра и избыточного давления при использовании 1.5-го порядка замыкания и гипотезы Буссинеска будет иметь вид [Мухартова и др., 2015; Mamkin et al., 2016; Ольчев и др., 2017]

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \delta P - \frac{2}{3} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2K \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial W}{\partial x} \right) + F_u, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta P - \frac{2}{3} \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2K \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial U}{\partial z} \right) + F_w, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\rho_0$  — плотность воздуха,  $F_u$ ,  $F_w$  — горизонтальная и вертикальная компоненты массовой плотности силы сопротивления растительности  $\mathbf{F} = \{F_u, F_w\}$ , в двумерном случае определяемой как  $\mathbf{F} = -c_d \cdot LAD \cdot |\mathbf{V}| \mathbf{V}$  [Дубов и др., 1978].

Величины  $E$  и  $\varepsilon$  находятся из системы дифференциальных уравнений [Sogachev, Panferov, 2006]

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial E}{\partial x} + W \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K}{\sigma_E^\varphi} \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\sigma_E^\varphi} \frac{\partial E}{\partial z} \right) + P_E - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + W \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K}{\sigma_\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K}{\sigma_\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\varphi}{E} (C_{\varphi 1} P_E - C_{\varphi 2} \varepsilon) + \Delta_w, \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{E}, \end{cases} \quad (23)$$

где выражение для сдвиговой генерации турбулентной кинетической энергии  $P_E$  имеет вид

$$P_E = 2K \left( \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right) + K \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2.$$

Система уравнений (22)–(23) дополняется начальными и граничными условиями в двумерной прямоугольной области  $x \in [-L_x, L_x]$ ,  $z \in [h_0, H]$  и решается до тех пор, пока изменения искомых функций при переходе со слоя на слой по времени не станут меньше некоторых заданных значений.

Для задания искомых функций при  $t = 0$ , а также на горизонтальных границах  $z = h_0$  и  $z = H$  расчетной области будем пользоваться рассмотренными выше начальными и краевыми условиями для функций  $U$ ,  $E$  и  $\varphi$ , согласованными с классическими распределениями параметров в случае горизонтально-однородной поверхности.

Вертикальную компоненту  $W$  скорости ветра и избыточное давление  $\delta P$  в начальный момент времени будем считать равными нулю. При  $z = h_0$  сформулируем для  $W$  условие  $W|_{z=h_0} = 0$  отсутствия вертикального движения воздуха, а для функции  $\delta P$  положим, соответственно,  $\frac{\partial}{\partial z} \delta P \Big|_{z=h_0} = 0$ .

Предполагая, что неровности подстилающей поверхности не оказывают значительного влияния на высотах порядка  $H$ , будем считать вертикальную составляющую скорости ветра и вертикальную компоненту градиента избыточного давления равными нулю при  $z = H$ :

$$W|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \delta P \Big|_{z=H} = 0.$$

При постановке двумерной задачи возникает также необходимость сформулировать краевые условия на двух дополнительных вертикальных границах  $x = \pm L_x$ . На входной границе  $x = -L_x$  будем считать распределение  $U$  по высоте заданным:

$$U|_{x=-L_x} = U_0(z).$$

В зависимости от особенностей растительного покрова вблизи границы  $x = -L_x$  функция  $U_0(z)$  может определяться либо классическим логарифмическим распределением горизонтальной скорости по высоте, либо установившимся распределением  $U$  по высоте, получаемым из «одномерной» модели для соответствующей горизонтально-однородной растительности. Для остальных искомых функций сформулируем при  $x = -L_x$  условия нулевого горизонтального градиента (так называемые условия сноса [Елизарова, 2005]):

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=-L_x} = \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=-L_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=-L_x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta P \Big|_{x=-L_x} = 0.$$

Также условия сноса поставим на правой границе  $x = L_x$  расчетной области для всех функций, кроме избыточного давления, которое на этой свободной границе будем считать равным нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \delta P|_{x=L_x} = 0.$$



Для решения полученной начально-краевой задачи разработана и реализована безусловно устойчивая неявная разностная схема с расщеплением по процессам [Ольчев и др., 2017].

