КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2018 Т. 10 № 1 С. 7–25
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25

УДК: 531.38, 531.39

Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата

А. В. Зыза

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»,
ДНР, 83001, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24

E-mail: z9125494@mail.ru

Получено 13.07.2017, после доработки — 19.12.2017.
Принято к публикации 17.01.2018.

В работе исследуются полиномиальные решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. В математической постановке каждая из указанных задач описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых содержат пятнадцать постоянных параметров, характеризующих распределение масс гиростата, потенциальные и непотенциальные силы, действующие на гиростат. Рассмотрены полиномиальные решения двух классов: Стеклова – Ковалевского – Горячева и Докшевича. Структура инвариантных соотношений для полиномиальных решений показывает, что, как правило, к указанным выше пятнадцати параметрам добавляется еще не менее двадцати пяти параметров задачи. При решении такой многопараметрической задачи в статье наряду с аналитическими методами применяются численные методы, основанные на вычислительных математических пакетах. Исследование условий существования полиномиальных решений проведено в два этапа. На первом этапе выполнена оценка максимальных степеней рассмотренных полиномов и получена нелинейная алгебраическая система на параметры дифференциальных уравнений и полиномиальных решений. На втором этапе с помощью компьютерных вычислений исследованы условия разрешимости полученных систем и изучены условия действительности построенных решений.

Для уравнений Кирхгофа – Пуассона построены два новых полиномиальных решения. Первое решение характеризуется следующим свойством: квадраты проекций угловой скорости на небарецентрические оси являются многочленами пятой степени от компоненты вектора угловой скорости на барецентрическую ось, которая выражается в виде гиперэллиптической функции времени. Второе решение характеризуется тем, что первая компонента угловой скорости является многочленом второго порядка, вторая компонента — многочленом третьего порядка, квадрат третьей компоненты — многочленом шестого порядка по вспомогательной переменной, которая является обращением эллиптического интеграла Лежандра.

Третье решение построено для уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Для него структура такова: первая и вторая компоненты вектора угловой скорости — многочлены второй степени, квадрат третьей компоненты — многочлен четвертой степени по вспомогательной переменной, которая находится обращением эллиптического интеграла Лежандра.

Все построенные решения не имеют аналогов в динамике твердого тела с неподвижной точкой.

Ключевые слова: полиномиальные решения, уравнения Кирхгофа – Пуассона, гиростат, потенциальные и гироскопические силы, эффект Барнетта – Лондона, эллиптические интегралы Лежандра

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2018 VOL. 10 NO. 1 P. 7–25
DOI: 10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25

MODELS IN PHYSICS AND TECHNOLOGY

UDC: 531.38, 531.39

Computer studies of polynomial solutions for gyrostat dynamics

A. V. Zyza

State Educational Institution of Higher Professional Education "Donetsk National University",
University st. 24, Donetsk, 83001, DPR

E-mail: z9125494@mail.ru

Received 13.07.2017, after completion — 19.12.2017.
Accepted for publication 17.01.2018.

We study polynomial solutions of gyrostat motion equations under potential and gyroscopic forces applied and of gyrostat motion equations in magnetic field taking into account Barnett – London effect. Mathematically, either of the above mentioned problems is described by a system of non-linear ordinary differential equations whose right hand sides contain fifteen constant parameters. These parameters characterize the gyrostat mass distribution, as well as potential and non-potential forces acting on gyrostat. We consider polynomial solutions of Steklov – Kovalevski – Gorjachev and Doshkevich classes. The structure of invariant relations for polynomial solutions shows that, as a rule, on top of the fifteen parameters mentioned one should add no less than twenty five problem parameters. In the process of solving such a multi-parametric problem in this paper we (in addition to analytic approach) apply numeric methods based on CAS. We break our studies of polynomial solutions existence into two steps. During the first step, we estimate maximal degrees of polynomials considered and obtain a non-linear algebraic system for parameters of differential equations and polynomial solutions. In the second step (using the above CAS software) we study the solvability conditions of the system obtained and investigate the conditions of the constructed solutions to be real.

We construct two new polynomial solutions for Kirchhoff – Poisson. The first one is described by the following property: the projection squares of angular velocity on the non-baracentric axes are the fifth degree polynomials of the angular velocity vector component of the baracentric axis that is represented via hypereliptic function of time. The second solution is characterized by the following: the first component of velocity conditions is a second degree polynomial, the second component is a polynomial of the third degree, and the square of the third component is the sixth degree polynomial of the auxiliary variable that is an inversion of the elliptic Legendre integral.

The third new partial solution we construct for gyrostat motion equations in the magnetic field with Barnett – London effect. Its structure is the following: the first and the second components of the angular velocity vector are the second degree polynomials, and the square of the third component is a fourth degree polynomial of the auxiliary variable which is found via inversion of the elliptic Legendre integral of the third kind.

All the solutions constructed in this paper are new and do not have analogues in the fixed point dynamics of a rigid body.

Keywords: polinomial solutions, the Kirchhoff – Poisson equation, gyrostat, potential and gyroscopics forces, Barnett – London effect, elliptical Legendre integrals

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 7–25 (Russian).

1. Введение

Моделирование движений гиростата, имеющего неподвижную точку, под действием достаточно широкого класса сил приводит к исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. В качестве примера могут быть рассмотрены два класса таких уравнений. Первый класс — система дифференциальных уравнений класса Кирхгофа – Пуассона [Yehia, 1986; Борисов, Мамаев, 2001; Горр, Мазнев, 2010], описывающая движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (в силу гидродинамической аналогии они могут быть линейными преобразованиями приведены к уравнениям движения тела в однородной, несжимаемой жидкости [Стеклов, 1893; Харламов, 1963; Yehia, 1986]). Второй класс дифференциальных уравнений моделирует движение твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона [Barnett, 1935; Киттель, 1963; Горр, Мазнев, 2010].

Общим свойством указанных классов дифференциальных уравнений является шестой порядок системы дифференциальных уравнений. Отличие этих классов состоит в том, что уравнения Кирхгофа – Пуассона допускают три первых интеграла, а уравнения движения тела в магнитном поле допускают два первых интеграла. В первом случае применима теория Якоби интегрирования в квадратурах при наличии дополнительного интеграла, а во втором случае нет.

Известно, что при произвольных значениях параметров задачи уравнения динамики твердого тела не интегрируемы в квадратурах [Зиглин, 1981; Козлов, Онищенко, 1982; Борисов, Мамаев, 2001]. Поэтому изучение свойств движения тела и гиростата с неподвижной точкой может быть основано либо на построении частных решений [Klein, Sommerfeld, 1965], либо на численном инегрировании с помощью компьютерных средств. В монографии [Борисов, Мамаев, 2001, с. 11] отмечено: «Систематическое развитие компьютерных исследований, открывающее новые области компьютерной (или «виртуальной») динамики, — дело ближайшего будущего».

Эффективность этих подходов показана, например, в процессе применения метода Пуансо прямого кинематического истолкования движения на основе уравнений П. В. Харламова [Харламов, 1964]. В работах А. П. Харламова [Харламов, 1992, 1993] и М. П. Харламова [Харламов, 1980, 1981] разработаны методы визуализации движений твердого тела с помощью качения без скольжения подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному. Обзор результатов, полученных в этой области, изложен в монографии [Гашененко и др., 2012].

Данная статья посвящена применению компьютерных исследований для построения полиномиальных решений в задачах динамики твердого тела.

В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой полиномиальные решения изучались В. А. Стекловым [Стеклов, 1899], Н. Ковалевским [Kowalewski, 1908], Д. Н. Горячевым [Горячев, 1899], С. А. Чаплыгиным [Чаплыгин, 1904]. Обобщение этих решений на случай движения гиростата получил П. В. Харламов [Харламов, 1965]. Условия существования полиномиальных решений в обобщенных силовых полях рассмотрены Г. В. Горром и А. В. Зызой [Горр, Зыза, 1998], А. В. Зызой [Зыза, 2012, 2013, 2015]. Указанные авторы для построения полиномиальных решений применяли в основном аналитические методы, а действительность решений показывалась при фиксированных значениях параметров.

В данной работе на основе компьютерных подходов в изучении полиномиальных решений уравнений динамики твердого тела дана оценка максимальных значений порядков исследуемых полиномиальных решений, получена система алгебраических уравнений на параметры задачи и решений, указаны численные примеры действительности построенных решений. Рассмотрены две задачи динамики гиростата. Первая задача моделирует движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; она описывается уравнениями класса Кирхгофа – Пуассона. Вторая задача моделирует движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Построены новые решения уравнений движения гиростата, которые описываются обобщенными типами полиномиальных решений.