## Исследование процесса установления турбулентного потока в приземном слое при обтекании опушки леса

Применим разработанную двумерную гидродинамическую модель для исследования процесса установления турбулентного потока над поверхностью при обтекании им опушки леса в двух случаях: граница раздела типа «поле – лес» и типа «лес – поле». В обоих случаях будем считать, что лес имеет высоту  $h$  и характеризуется равномерно распределенной по высоте плотностью фитомассы  $LAD(z) = LAI/h$  при  $z \leq h$ . Поверхность земли будем считать ровной, то есть элементы рельефа в данном исследовании учитывать не будем.

В обоих случаях будем использовать следующие граничные условия:

$$\text{а) } h_0 = z_0 + d \text{ и } U|_{z=h_0} = 0; \quad \text{б) } h_0 > z_0 + d \text{ и } \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=h_0} = \frac{C_\mu^{1/4} E^{1/2} \kappa}{K \ln \frac{h_0-d}{z_0}} U \Big|_{z=h_0} \quad (24)$$

для функции  $U$  при  $z = h_0$  в зависимости от преобладающего типа растительности (скорость  $U$  берется равной нулю при  $z = h_0$ , если преобладает лесная растительность). Параметры  $z_0$  и  $d$  в условиях (24) соответствуют участку местности с травянистой растительностью. При наличии в моделируемой области участков с открытой почвой или низкой травянистой растительностью полагаем  $d = 0$ .

Как и в случае однородной подстилающей поверхности, расчеты будем проводить до тех пор, пока изменения  $\Delta U$ ,  $\Delta W$ ,  $\Delta E$  и  $\Delta K$  искомых функций при переходе со слоя на слой по времени не станут меньше некоторых заданных значений.

Степень установления потока будем определять, оценивая горизонтальный градиент искомых функций на различных высотах.

В проведенных численных экспериментах расчетная сетка по  $z$  выбиралась такой же, как и в случае однородной подстилающей поверхности, а по  $x$  использовалась равномерная сетка с шагом 2 м. При достижении горизонтальными градиентами функций  $U$ ,  $W$ ,  $E$  и  $K$  величин порядка  $\Delta U$ ,  $\Delta W$ ,  $\Delta E$  и  $\Delta K$ , соответственно, в рамках используемой модели поток считался горизонтально-однородным (установившимся).

Рассмотрим случай набегания воздушного потока на опушку леса. Параметры, характеризующие структуру лесной растительности, выбраны такими же, как и в предыдущем разделе в случае однородной лесной растительности: высота леса принята равной  $h = 20$  м, величина  $LAI$  принималась равной 4. Расчеты прекращались по достижении значений  $\Delta U \sim 10^{-4}$  м/с,  $\Delta W \sim 10^{-5}$  м/с,  $\Delta E \sim 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $\Delta K \sim 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с при переходе со одного слоя по времени на другой.

В данном численном эксперименте лес занимал большую часть расчетной области, так как за препятствием установление потока обычно происходит медленнее, чем перед ним. На нижней границе расчетной области для компонент скорости ветра использовались условия прилипания. Горизонтальные градиенты искомых функций оценивались на высотах 25 м, 35 м, 45 м, 65 м, 75 м и 86 м над поверхностью. Соответствующие графики приведены на рис. 6.

Как можно видеть из графиков на рис. 6, на расстоянии 200 м и более до границы леса поток еще не реагирует на предстоящее изменение свойств подстилающей поверхности. Над лесом по мере удаления от опушки также происходит постепенное установление потока, то есть горизонтальные градиенты функций с ростом  $x$  стремятся к нулю. При этом медленнее всего убывает горизонтальный градиент коэффициента турбулентного обмена  $K$ . С ростом высоты над поверхностью горизонтальные градиенты искомых функций также убывают.