2. Постановка задач динамики гиростата. Структура обобщенных классов полиномиальных решений

2.1. Задача о движении гиростата в суперпозиции силовых полей

Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при ньютоновском притяжении масс и взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку параллельно вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются лоренцевым воздействием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Уравнения движения рассматриваемого гиростата относятся к уравнениям класса Кирхгофа [Борисов, Мамаев, 2001; Харламов, Мозалевская, Лесина, 2001] и в векторной форме [Горр, Мазнев, 2010] таковы:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла:

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E_0, \quad 2(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2K_0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) введены следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент, характеризующий вращательное движение роторов либо по инерции, либо с постоянной относительной скоростью; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор обобщенного центра масс; A — тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C — симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную; E_0 и K_0 — постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_3\omega_2\nu_3 - B_2\omega_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \\ \qquad + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + B_1\omega_3\nu_1 - B_3\omega_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + \\ \qquad + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 - s_1\nu_3 + s_3\nu_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + B_2\omega_1\nu_2 - B_1\omega_2\nu_1 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \\ \qquad + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1; \end{cases} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{4}$$

$$\begin{cases} A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2(s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + s_3\nu_3) + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E_0, \\ 2(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + 2(A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + 2(A_3\omega_3 + \lambda_3)\nu_3 - B_1\nu_1^2 - B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 = 2K_0, \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

2.2. Задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона

Рассмотрим движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Эффект Барнетта – Лондона состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Намагниченность, возникающая при вращении, линейно зависит от условий скорости $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega})$, где B — симметричный тензор третьего порядка. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля. При этом взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [Урман, 1984].

Изучение движения тела под действием указанного магнитного момента имеет важное значение при определении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес.

Поэтому при математическом моделировании движения гиростата в магнитном поле необходимо учитывать магнитный момент, возникающий в результате эффекта Барнетта – Лондона. Это приводит к тому, что уравнения движения тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона, в отличие от уравнений Эйлера – Пуассона и Кирхгофа – Пуассона, не допускают интеграл энергии. Это обусловлено тем, что имеет место диссипация энергии — переход энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела. Поэтому для интегрирования уравнений движения недостаточно построить дополнительный первый интеграл [Харламов, 1965; Борисов, Мамаев, 2001].

Уравнения движения гиростата в магнитном поле, с учетом эффекта Барнетта – Лондона и момента ньютоновских сил, в векторном виде таковы [Горр, Мазнев, 2010]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{6}$$

Уравнения (6) допускают только два первых интеграла:

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = \widetilde{K}_0. \tag{7}$$

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^{\bullet} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{8}$$

В уравнениях (6)–(8) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор обобщенного центра масс; $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор инерции гиростата в неподвижной точке; $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$ — матрица, характеризующая магнитный момент гиростата $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$; матрица $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$ — приведенный тензор инерции, который характеризует ньютоновское притяжение гиростата неподвижным центром; $\widetilde{K}_0$ — постоянная интеграла площадей; точка над переменными обозначает относительную производную.

Если для динамического уравнения из (6) имеет место $B = \widetilde{\xi}E$ (E — единичная матрица, $\widetilde{\xi}$ — некоторый параметр), то из соотношения (8) вытекает интеграл энергии для уравнений движения (6). Тогда уравнения (6) по своей структуре будут совпадать с уравнениями (1) задачи о движении гиростата в поле потенциальных и гироскопических сил.

В этом случае полученные для уравнений (6) результаты следует сопоставлять с результатами [Горр, Мазнев, 2010].

Уравнения (6) и интегралы (7) запишем в скалярном виде. Кинематические уравнения движения совпадут с уравнениями (4), а динамические уравнения и первые интегралы примут вид

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + B_2\omega_2\nu_3 - B_3\omega_3\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3 + \\ \qquad\qquad + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + B_3\omega_3\nu_1 - B_1\omega_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + \\ \qquad\qquad + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3 - s_1\nu_3 + s_3\nu_1, \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 - B_2\omega_2\nu_1 + B_1\omega_1\nu_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \\ \qquad\qquad + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1; \end{cases} \tag{9}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + (A_3\omega_3 + \lambda_3)\nu_3 = \tilde{K}_0. \tag{10}$$

2.3. Структура первого обобщенного класса полиномиальных решений уравнений (3)*,* (4) *и* (4)*,* (9)

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) и (4), (9) при $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ решений следующего вида:

$$\begin{gathered} \omega_1 = p, \quad \omega_2^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k, \quad \omega_3^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_i p^i, \\ \nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_j p^j, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p}\,\omega_2, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(p)}{p}\,\omega_3, \\ \psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_i p^i, \quad \varkappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_j p^j, \end{gathered} \tag{11}$$

где n, m, l, n_1, m_1 — натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j — неизвестные постоянные, подлежащие определению. Указанный класс полиномиальных решений (11) является обобщением класса полиномиальных решений Стеклова–Ковалевского–Горячева. При условии $g_0^2 + f_0^2 = 0$ этим классом описываются частные решения полиномиальной структуры В. А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д. Н. Горячева классической задачи динамики твердого тела.

2.4. Структура второго обобщенного класса полиномиальных решений уравнений (3)*,* (4) *и* (4)*,* (9)

Поставим теперь задачу о нахождении условий существования у дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона при $\lambda_3 = 0$, $s_3 = 0$ частных решений следующего вида:

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n^*} \tilde{b}_i \sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m^*} \tilde{c}_j \sigma^j, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{l^*} \tilde{a}_i \sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{n_1^*} \tilde{g}_j \sigma^j, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma}\omega_3, \\ \varkappa(\sigma) = \sum_{i=0}^{m_1^*} \tilde{f}_i \sigma^i. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь n^*, m^*, l^*, n_1^*, m_1^* — натуральные числа или нули; $\tilde{b}_i$, $\tilde{c}_j$, $\tilde{a}_i$, $\tilde{g}_j$, $\tilde{f}_i$ — параметры, подлежащие определению.

Класс полиномиальных решений (12) является обобщением класса полиномиальных решений, описывающих частное решение А. И. Докшевича в задаче о движении тяжелого гиростата [Докшевич, 1970].

3. Новое частное решение первого обобщенного полиномиального класса уравнений Кирхгофа – Пуассона

Подставим выражения (11) в уравнения движения гиростата под действием потенциальных гироскопических сил (3), (4) и первые интегралы (5):

$$\dot{p} = \Phi(p)(p\varphi'(p))^{-1}\sqrt{Q(p)R(p)}; \quad \Phi(p) = \psi(p) - \varkappa(p); \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
(Q(p)\psi^2(p)p^{-2})'\Phi(p) = 2\varphi'(p)\psi(p)(\varkappa(p) - \varphi(p)),\\
(R(p)\varkappa^2(p)p^{-2})'\Phi(p) = 2\varphi'(p)\varkappa(p)(\varphi(p) - \psi(p)),\\
A_1\Phi(p)p = \varphi'(p)[(C_3 - C_2)\psi(p)\varkappa(p) + (B_3\varkappa(p) - B_2\psi(p))p + (A_2 - A_3)p^2], \qquad (14)\\
Q'(p)\Phi(p) = 2\varphi'(p)[(C_1 - C_3)\varphi(p)\varkappa(p) - \varkappa(p)(B_3p + s_1) + (B_1\varphi(p) - \lambda_1)p + (A_3 - A_1)p^2],\\
R'(p)\Phi(p) = 2\varphi'(p)[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_2p + s_1) - (B_1\varphi(p) - \lambda_1)p + (A_1 - A_2)p^2],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
(\varphi^2(p) - 1)p^2 + Q(p)\psi^2(p) + R(p)\varkappa^2(p) = 0,\\
Q(p)(C_2\psi^2(p)p^{-2} + A_2) + R(p)(C_3\varkappa^2(p)p^{-2} + A_3) + C_1\varphi^2(p) - 2s_1\varphi(p) + A_1p^2 = 2E_0, \qquad (15)\\
Q(p)\psi(p)p^{-1}(B_2\psi(p)p^{-1} - 2A_2) + R(p)\varkappa(p)p^{-1}(B_3\varkappa(p)p^{-1} - 2A_3) +\\
+ B_1\varphi^2(p) - 2A_1p\varphi(p) - 2\varphi(p)\lambda_1 + 2K_0 = 0.
\end{gathered}$$

В уравнениях (13), (14) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной p. Если функции $Q(p)$, $R(p)$, $\varphi(p)$, $\psi(p)$, $\varkappa(p)$ определены, то зависимость p от времени устанавливается из дифференциального уравнения (13).

Рассмотрим случай, когда в (11) $n = m = 5$, $l = 2$, а $n_1 = m_1 = 1$. Тогда

$$\begin{gathered}
\omega_1 = p, \quad \omega_2^2 = Q(p) = b_5p^5 + b_4p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0,\\
\omega_3^2 = R(p) = c_5p^5 + c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0, \qquad (16)\\
\nu_1 = \varphi(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p}\omega_2, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(p)}{p}\omega_3,\\
\psi(p) = g_1p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_1p + f_0.
\end{gathered}$$

Подставим полиномы из (16) в уравнения (14) и геометрический интеграл из (15) и потребуем выполнение полученных равенств при всех p. В результате компьютерного исследования получим систему алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (16).

Обозначая $\alpha = C_3 - C_2$, $\beta = C_1 - C_3$ и $d_0 = \alpha g_0 f_0$, запишем уравнения этой системы:

$$\begin{gathered}
f_1 = g_1,\\
(\alpha g_1 + B_3 - B_2)g_1 + A_2 - A_3 = 0, \quad \alpha g_1(g_0 + f_0) + B_3f_0 - B_2g_0 = 0, g_0 - f_0 = 2a_2d_0A_1^{-1}, \quad a_1d_0 = 0,\\
(3b_5g_0 + 4b_4g_1)d_0A_1^{-1} + 2(a_1 - g_1) = 0, \;\; 5b_5g_1d_0A_1^{-1} + 2a_2 = 0, \;\; (3b_3g_1 + 2b_4g_0)d_0A_1^{-1} + 2(a_0 - f_0) = 0,\\
(3c_5f_0 + 4c_4g_1)d_0A_1^{-1} + 2(g_1 - a_1) = 0, \;\; 5c_5g_1d_0A_1^{-1} - 2a_2 = 0, \;\; (3c_3g_1 + 2c_4f_0)d_0A_1^{-1} + 2(g_0 - a_0) = 0,\\
(2b_2g_1 + b_3g_0)d_0 = 0, \;\; b_1g_1d_0 = 0, \;\; b_1g_0d_0 = 0, \;\; b_0g_0d_0 = 0, \;\; A_2b_1d_0 = 0, \;\; A_3c_1d_0 = 0, \qquad (17)\\
(2c_2g_1 + c_3f_0)d_0 = 0, \;\; c_1g_1d_0 = 0, \;\; c_1f_0d_0 = 0, \;\; c_0f_0d_0 = 0, \;\; A_2b_2d_0A_1^{-1} + (s_1 - \beta a_0)f_0 = 0,
\end{gathered}$$

$$5A_2b_5d_0A_1^{-1} - 2a_2(\beta g_1 + B_1) = 0,\ \ 3A_2b_3d_0A_1^{-1} - 2(\beta g_1 + B_1)a_0 + 2\lambda_1 + 2(B_3 - \beta a_1)f_0 + 2g_1s_1 = 0,$$
$$2A_2b_4d_0A_1^{-1} - a_1(\beta g_1 + B_1) - \beta a_2 f_0 + B_3g_1 + A_1 - A_3 = 0,$$
$$5A_3c_5d_0A_1^{-1} + 2a_2((\alpha+\beta)g_1 + B_1) = 0,\ \ 2A_3c_4d_0A_1^{-1} + (\alpha+\beta)(a_1g_1 + a_2g_0) + B_1a_1 - B_2g_1 + A_2 - A_1 = 0,$$
$$3A_3c_3d_0A_1^{-1} + 2[(\alpha+\beta)(a_0g_1 + a_1g_0) + B_1a_0 - \lambda_1 - B_2g_0 - g_1s_1] = 0, A_3c_2d_0A_1^{-1} + ((\alpha+\beta)a_0 - s_1)g_0 = 0,$$
$$b_0g_1^2 + 2b_1g_1g_0 + b_2g_0^2 + c_0g_1^2 + 2c_1g_1f_0 + c_2f_0^2 + a_0^2 - 1 = 0.$$

Система (17) совместима относительно ненулевых параметров A_1, A_2, B_3. Считая $d_0 \neq 0$, запишем ее решение:

$$\begin{gathered}
a_1 = 0,\ \ b_0 = 0,\ \ b_1 = 0,\ \ c_0 = 0,\ \ c_1 = 0,\\
a_2 = \frac{\delta_1\delta_2^2A_1}{\delta^4B_3\tau},\ \ b_5 = -\frac{2\delta_1\delta_2^2A_1^3}{5\tau^3},\ \ b_4 = \frac{\delta_2\delta_3A_1^2}{5\tau^2},\ \ b_3 = \frac{2\delta_5A_1}{5\delta_1\tau},\ \ b_2 = -\frac{\delta_4\delta_5}{5\delta_1^2\delta_2},\\
c_4 = \frac{\delta_2\delta_6A_1^2}{5\tau^2},\ \ c_5 = \frac{2\delta_1\delta_2^2A_1^3}{5\tau^3},\ \ c_3 = -\frac{2\delta_7A_1}{5\delta_1\tau},\ \ c_2 = -\frac{\delta_7A_1}{5\delta_1^2\delta_2},\ \ g_1 = -\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_4B_3},\\
g_0 = -\frac{\delta_4f_0}{A_1},\ \ A_2 = \frac{(3A_1 - 5A_3)A_1}{\delta_4},\ \ B_2 = -B_3,\ \ B_1 = -\frac{\delta_8B_3}{5\delta_1\delta_2},\ \ \alpha = \frac{\delta_4B_3^2}{\delta_1\delta_2},\ \ \beta = -\frac{\delta_4^2\delta_6B_3^2}{5(\delta_1\delta_2)^2},\\
\lambda_1 = -\frac{\delta_9\tau}{25\delta_1^2\delta_2},\ \ s_1 = \frac{\delta_4\delta_{10}B_3\tau}{25\delta_1^3\delta_2^2},\ \ a_0 = -\frac{2\delta_{11}f_0}{5\delta_1A_1},\ \ f_0 = 5A_1\sqrt{\frac{\delta_1^2}{\delta_{12}\delta_{13}}}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\delta_1 = A_1 - 2A_3,\ \ \delta_2 = 3A_1 - 4A_3,\ \ \delta_3 = 5A_1 - 7A_3,\ \ \delta_4 = 5A_1 - 8A_3,\ \ \delta_5 = 10A_1^2 - 33A_1A_3 + 28A_3^2,\\
\delta_6 = 4A_1 - 5A_3,\ \ \delta_7 = 7A_1^2 - 23A_1A_3 + 20A_3^2,\ \ \delta_8 = 5A_1^2 - 32A_1A_3 + 40A_3^2,\ \ \delta_9 = 25A_1^2 - 94A_1A_3 + 90A_3^2,\\
\delta_{10} = 50A_1^2 - 161A_1A_3 + 135A_3^2,\ \ \delta_{11} = 25A_1^2 - 82A_1A_3 + 70A_3^2,\ \ \delta_{12} = 15A_1^2 - 40A_1A_3 + 28A_3^2,\\
\delta_{13} = 27A_1^2 - 80A_1A_3 + 60A_3^2,\ \ \tau = \delta_4B_3f_0.
\end{gathered}$$