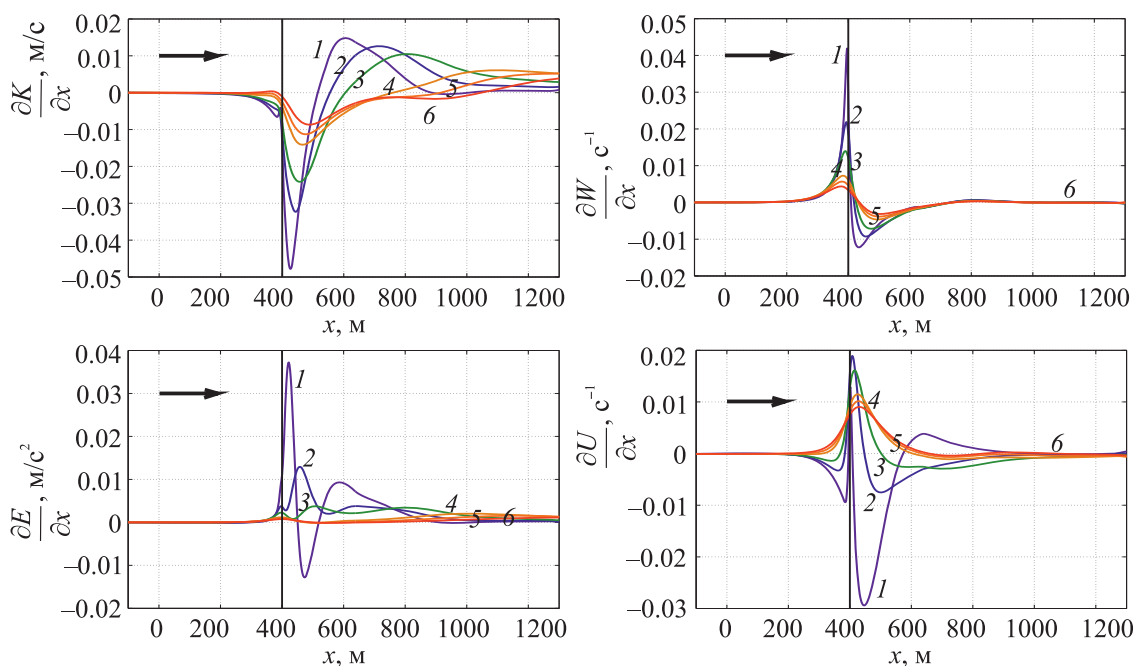


Рис. 6. Горизонтальные градиенты функций  $U$ ,  $W$ ,  $E$  и  $K$  в случае набегания воздушного потока на опушку леса на высотах 25 м (1), 35 м (2), 45 м (3), 65 м (4), 75 м (5) и 85 м (6) соответственно. Вертикальной линией обозначена граница леса, направление ветра слева направо (указано стрелкой). Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

В рассматриваемом случае горизонтальные градиенты функций  $U$ ,  $W$ ,  $E$  и  $K$  становятся примерно одинаковыми на различных высотах на расстоянии в 500 м и более правее границы леса и достигают значений порядка

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial x} \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad \frac{\partial E}{\partial x} \sim 10^{-4} \text{ м/с}^2, \quad \frac{\partial K}{\partial x} \sim 10^{-3} \text{ м/с},$$

то есть, начиная с расстояния в 500 м от опушки леса, воздушный поток можно считать горизонтально-однородным.

В случае движения воздушного потока со стороны леса на открытой участок местности рассматривались оба граничных условия (24) на нижней границе, и результаты при этом были практически идентичными. Расчеты проводились до тех пор, пока при переходе с одного слоя по времени на другой изменения искомых функций не достигали величин порядка  $\Delta U \sim 10^{-4}$  м/с,  $\Delta W \sim 10^{-5}$  м/с,  $\Delta E \sim 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $\Delta K \sim 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с соответственно. Результаты расчетов с условием прилипания для компонент скорости ветра на нижней границе приведены на рис. 7.