Зависимость переменной p от времени t получим из дифференциального уравнения (13):

$$\begin{gathered}
\dot{p} = \frac{d_0}{A_1}\sqrt{(b_5p^3 + b_4p^2 + b_3p + b_2)(c_5p^3 + c_4p^2 + c_3p + c_2)},\\
d_0 = -\tau^2(\delta_1\delta_2A_1)^{-1}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Рассмотрим числовой пример действительного решения (16), (18), (19) уравнений (3), (4). Пусть $a > 0$ и $b > 0$ и

$$\begin{gathered}
A_1 = a,\ \ A_2 = \frac{23}{35}a,\ \ A_3 = \frac{10}{9}a,\ \ B_1 = -\frac{305}{143}b,\ \ B_2 = -b,\ \ B_3 = b,\ \ \alpha = -\frac{315}{143}\frac{b^2}{a},\ \ \beta = \frac{30870}{20449}\frac{b^2}{a};\\
\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{3591}{1573}fb, 0, 0\right),\ \ \boldsymbol{s} = \left(-\frac{1349460}{224939}\frac{b^2f}{a}, 0, 0\right),\ \ f = \frac{33}{27307}\sqrt{409605},
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}
\omega_1 = p,\ \ \omega_2 = p\sqrt{Q^*(p)},\ \ \omega_3 = p\sqrt{R^*(p)},\\
Q^*(p) = -\frac{1}{337211875(fb)^3}(5848414a^3p^3 - 17892875a^2fbp^2 - 224224000a(fb)^2p + 9604\cdot 10^5(fb)^3),\\
R^*(p) = \frac{1}{337211875(fb)^3}(5848414a^3p^3 + 10020010a^2fbp^2 - 174123950a(fb)^2p + 191779875(fb)^3),
\end{gathered} \tag{21}$$

$$\nu_1 = -\frac{1}{121275 fb^2}(20449a^2p^2 - 806050(fb)^2),$$

$$\nu_2 = \frac{1}{315b}(143ap + 1225fb)\sqrt{Q^*(p)}, \quad \nu_3 = \frac{1}{315b}(143ap + 315fb)\sqrt{R^*(p)},$$

$$\overset{\bullet}{p} = -\frac{1225}{143}\left(\frac{bf}{a}\right)^2 \sqrt{Q^*(p)R^*(p)}, \tag{22}$$

где

$$-\frac{34fb}{5a} < p < -\frac{33fb}{5a}.$$

На указанном интервале функции $Q^*(p)$ и $R^*(p)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность этого решения доказана.

В приведенном примере (20)–(22) решения дифференциальных уравнений (3), (4) присутствуют произвольные положительные параметры a и b. Функция $p = p(t)$ находится путем обращения гиперэллиптического интеграла, полученного из (22). Это позволяет установить из (21) зависимость от времени всех переменных задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Замечание. В результате компьютерного исследования установлено, что указанное полиномиальное решение (16) в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона динамически невозможно.

4. Новое частное решение второго обобщенного полиномиального класса уравнений Кирхгофа – Пуассона

Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил (3), (4) и геометрический интеграл из (5), учитывая выражения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$ из (12):

$$\overset{\bullet}{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1}(\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})\sqrt{R(\sigma)}; \tag{23}$$

$$\begin{cases} \psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)) = \varphi'(\sigma)\sigma P(\sigma), \quad P(\sigma) = \sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma), \\ (R(\sigma)(\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})^2)'\sigma P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} 2A_1\sigma^2 P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_3Q(\sigma) + s_2\} + \\ \qquad + \{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_2\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma), \\ A_2Q'(\sigma)\sigma P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_3\sigma^2 - s_1\} + \\ \qquad + \{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_1\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma), \\ A_3R'(\sigma)P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_2\sigma^2 + s_1\} + \\ \qquad + Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_1\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)); \end{cases} \tag{25}$$

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{26}$$

В уравнениях (23)–(25) штрихом обозначена производная вспомогательной переменной σ. После интегрирования уравнений (24), (25) зависимость σ от времени t находим из уравнения (23).

Изучим случай, когда максимальные степени полиномов из (12) таковы: $n^* = 3$, $m^* = 6$, $l^* = 2$, $n_1^* = 3$, $m_1^* = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \tilde{b}_3\sigma^3 + \tilde{b}_2\sigma^2 + \tilde{b}_1\sigma + \tilde{b}_0,\\
&\omega_3^2 = R(\sigma) = \tilde{c}_6\sigma^6 + \tilde{c}_5\sigma^5 + \tilde{c}_4\sigma^4 + \tilde{c}_3\sigma^3 + \tilde{c}_2\sigma^2 + \tilde{c}_1\sigma + \tilde{c}_0,\\
&\nu_1 = \varphi(\sigma) = \tilde{a}_2\sigma^2 + \tilde{a}_1\sigma + \tilde{a}_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \tilde{g}_3\sigma^3 + \tilde{g}_2\sigma^2 + \tilde{g}_1\sigma + \tilde{g}_0,\\
&\nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\sqrt{R(\sigma)}, \quad \varkappa(\sigma) = \tilde{f}_1\sigma + \tilde{f}_0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Подставим полиномы из (27) в уравнения движения (24), (25) и интеграл (26). Требование того, чтобы полученные равенства были тождественны по σ при $\tilde{f}_0 \neq 0$, приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (27):

$$\begin{gathered}
A_2 = A_3, \ \ B_2 = B_3, \ \ C_2 = C_3,\\
\tilde{g}_3 - \tilde{b}_3\tilde{f}_1 = 0; \ \ \tilde{g}_2 - \tilde{b}_3\tilde{f}_0 - \tilde{b}_2\tilde{f}_1 = 0, \ \ \tilde{b}_0 = 0, \ \ s_2 = 0,\\
B_2(\tilde{b}_1\tilde{f}_0 - \tilde{g}_0) + \lambda_2 = 0, \ \ 3\tilde{g}_3\mu - 2A_1(\tilde{f}_1 - \tilde{a}_2) = 0, \ \ 2\tilde{g}_2\mu - 2A_1(\tilde{f}_0 - \tilde{a}_1) = 0,\\
\tilde{g}_1\mu + 2A_1\tilde{a}_0 = 0; \ \ A_1(\tilde{g}_1 - \tilde{b}_2\tilde{f}_0 - \tilde{b}_1\tilde{f}_1) - \mu\tilde{a}_2 = 0,\\
2A_1(\tilde{g}_0 - \tilde{b}_1\tilde{f}_0) - \mu\tilde{a}_1 = 0, \ \ \tilde{c}_0 = 0, \ \ \tilde{c}_1 = 0.\\
3\tilde{c}_6\tilde{f}_1\mu - 2A_1(\tilde{b}_3\tilde{a}_2 - \tilde{g}_3) = 0; \ \ (5\tilde{c}_5\tilde{f}_1 + 4\tilde{c}_6\tilde{f}_0)\mu - 4A_1(\tilde{b}_3\tilde{a}_1 + \tilde{b}_2\tilde{a}_2 - \tilde{g}_2) = 0,\\
(4\tilde{c}_4\tilde{f}_1 + 3\tilde{c}_5\tilde{f}_0)\mu - 4A_1(\tilde{b}_3\tilde{a}_0 + \tilde{b}_2\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1\tilde{a}_2 - \tilde{g}_1) = 0,\\
(3\tilde{c}_3\tilde{f}_1 + 2\tilde{c}_4\tilde{f}_0)\mu - 4A_1(\tilde{b}_2\tilde{a}_0 + \tilde{b}_1\tilde{a}_1 - \tilde{g}_0) = 0,\\
(2\tilde{c}_2\tilde{f}_1 + \tilde{c}_3\tilde{f}_0)\mu - 4A_1\tilde{b}_1\tilde{a}_0 = 0, \ \ \tilde{\alpha}\tilde{a}_0 - s_1 = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&3\mu A_2\tilde{b}_3 - 2A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{f}_1 + \tilde{\delta}_1) = 0, \quad \mu A_2\tilde{b}_2 - A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{f}_0 + (\tilde{\alpha}\tilde{f}_1 + B_1)\tilde{a}_1) = 0,\\
&\mu A_2\tilde{b}_1 - 2A_1(\tilde{\alpha}\tilde{a}_1\tilde{f}_0 + \tilde{\delta}_2) = 0; \quad 3\mu A_2\tilde{c}_6 + 2A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{g}_3 + \tilde{\delta}_1\tilde{b}_3) = 0,\\
&5\mu A_2\tilde{c}_5 + 4A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{g}_2 + \tilde{\delta}_1\tilde{b}_2 + (\tilde{\alpha}\tilde{g}_3 + B_1\tilde{b}_3)\tilde{a}_1) = 0,\\
&\mu A_2\tilde{c}_4 + A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{g}_1 + \tilde{\delta}_1\tilde{b}_1 + (\tilde{\alpha}\tilde{g}_2 + B_1\tilde{b}_2)\tilde{a}_1 + \tilde{\delta}_2\tilde{b}_3) = 0,\\
&3\mu A_2\tilde{c}_3 + 4A_1(\tilde{\delta}_0\tilde{g}_0 + (\tilde{\alpha}\tilde{g}_1 + B_1\tilde{b}_1)\tilde{a}_1 + \tilde{\delta}_2\tilde{b}_2 + \lambda_2) = 0,\\
&\mu A_2\tilde{c}_2 + 2A_1(\tilde{\alpha}\tilde{g}_0\tilde{a}_1 + \tilde{\delta}_2\tilde{b}_1) = 0, \quad \tilde{a}_0^2 + \tilde{g}_0^2 + \tilde{c}_2\tilde{f}_0^2 - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\mu = B_2(\tilde{b}_2\tilde{f}_0 + \tilde{b}_1\tilde{f}_1 - \tilde{g}_1), \quad \tilde{\alpha} = C_1 - C_2, \quad \tilde{\delta}_0 = \tilde{\alpha}\tilde{a}_2 - B_2,\\
\tilde{\delta}_1 = B_1\tilde{a}_2 + A_2 - A_1, \quad \tilde{\delta}_2 = B_1\tilde{a}_0 - \lambda_1.
\end{gathered}$$

На основании компьютерного исследования установлено, что система алгебраических уравнений (28) при условиях $\tilde{g}_1 \neq 0$ и $\tilde{g}_2 \neq 0$ разрешима относительно ненулевых параметров A_1, A_2, $\tilde{a}_1\lambda_2$. Запишем решение этой системы, полагая $\xi = A_1 - A_2$, $\delta = A_1 - 3A_2$, $B_1 = kB_2$:

$$\begin{gathered}
A_2 = A_3, \ \ B_2 = B_3 \ \ C_2 = C_3, \ \ c_0 = 0, \ \ c_1 = 0, \ \ b_0 = 0, \ \ s_2 = 0,\\
k = -(A_1^2 - 3A_1A_2 + 4A_2^2)(A_1\delta)^{-1}, \ \ \tilde{\alpha} = -(\xi B_2)^2(A_1\delta^2)^{-1},\\
\tilde{f}_1 = \delta(2B_2)^{-1}, \ \ \tilde{f}_0 = \tilde{a}_1\delta^2(4A_1A_2)^{-1}, \ \ \tilde{b}_3 = \xi\tilde{a}_1B_2(\lambda_2\delta)^{-1},\\
\tilde{b}_2 = -\xi(A_1 + 3A_2)(\tilde{a}_1B_2)^2(4A_1A_2\lambda_2\delta)^{-1},\\
\tilde{b}_1 = -\xi^2(A_1 - 5A_2)(\tilde{a}_1B_2)^3(8(A_1A_2)^2\lambda_2\delta)^{-1},\\
\tilde{g}_3 = \xi\tilde{a}_1(2\lambda_2)^{-1}, \ \ \tilde{g}_2 = \xi(A_1 - 9A_2)\,\tilde{a}_1^2B_2(8A_1A_2\lambda_2)^{-1},\\
\tilde{g}_1 = -(\xi(A_1^2 - 3A_1A_2 - 2A_2^2)(\tilde{a}_1B_2)^4 + 16A_1^3A_2^2\lambda_2^2)(8(A_1A_2)^2\lambda_2\tilde{a}_1B_2^2)^{-1},\\
\tilde{g}_0 = -(\xi^2\delta(A_1 - 5A_2)(\tilde{a}_1B_2)^4 - 32(A_1A_2)^3\lambda_2^2)(32(A_1A_2)^3\lambda_2B_2)^{-1},
\end{gathered} \tag{29}$$

$$\tilde{a}_2 = -A_1B_2^{-1},\ \ \tilde{a}_0 = (\xi(A_1^2 - 3A_1A_2 - 2A_2^2)(\tilde{a}_1B_2)^4 + 16A_1^3A_2^2\lambda_2^2)(8(A_1A_2\tilde{a}_1)^2B_2^3)^{-1},$$
$$\tilde{c}_6 = -(\xi\tilde{a}_1B_2)^2(\delta\lambda_2)^{-2},\ \ \tilde{c}_5 = \xi^2(A_1 + 3A_2)(\tilde{a}_1B_2)^3(2A_1A_2(\lambda_2\delta)^2)^{-1},$$
$$\tilde{c}_4 = (64A_1^3A_2^2(A_1 - 2A_2)\lambda_2^2 + \xi^2(3A_1^2 - 30A_1A_2 + 11A_2^2)(\tilde{a}_1B_2)^4)(4A_1A_2\lambda_2\delta)^{-2},$$
$$\tilde{c}_3 = -\xi^2\tilde{a}_1B_2\Big[\xi(A_1 + 3A_2)(A_1 - 5A_2)(\tilde{a}_1B_2)^4 + 32A_1^3(A_2\lambda_2)^2\Big](16(A_1A_2)^3(\lambda_2\delta)^2)^{-1},$$
$$\tilde{c}_2 = -(\xi\tilde{a}_1B_2)^2\Big[(\xi(A_1 - 5A_2))^2(\tilde{a}_1B_2)^4 - (4A_1A_2)^3\lambda_2^2\Big](64(A_1A_2)^4(\lambda_2\delta)^2)^{-1},$$
$$\lambda_1 = -\Big[\xi(\tilde{a}_1B_2)^4(A_1^3(A_1 - 5A_2) + A_2^2(9A_1^2 - 5A_1A_2 - 8A_2^2)) + 16A_1^3A_2^2\lambda_2^2(A_1^2 - 3A_1A_2 + 4A_2^2)\Big]\times$$
$$\times(8A_1^3(A_2\tilde{a}_1B_2)^2\delta)^{-1},$$
$$s_1 = -\xi^2\Big[\xi(A_1^2 - 3A_1A_2 - 2A_2^2)(\tilde{a}_1B_2)^4 + 16A_1^3A_2^2\lambda_2^2\Big](8A_1^3(A_2\tilde{a}_1\delta)^2B_2)^{-1}.$$

Здесь B_2 — действительный корень уравнения

$$(\tilde{a}_1B_2)^8(A_1 - A_2)^4(A_1 - 2A_2)^2 + 32(\tilde{a}_1B_2)^4\lambda_2^2A_1^3A_2^2\{(A_1 - 4A_2)A_1^2 +$$
$$+ (3A_1 + 2A_2)A_2^2\} - 64(a_1B_2)^4B_2^2(A_1A_2)^4 + 256\lambda_2^4A_1^6A_2^4 = 0.$$

Решение (27) при условиях (29) будет действительным, например, если

$$64(A_1A_2)^3\lambda_2^2 > (\tilde{a}_1B_2)^4(A_1 - A_2)^2(A_1 - 5A_2)^2. \tag{30}$$

Зависимость σ от времени находим из дифференциального уравнения (23):

$$\dot{\sigma} = \lambda_2(\tilde{a}_1B_2)^{-1}\sigma\sqrt{\tilde{c}_6\sigma^4 + \tilde{c}_5\sigma^3 + \tilde{c}_4\sigma^2 + \tilde{c}_3\sigma + \tilde{c}_2}. \tag{31}$$

Приведем численный пример решения (27), (29)–(31) уравнений (3), (4):

$$\begin{aligned}
&A_1 = \frac{3}{2}A_2,\ \ A_2 = A_3,\ \ A_2 = a,\ \ B_1 = \frac{7}{9}B_2,\ \ B_3 = B_2,\\
&B_2 = \frac{144a}{\eta\tilde{a}_1^2},\ \ \eta = \sqrt{186624a^4 + 6048a^2 + 1},\ \ C_2 = C_3,\\
&\tilde{\alpha} = C_1 - C_2 = -\frac{1536a}{\eta^2a_1^4},\ \ \lambda_2 = \tilde{a}_1^2B_2^2(a > 1, \tilde{a}_1 > 0),\\
&\boldsymbol{s} = \left(-\frac{1536(432a^2 - 17)a}{\eta^3\tilde{a}_1^4}, 0, 0\right),\ \ \boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{16a}{\eta^2\tilde{a}_1^2}(3024a^2 - 113), \lambda_2, 0\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Тогда выражение для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ запишем так:

$$\omega_1 = \sigma^2,\ \ \omega_2 = Q(\sigma) = \frac{\sigma}{a}\left(-\frac{\eta\tilde{a}_1}{432}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma - \frac{14}{3\eta\tilde{a}_1}\right),\ \ \omega_3^2 = R(\sigma) = \frac{\sigma^2}{3a^2}R^*(\sigma), \tag{33}$$
$$R^*(\sigma) = -\frac{\eta^2\tilde{a}_1^2}{62208}\sigma^4 + \frac{\eta\tilde{a}_1}{288}\sigma^3 - \frac{1728a^2 + 109}{432}\sigma^2 + \frac{7 - 96a^2}{\eta\tilde{a}_1}\sigma + \frac{4(3456a^2 - 49)}{3\eta^2\tilde{a}_1^2},$$
$$\nu_1 = \varphi(\sigma) = -\frac{\eta\tilde{a}_1^2}{96}\sigma^2 + \tilde{a}_1\sigma + \frac{432a^2 - 17}{\eta},$$
$$\nu_2 = \psi(\sigma) = \frac{1}{4a}\left(\frac{\eta^2\tilde{a}_1^3}{20736}\sigma^3 - \frac{5\eta\tilde{a}_1^2}{576}\sigma^2 + \frac{(17 - 432a^2)\tilde{a}_1}{36}\sigma + \frac{576a^2 - 7}{\eta}-\right);$$
$$\nu_3 = \frac{\tilde{a}_1}{8\sqrt{3}a}\left(-\frac{\eta\tilde{a}_1}{24}\sigma + 3\right)\cdot\sqrt{R^*(\sigma)}.$$