Как можно видеть из графиков на рис. 7, на расстояниях более 200 м левее границы леса поток можно считать установившимся, поскольку, как и в предыдущем случае набегания воздушного потока на опушку, на этих расстояниях наличие резких изменений свойств растительности в структуре турбулентного потока практически не проявляется.

Правее опушки леса в открытой области с низкой растительностью горизонтальные градиенты функций  $K$ ,  $E$ ,  $U$  и  $W$  стремятся к нулю, причем  $\frac{\partial K}{\partial x}$  достигают значений порядка  $5 \cdot 10^{-3}$  м/с лишь на расстояниях 400 и более метров от опушки на всех рассмотренных высотах, а  $\frac{\partial W}{\partial x}$  на этом расстоянии фактически выходит на нулевой уровень. Производная  $\frac{\partial U}{\partial x}$

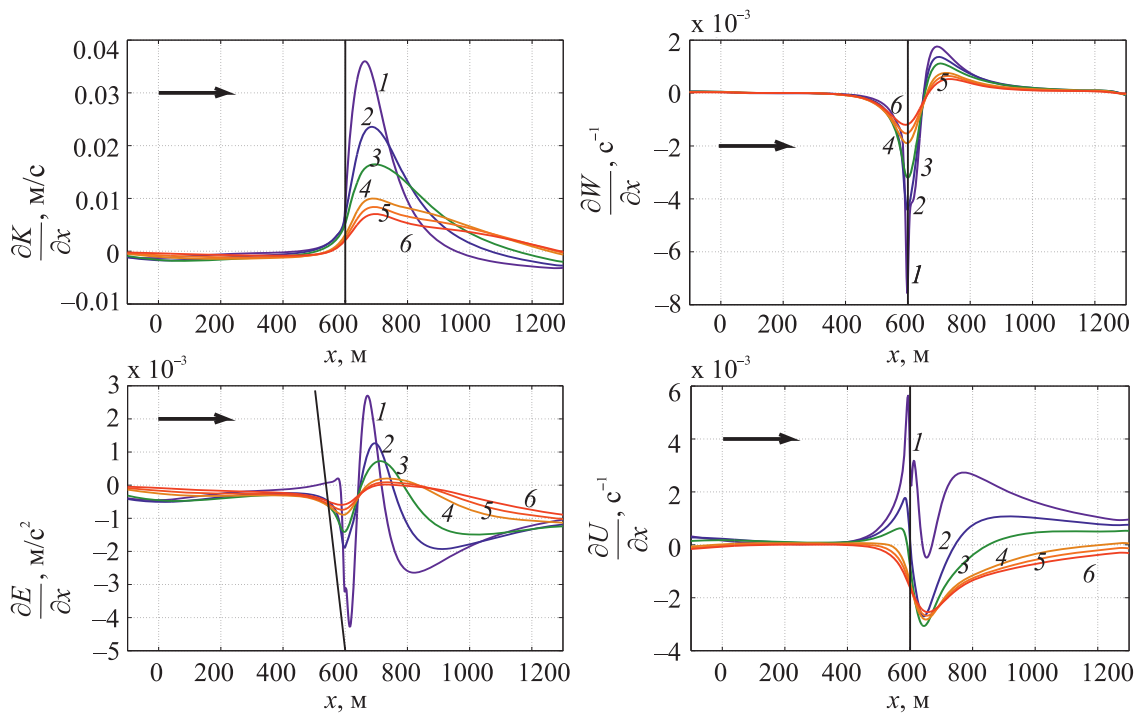


Рис. 7. Горизонтальные градиенты функций  $U$ ,  $W$ ,  $E$  и  $K$  в случае распространения воздушного потока из области над лесом в область с низкой растительностью на высотах 25 м (1), 35 м (2), 45 м (3), 65 м (4), 75 м (5) и 85 м (6). Вертикальной линией обозначена граница леса, направление ветра слева направо (указано стрелкой). Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

убывает с ростом  $x$  медленнее, однако на расстояниях больше либо равных 500 м от опушки имеет порядок  $10^{-4} \text{ c}^{-1}$ , начиная с высоты 35 м.

## Заключение

Рассмотрены одномерная и двумерная гидродинамические модели движения воздуха в приземном слое атмосферы и возможности применения двумерной модели для оценки влияния неоднородности подстилающей поверхности на турбулентный перенос при нейтральной атмосферной стратификации. В случае горизонтально-однородной поверхности с помощью одномерной модели проведено исследование влияния граничных условий на верхней и нижней границах расчетной области на результаты расчетов вертикальных профилей скорости ветра  $U$ , турбулентной кинетической энергии  $E$  и коэффициента турбулентного обмена  $K$ . Указаны граничные условия, при которых наблюдается наилучшее согласование результатов с соответствующими распределениями, получаемыми на основании классической одномерной модели. Эти условия использованы в двумерной модели в численных экспериментах по исследованию степени установления турбулентного потока при пересечении опушки леса. Показано, что в случае набегания воздушного потока с открытого участка местности на сплошной массив леса с однородной горизонтальной структурой, высотой 20 м и параметром  $LAI = 4$ , при условиях нейтральной атмосферной стратификации на открытой местности поток можно считать однородным на расстоянии, превышающем либо равном 200 м до опушки леса. Над лесом установление потока происходит на расстоянии не менее 500 м от опушки. В случае движения воздушного потока из области с высокой (лесной) растительностью в область с низкой растительностью над лесом поток еще не реагирует на изменения в структуре растительного покрова на расстояниях

вплоть до 200 м от границы. Над открытой местностью в области с низкой растительностью установление потока происходит только на расстояниях порядка 400–500 м от границы леса. Можно предположить, что при задании иных условий (скорость ветра, стратификация атмосферы, высота и плотность растительного покрова и др.) будут наблюдаться иные закономерности процесса установления воздушного потока. Также надо учитывать и влияние рельефа на процессы турбулентного переноса. Все данные вопросы требуют, очевидно, продолжения комплексных модельных исследований для более глубокого понимания процессов переноса в приземном слое и интерпретации существующих результатов измерений на территориях с мозаичной структурой растительности и сложным рельефом.