Так как функция $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma} = \frac{48\sqrt{3}}{\tilde{a}_1\eta}\sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \tag{34}$$

то действительность решения (32)–(34) вытекает из условия, что подкоренная функция в (34) при $\sigma = 0$ принимает положительное значение. При этом $\sigma(t)$ — функция, полученная в результате обращения эллиптического интеграла Лежандра третьего рода.

Приведенный пример (32)–(34) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и $\tilde{a}_1$. Зависимость всех переменных задачи от времени находим подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (33).

5. Новое частное решение второго обобщенного полиномиального класса задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона

Преобразуем уравнение движения (4), (9) на основании выражений из (12). Тогда кинематические уравнения совпадут с уравнениями (23), (24), а динамические уравнения примут вид

$$\begin{cases} 2A_1\sigma^2P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_2Q(\sigma) + s_2\} + \\ \qquad + \{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma), \\ A_2Q'(\sigma)\sigma P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_1\sigma^2 - s_1\} + \\ \qquad + \{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma), \\ A_3R'(\sigma)P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_1\sigma^2 + s_1\} + \\ \qquad + Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_2\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_1\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)). \end{cases} \tag{35}$$

Геометрический интеграл из (10) примет вид (26).

Исследуем вариант, когда максимальные степени полиномов решения (12) принимают следующие значения: $n^* = 2$, $m^* = 4$, $l^* = 3$, $n_1^* = 3$, $m_1^* = 2$. Запишем решение (12):

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \tilde{b}_2\sigma^2 + \tilde{b}_1\sigma + \tilde{b}_0, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \tilde{c}_4\sigma^4 + \tilde{c}_3\sigma^3 + \tilde{c}_2\sigma^2 + \tilde{c}_1\sigma + \tilde{c}_0, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \tilde{a}_3\sigma^3 + \tilde{a}_2\sigma^2 + \tilde{a}_1\sigma + \tilde{a}_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \tilde{g}_3\sigma^3 + \tilde{g}_2\sigma^2 + \tilde{g}_1\sigma + \tilde{g}_0, \quad \nu_3 = \frac{\varkappa(\sigma)}{\sigma}\sqrt{R(\sigma)}, \\ \varkappa(\sigma) = \tilde{f}_2\sigma^2 + \tilde{f}_1\sigma + \tilde{f}_0. \end{gathered} \tag{36}$$

Подставим полиномы (36) в уравнения движения (4), (9) и интеграл (26) и потребуем их тождественности при всех σ. С помощью компьютерного моделирования и исследования получим систему условий на параметры задачи (6) и решения (12), (36). Запишем алгебраические уравнения этой системы при условии $\tilde{f}_0 = 0$:

$$\begin{gathered} C_1 = C_2 = C_3, \\ B_2\tilde{b}_2\tilde{f}_2 - B_3\tilde{g}_3 = 0, \;\; \tilde{f}_1(B_2\tilde{b}_0 + s_2) + (A_2 - A_3)\tilde{b}_0 - B_3\tilde{g}_0 + \lambda_2 = 0, \\ 2A_1(\tilde{f}_2 - \tilde{a}_3) - 3\tilde{g}_3d_1 = 0, \;\; 2A_1(\tilde{f}_1 - \tilde{a}_2) - 3\tilde{g}_3d_0^* - 2\tilde{g}_2d_1 = 0, \\ 2A_1\tilde{a}_1 + 2\tilde{g}_2d_0^* + \tilde{g}_1d_1 = 0, \;\; 2A_1\tilde{a}_0 + \tilde{g}_1d_0^* = 0, \;\; 2A_1(\tilde{g}_3 - \tilde{b}_2\tilde{f}_2) - 3\tilde{a}_3d_1 = 0, \\ 2A_1(\tilde{g}_2 - \tilde{b}_2\tilde{f}_1 - \tilde{b}_1\tilde{f}_2) - 3\tilde{a}_3d_0^* - \tilde{a}_2d_1 = 0, \\ 2A_1(\tilde{g}_1 - \tilde{b}_1\tilde{f}_1 - \tilde{b}_0\tilde{f}_2) - 2\tilde{a}_2d_0 - \tilde{a}_1d_1 = 0, \;\; 2A_1(\tilde{g}_0 - \tilde{b}_0\tilde{f}_1) - \tilde{a}_1d_0^* = 0, \\ 3\tilde{c}_4\tilde{f}_2d_1 + 2A_1(\tilde{g}_3 - \tilde{b}_2\tilde{a}_3) = 0, \;\; 6\tilde{c}_4\tilde{f}_2d_0^* + (4\tilde{c}_4\tilde{f}_1 + 5\tilde{c}_3\tilde{f}_2)d_1 + 4A_1(\tilde{g}_2 - \tilde{b}_2\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1\tilde{a}_3) = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

$$(4\tilde{c}_4\tilde{f}_1 + 5\tilde{c}_3\tilde{f}_2)d_0^* + (3\tilde{c}_3\tilde{f}_1 + 4\tilde{c}_2\tilde{f}_2)d_1 + 4A_1(\tilde{g}_1 - \tilde{b}_2\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1\tilde{a}_2 - \tilde{b}_0\tilde{a}_3) = 0,$$
$$(3\tilde{c}_3\tilde{f}_1 + 4\tilde{c}_2\tilde{f}_2)d_0^* + (2\tilde{c}_2\tilde{f}_1 + 3\tilde{c}_1\tilde{f}_2)d_1 + 4A_1(\tilde{g}_0 - \tilde{b}_2\tilde{a}_0 - \tilde{b}_1\tilde{a}_1 - \tilde{b}_0\tilde{a}_2) = 0,$$
$$(2\tilde{c}_2\tilde{f}_1 + 3\tilde{c}_1\tilde{f}_2)d_0^* + (\tilde{c}_1\tilde{f}_1 + 2\tilde{c}_0\tilde{f}_2)d_1 - 4A_1(\tilde{b}_1\tilde{a}_0 + \tilde{b}_0\tilde{a}_1) = 0,$$
$$(\tilde{c}_1\tilde{f}_1 + 2\tilde{c}_0\tilde{f}_2)d_0^* - 4A_1\tilde{b}_0\tilde{a}_0 = 0,\ \ A_2\tilde{b}_2d_1 + A_1(B_1\tilde{f}_1 - B_3\tilde{a}_2 + A_1 - A_3) = 0.$$
$$B_3\tilde{a}_3 - B_1\tilde{f}_2 = 0,\ \ A_2(2\tilde{b}_2d_0^* + \tilde{b}_1d_1) + 2A_1(\tilde{f}_2s_1 - B_3\tilde{a}_1) = 0,$$
$$A_2\tilde{b}_1d_0^* + 2A_1(\tilde{f}_1s_1 - B_3\tilde{a}_0 + \lambda_1) = 0,\ \ \tilde{g}_3B_1 - B_2\tilde{b}_2\tilde{a}_3 = 0,$$
$$A_3\tilde{c}_4d_1 + A_1(-B_1\tilde{g}_2 + \tilde{b}_2(A_2 - A_1 + B_2\tilde{a}_2) + B_2\tilde{a}_3\tilde{b}_1) = 0,$$
$$A_3(4\tilde{c}_4d_0^* + 3\tilde{c}_3d_1) + 4A_1(-\tilde{g}_3s_1 - \tilde{g}_1B_1 + B_2\tilde{a}_1\tilde{b}_2 + (A_2 - A_1 + B_2\tilde{a}_2)\tilde{b}_1 + B_2\tilde{a}_3\tilde{b}_0 + s_2\tilde{a}_3) = 0,$$
$$A_3(3\tilde{c}_3d_0^* + 2\tilde{c}_2d_1) + 4A_1(-\tilde{g}_2s_1 - \tilde{g}_0B_1 + (B_2\tilde{a}_0 - \lambda_1)\tilde{b}_2 + B_2\tilde{a}_1\tilde{b}_1 + (A_2 - A_1 + B_2\tilde{a}_2)\tilde{b}_0 + \lambda_2 + s_2\tilde{a}_2) = 0,$$
$$A_3(2\tilde{c}_2d_0^* + \tilde{c}_1d_1) + 4A_1(-\tilde{g}_1s_1 + (B_2\tilde{a}_0 - \lambda_1)\tilde{b}_1 + B_2\tilde{a}_1\tilde{b}_0 + s_2\tilde{a}_1) = 0,$$
$$A_3\tilde{c}_1d_0^* + 4A_1(-\tilde{g}_0s_1 + (B_2\tilde{a}_0 - \lambda_1)\tilde{b}_0 + s_2\tilde{a}_0) = 0,$$
$$\tilde{a}_0^2 + \tilde{g}_0^2 - 1 + \tilde{c}_0\tilde{f}_1^2 = 0.$$