## Список литературы (References)

- Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. — М.: Физико-математическая литература, 1994.  
*Belotserkovskiy O. M.* Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred [Numerical modelling in the continuum mechanics]. — Moscow: Fiziko-matematicheskaya literatura, 1994 (in Russian).
- Бояришинов М. Г., Балабанов Д. С.* Загрязнение атмосферного воздуха городского квартала отработанными газами стационарного источника // Математическое моделирование. — 2013. — Т. 26, № 4. — С. 97–109.  
*Boyarshynov M. G., Balabanov D. S.* Zagryaznenie atmosfernogo vozdukha gorodskogo kvartala otrabotannymi gazami statsionarnogo istochnika [Air pollution of a city district with exhaust gases of a stationary source] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2013. — Vol. 26, No. 4. — P. 97–109 (in Russian).
- Бояришинов М. Г., Горемыкин В. Д.* Пространственная модель взаимодействия воздушного потока с растительным массивом // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 7. — С. 31–42.  
*Boyarshynov M. G., Goremykin V. D.* Prostranstvennaya model vzaimodeystviya vozdushnogo potoka s rastitelnyim massivom [The spatial model of interaction of air flow with forest plantation] // Matematicheskoe modelirovanie. — 2004. — Vol. 16, No. 7. — P. 31–42 (in Russian).
- Дубов А. С., Быкова Л. П., Марунич С. В.* Турбулентность в растительном покрове. — Л.: Гидрометеоздат, 1978.  
*Dubov A. S., Bykova L. P., Marunich S. V.* Turbulentnost v rastitelnom pokrove [Turbulence in the vegetation cover]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1978 (in Russian).
- Елизарова Т. Г.* Математические модели и численные методы в динамике газа и жидкости. Лекции. — М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2005.  
*Elizarova T. G.* Matematicheskie modeli i chislennye metody v dinamike gaza i zhidkosti. Lektsii. [Mathematical models and numerical methods in gas and fluid dynamics. The lectures.] — Moscow: Faculty of Physics of Moscow State University, 2005 (in Russian).
- Зилитинкевич С. С.* Динамика пограничного слоя атмосферы. — Л.: Гидрометеоздат, 1970.  
*Zilitinkevich S. S.* Dinamika pogranichnogo sloya atmosfery [Atmospheric boundary layer dynamics]. — Leningrad: Gidrometeoizdat, 1970 (in Russian).
- Калиткин Н. Н., Карякин П. В.* Численные методы. Книга 2. Методы математической физики. — М.: Академия, 2013.  
*Kalitkin N. N., Karyakin P. V.* Chislennye metody. Kniga 2. Metody matematicheskoy fiziki [Numerical methods. Book 2. The methods of mathematical physics]. — Moscow: Akademia, 2013 (in Russian).
- Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Давыдова М. А., Шапкина Н. Е., Ольчев А. В.* Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика и астрономия. — 2015. — № 3. — С. 3–10.  
*Levashova N. T., Mukhartova Yu. V., Davydova M. A., Shapkina N. E., Olchev A. V.* The application of the theory of contrast structures for describing wind field in spatially heterogeneous vegetation cover // ISSN 0027-1349, Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — Vol. 70, Issue 3. — P. 167–174. (Original Russian paper: Levashova N. T., Mukhartova Yu. V., Davydova M. A., Shapkina N. E., Olchev A. V. Primenenie teorii kontrastnykh struktur dlya opisaniya polya skorosti vetra v prostranstvenno-neodnorodnom rastitelnom pokrove // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Fizika. — 2015. — No. 3. — P. 3–10.)