Здесь

$$d_1 = B_2(\tilde{f}_2\tilde{b}_1 + \tilde{f}_1\tilde{b}_2) + (A_2 - A_3)\tilde{b}_2 - B_3\tilde{g}_2,$$
$$d_0^* = B_2(\tilde{f}_2\tilde{b}_0 + \tilde{f}_1\tilde{b}_1) + \tilde{f}_2s_2 + (A_2 - A_3)\tilde{b}_1 - B_3\tilde{g}_1.$$

Система уравнений (37) разрешима относительно ненулевых параметров A_1, A_2, A_3, B_3. При помощи компьютерного исследования запишем решение системы (37):

$$C_1 = C_2 = C_3,\ \ B_1 = A_1A_3^{-1}B_3,\ \ B_2 = A_2A_3^{-1}B_3,\ \ \gamma = \sqrt{(A_3 - A_2)(A_1 - A_3)A_1A_2},$$
$$\tilde{b}_2 = \gamma((A_2 - A_3)A_2)^{-1},\ \ \tilde{b}_1 = -2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)A_3^2(15\gamma A_2B_3\tilde{f}_2)^{-1},$$
$$\tilde{a}_3 = A_1A_3^{-1}\tilde{f}_2,\ \ \tilde{a}_2 = [A_3(A_1 - A_3) + 3A_1B_3\tilde{f}_1](3A_3B_3)^{-1},\ \ \tilde{a}_0 = -\Delta_1\delta_1^*(2A_1\gamma\Delta_2\tilde{f}_2^2)^{-1},$$
$$\tilde{b}_0 = \delta_2^*(\gamma\Delta_2\tilde{f}_2^2)^{-1},\ \ \ \tilde{a}_1 = \delta_3^*(\Delta_2\tilde{f}_2)^{-1},$$
$$\Delta_1 = -2(A_2 - A_3)(A_1 - A_3)(15A_1A_2B_3\tilde{f}_1 + 6A_1A_3^2 + A_2A_3(5A_1 + 4A_3))(135\gamma A_2B_3)^{-1},$$
$$\Delta_2 = (2A_1 + A_3)(2A_2A_3(10A_1 - A_3) - 3A_1A_3^2 + 15A_1A_2B_3\tilde{f}_1), \tag{38}$$
$$\tilde{g}_3 = \gamma\tilde{f}_2((A_2 - A_3)A_3)^{-1},\ \ \tilde{g}_2 = -(A_1 - A_3)[A_2A_3(5A_1 - 2A_3) - 3A_1A_3^2 + 15A_1A_2B_3\tilde{f}_1](15\gamma A_3B_3)^{-1},$$
$$\tilde{g}_1 = \delta_1^*(\gamma\Delta_2\tilde{f}_2)^{-1},\ \ \tilde{g}_0 = (\Delta_1\delta_3^*(2A_1)^{-1} + \tilde{f}_1\delta_2^*\cdot\gamma^{-1})(\Delta_2\tilde{f}_2^2)^{-1},$$
$$\tilde{c}_4 = A_1(A_1 - A_2)((A_2 - A_3)A_3)^{-1},\ \ \ \tilde{c}_3 = 4(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(15(A_2 - A_3)B_3\tilde{f}_2)^{-1},$$
$$\begin{gathered}\tilde{c}_2 = (A_3 - A_4)(675\Delta_2A_1A_2^2A_3(B_3\tilde{f}_2)^2(A_2 - A_3))^{-1}\times\\ \times[45(300(A_2 - A_1)(A_1A_2B_3\tilde{f}_1)^2 + 60(A_2^2(2A_1 - A_3) - 2A_1A_2(A_1 + A_3) +\\ + 3A_1^2A_3)A_1A_2A_3B_3\tilde{f}_1 + (-A_2^2(830A_1^2 - 11A_1A_3 + 12A_3^2) + A_1A_2(830A_1^2 - 317A_1A_3 +\\ + 9A_3^2) + 3A_1^2A_3(102A_1 + A_3))A_2A_3^2)A_1A_2B_3\tilde{f}_1 + A_3^3(-216A_1^4A_3^3 + 2A_2^4(44A_3^3 - 441A_1A_3^2 +\\ + 1380A_1^2A_3 - 3575A_1^3) + A_1A_2^3(7150A_1^3 - 645A_1^2A_3 + 711A_1A_3^2 + 182A_3^3) -\\ - 9A_1^2A_2A_3(A_2(235A_1^2 - 61A_1A_3 - 9A_3^2) + 3A_1A_3(14A_1 + 5A_3)))],\end{gathered}$$
$$\tilde{c}_1 = \delta_4^*(\Delta_2\tilde{f}_2^3)^{-1},\ \ \ \tilde{c}_0 = -(\delta_1^*\delta_2^*(\gamma\Delta_2)^{-2} + \delta_4^*\tilde{f}_1(2\Delta_2)^{-1})\tilde{f}_2^{-4},$$
$$\lambda_1 = -\Delta_1\delta_1^*B_3(2\gamma\Delta_2A_1\tilde{f}_2^2)^{-1} + (A_1 - A_3)(A_1 - A_2)A_3^2\Delta_1(15\gamma A_1B_3\tilde{f}_2^2)^{-1} - \tilde{f}_1s_1,$$
$$s_1 = [\delta_3^*B_3\Delta_2^{-1} + 2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)A_3^2(45A_1A_2B_3)^{-1} - \gamma\Delta_1(A_1(A_2 - A_3))^{-1}]\tilde{f}_2^{-2},$$
$$\lambda_2 = [\Delta_1\delta_3^*B_3(2A_1)^{-1} + \delta_2^*(A_3 - A_2)(A_3 + B_3\tilde{f}_1)(\gamma A_3)^{-1}](\Delta_2\tilde{f}_2^2)^{-1} - s_2\tilde{f}_1,$$
$$\begin{gathered}s_2 = [-\delta_2^*A_2B_3A_3^{-1} + 2\Delta_2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)((A_2 - A_3)A_3 + A_2B_3\tilde{f}_1)A_3(15A_2B_3)^{-1} +\\ + \delta_1^*B_3 + \Delta_1\Delta_2\gamma](\gamma\Delta_2\tilde{f}_2^2)^{-1}.\end{gathered}$$