- Мухартова Ю. В., Левашова Н. Т., Ольчев А. В., Шапкина Н. Е.* Применение двумерной модели для описания турбулентного переноса CO<sub>2</sub> в пространственно-неоднородном растительном покрове // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика и астрономия. — 2015. — № 1. — С. 15–22.
- Mukhartova Yu. V., Levashova N. T., Olchev A. V., Shapkina N. E.* Application of a 2D model for describing the turbulent transfer of CO<sub>2</sub> in a spatially heterogeneous vegetation cover // ISSN 0027-1349, Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — Vol. 70, Issue 1. — P. 14–21. (Original Russian paper: Mukhartova Yu. V., Levashova N. T., Olchev A. V., Shapkina N. E. Primenenie dvumernoy modeli dlya opisaniya turbulentnogo perenosa CO<sub>2</sub> v prostranstvenno-neodnorodnom rastitelnom pokrove // Vestnik Moskovskogo Universiteta. Fizika. — 2015. — No. 1. — P. 15–22.)
- Ольчев А. В., Мухартова Ю. В., Левашова Н. Т., Волкова Е. М., Рыжова М. С., Мангура П. А.* Влияние пространственной неоднородности растительного покрова и рельефа на вертикальные потоки CO<sub>2</sub> в приземном слое атмосферы // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 612–623.
- Olchev A. V., Mukhartova Yu. V., Levashova N. T., Volkova E. M., Ryzhova M. S., Mangura P. A.* The influence of the spatial heterogeneity of vegetation cover and surface topography on vertical CO<sub>2</sub> fluxes within the atmospheric surface layer // Izvestiya — Atmospheric and Oceanic Physics. — Vol. 53, Issue 5. — P. 539–549. (Original Russian paper: Olchev A. V., Mukhartova Yu. V., Levashova N. T., Volkova E. M., Ryzhova M. S., Mangura P. A. Vliyaniye prostranstvennoy neodnorodnosti rastitel'nogo pokrova i reliefa na vertikal'nye potoki CO<sub>2</sub> v prizemnom sloe atmosfery // Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Fizika atmosfery i okeana. — 2017. — Vol. 53, No. 5. — P. 612–623.)
- Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
- Samarskiy A. A.* Teoriya raznostnykh skhem [The theory of finite-difference schemes]. — Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
- Apsley D. D., Castro I. P.* A limited-length-scale  $k$ - $\varepsilon$  model for the neutral and stably-stratified atmospheric boundary layer // Boundary-Layer Meteorol. — 1997. — Vol. 83, Issue 1. — P. 75–98.
- Foudhil H., Brunet Y., Caltagirone J. P.* A fine-scale  $k$ - $\varepsilon$  model for atmospheric flow over heterogeneous landscapes // Environ. Fluid Mech. — 2005. — Vol. 5, Issue 3. — P. 247–265.
- Garratt J. R.* The atmospheric boundary layer. — Cambridge University press, 1992.
- Högström U.* Review of some basic characteristics of the atmospheric surface layer // Boundary-Layer Meteorology. — 1996. — Vol. 78, Issue 3-4. — P. 215–246.
- Jarvis P. G., James G. B., Landsberg J. J.* Coniferous forest. In: J. L. Monteith (ed.) // Vegetation and the Atmosphere. — 1976. — Vol. 2. — P. 171–236.
- Mamkin V., Kurbatova J., Avilov V., Mukhartova Yu., Krupenko A., Ivanov D., Levashova N., Olchev A.* Changes in net ecosystem exchange of CO<sub>2</sub>, latent and sensible heat fluxes in a recently clear-cut spruce forest in western Russia: results from an experimental and modeling analysis // Environmental Research Letters. — 2016. — Vol. 11, Issue 12. — P. 125012.
- Monteith J. L., Unsworth M. H.* Principles of Environmental Physics. — Edward Arnold. London, 1990.
- Olchev A., Radler K., Sogachev A., Panferov O., Gravenhorst G.* Application of a three-dimensional model for assessing effects of small clear-cuttings on radiation and soil temperature // J. Ecol. Modell. — 2009. — Vol. 220, Issue 21. — P. 3046–3056.
- Raupach M. R.* Simplified expressions for vegetation roughness length and zero-plane displacement as functions of canopy height and area index // Boundary Layer Meteorology. — 1994. — Vol. 71, Issue 1-2. — P. 211–216.
- Raupach M. R., Thom A. S.* Turbulence in and above plant canopies // Ann. Rev. Fluid Mech. — 1981. — Vol. 13. — P. 97–129.
- Shaw R. H., Pereira A. R.* Aerodynamic roughness of a plant canopy: a numerical experiment // Agricultural Meteorology. — 1982. — Vol. 26. — P. 51–65.

- Sogachev A., Kelly M., Leclerc M. Y.* Consistent two-equation closure modelling for atmospheric research: buoyancy and vegetation implementations // *Boundary-Layer Meteorol.* — 2012. — Vol. 145, Issue 2. — P. 307–327.
- Sogachev A., Leclerc M. Y., Zhang G., Rannik U., Vesala T.* CO<sub>2</sub> fluxes near a forest edge: a numerical study // *Ecological Applications.* — 2008. — Vol. 18, Issue 6. — P. 1454–1469.
- Sogachev A., Panferov O.* Modification of two-equation models to account for plant drag // *Boundary-Layer Meteorol.* — 2006. — Vol. 121, Issue 2. — P. 229–266.
- Wilcox D. C.* Turbulence modeling for CFD. — La Canada, CA: DCW Industries, Inc., 1998.
- Wyngaard J. C.* Turbulence in the atmosphere. — Cambridge University press, 2010.