Здесь $\tilde f_1$ — действительный корень уравнения

$$
\begin{gathered}
\xi_3\tilde f_1^3+\xi_2\tilde f_1^2+\xi_1\tilde f_1+\xi_0=0,\\
\xi_3=6750(8A_1+A_3)(A_1-A_2)(A_2-A_3)(A_1A_2B_3)^3,\\
\xi_2=1350(-2A_2^3(50A_1^2+21A_1A_3+A_3^2)+A_2^2(100A_1^3+154A_1^2A_3+41A_1A_3^2+2A_3^3)-\\
-A_1A_2A_3(112A_1^2+51A_1A_3-A_3^2)+3(A_1A_3)^2(4A_1-A_3))(A_1A_2B_3)^2A_3,\\
\xi_1=900(-A_2^3(185A_1^2+158A_1A_3-A_3^2)+A_2^2(185A_1^3+376A_1^2A_3+151A_1A_3^2-A_3^3)-\\
-A_1A_2A_3(218A_1^2+185A_1A_3-7A_3^2)+3(A_1A_3)^2(11A_1-2A_3))(A_1A_2A_3)^2B_3,\\
\xi_0=A_3^3\big[-216(A_1A_3)^4(A_1-A_3)-A_2^5(29000A_1^4+21325A_1^3A_3-8160(A_1A_3)^2+424A_1A_3^3-64A_3^4)+\\
+2A_2^4(14500A_1^5+34950A_1^4A_3+13085A_1^3A_3^2-4102A_1^2A_3^3+324A_1A_3^4-32A_3^5)-\\
-A_1A_2^3A_3(48575A_1^4+54445A_1^3A_3+4269(A_1A_3)^2-188A_1A_3^3+224A_3^4)+9(A_1A_2A_3)^2\times\\
\times(2235A_1^3+1469A_1^2A_3-88A_1A_3^2-16A_3^3)-108A_1^3A_2A_3^3(A_1-A_3)(3A_1+2A_3)\big],
\end{gathered}
$$

а $\tilde f_2$ — действительный корень уравнения

$$
\begin{gathered}
\tilde f_2^4=\left(\frac{\Delta_1\delta_1^*}{2A_1\gamma\Delta_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta_2^2}\left(\frac{\Delta_1\delta_3^*}{2A_1}+\frac{\tilde f_1\delta_2^*}{\gamma}\right)^2-\left(\frac{\delta_1^*\delta_2^*}{(\gamma\Delta_2)^2}+\frac{\delta_4^*\tilde f_1}{2\Delta_2}\right)\tilde f_1^2,\\
\delta_1^*=(A_3-A_1)(1350A_1A_2A_3B_3^2)^{-1}\times\\
\times\Big[180[75(A_1-A_3)(A_1A_2B_3\tilde f_1)^2+15(A_2(10A_1-A_3)-9A_1A_3)A_1^2A_2A_3B_3\tilde f_1+\\
+(9A_1^2A_3^2(2A_1+A_3)-3A_1A_2A_3(115A_1^2+12A_1A_3-4A_3^2)+A_2^2(75A_1^3+295A_1^2A_3-\\
-32A_1A_3^2+4A_3^3))A_3^2]A_1A_2B_3\tilde f_1+A_3^3\{A_2^3(2000A_1^4+11425A_1^3A_3-5640(A_1A_3)^2+\\
+784A_1A_3^3-64A_3^4)-9A_1A_2^2A_3(1325A_1^3+580A_1^2A_3-272A_1A_3^2+32A_3^3)+36A_1^2A_2A_3^2\times\\
\times(135A_1^2+57A_1A_3-12A_3^2)+216(A_1A_3)^3(A_1-A_3)\}\Big],\\
\delta_2^*=(A_1-A_3)(1350A_1(A_2B_3)^2)^{-1}\times\\
\times\Big\{60[225(A_2-A_1)(A_1A_2B_3\tilde f_1)^2+15[4A_2^2(A_1-A_3)-A_2(A_1+A_3)(4A_1-A_3)+\\
+A_1A_3(7A_1-A_3)]A_1A_2A_3B_3\tilde f_1+\{-A_2^3(785A_1^2+71A_1A_3+8A_3^2)+\\
+A_2^2(785A_1^3-8A_1^2A_3+85A_1A_3^2+2A_3^3)+A_1A_2A_3(79A_1^2-71A_1A_3+A_3^2)-\\
-3(A_1A_3)^2(2A_1+A_3)\}A_3^2]A_1A_2B_3\tilde f_1+\\
+A_3^3[72(A_3-A_1)(A_1A_3)^3-3A_2^4(3400A_1^3-685A_1^2A_3+152A_1A_3^2-32A_3^3)+A_2^2(10200A_1^4+\\
+3140A_1^3A_3+1653(A_1A_3)^2+24A_1A_3^3-32A_3^4)-A_1A_2^2A_3(5195A_1^3+1113A_1^2A_3+\\
+108A_1A_3^2+64A_3^3)-12A_1^2A_2A_3^2(A_1-A_3)(7A_1+2A_3)]\Big\},\\
\delta_3^*=(1350A_1A_2^2A_3B_3^2)^{-1}\times\\
\times\Big[900(A_1-A_3)[15(A_1A_2B_3\tilde f_1)^2+3(A_2(10A_1+3A_3)-3A_1A_3)A_1A_2A_3B_3\tilde f_1+\\
+(A_2(15A_1^2+26A_1A_3-2A_3^2)-3A_1A_3(7A_1+A_3))A_2A_3^2]A_1A_2B_3\tilde f_1+A_3^3(216(A_1-A_3)A_1^3A_3^3-\\
-64A_2^3A_3^4+A_1A_2(9A_3(A_1-A_3)(12A_1A_3(5A_1+4A_3)-A_2(375A_1^2+320A_1A_3-32A_3^2))+\\
+A_2^2(2000A_1^3-7035A_1A_3^2+2875A_1^2A_3+2224A_3^3)))\Big],\\
\delta_4^*=2(A_3-A_1)(10125(A_2-A_3)(A_1A_2)^2B_3^3)^{-1}\Big[15(900(A_1-A_3)(A_2-A_1)(A_1A_2B_3\tilde f_1)^2+\\
+15(-A_2^2(190A_1^2+143A_1A_3-12A_3^2)+A_1A_2(A_1+A_3)(190A_1+131A_3)-A_1^2A_3(178A_1+
\end{gathered}
$$

$$+ 143A_3))A_1A_2A_3B_3\tilde{f}_1 + (-A_2^3(6250A_1^3 - 1385A_1^2A_3 - 278A_1A_3^2 - 24A_3^3) +$$
$$+ A_1A_2^2(6250A_1^3 + 2555A_1^2A_3 + 2366A_1A_3^2 - 362A_3^3) - A_1^2A_2A_3(3940A_1^2 + 3766A_1A_3 + 223A_3^2) +$$
$$+ 561A_1^3A_3^2(2A_1 + A_3))A_3^2)A_1A_2B_3\tilde{f}_1 + A_3^3\{-A_2^4(17000A_1^4 - 10225A_1^3A_3 +$$
$$+ 2130(A_1A_3)^2 - 464A_1A_3^3 + 64A_3^4) + A_1A_2^3(17000A_1^4 + 9300A_1^3A_3 +$$
$$+ 2415(A_1A_3)^2 - 2486A_1A_3^3 + 96A_3^4) - (A_1A_2)^2A_3(19525A_1^3 + 9315A_1^2A_2 + 951A_1A_3^2 -$$
$$- 496A_3^3) + 3A_1^3A_3^2(A_2(3010A_1^2 + 1543A_1A_3 - 8A_3^2) - 24A_1A_3(23A_1 + 7A_3))\}\Big].$$

Решение (36), (38) будет действительным, например, при

$$\tilde{c}_0 > 0, \quad (A_3 - A_2)(A_1 - A_3) > 0. \tag{39}$$

Зависимость σ от времени найдем из (23):

$$\overset{\bullet}{\sigma} = \frac{d_1\sigma + d_0^*}{2A_1}\sqrt{R(\sigma)}. \tag{40}$$

Приведем численный пример решения (12), (36), (38)–(40) уравнений (4), (9).

Пусть

$$A_1 = \frac{11}{10}a, \quad A_2 = \frac{9}{10}a, \quad A_3 = a, \quad B_3 = b(a > 0, b > 0).$$

Тогда

$$\|C\| = 0, \;\; B_1 = \frac{11}{10}b, \;\; B_2 = \frac{9}{10}b,$$
$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0), \;\; \boldsymbol{s} = (s_1, s_2, 0), \tag{41}$$
$$\mu^* = 99f + 98,$$

$$\lambda_1 = \frac{-9413840898f^4 - 27182926485f^3 - 26511508980f^2 - 10096177113f + 97040497}{4191691680\mu^*}\,\frac{a^3}{b^2\tilde{f}_2^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{(-47069204490f^4 - 144559996515f^3 - 127003553424f^2 - 9282166443f + 979342175)\sqrt{11}}{62875375200\mu^*}\,\frac{a^3}{b^2\tilde{f}_2^2},$$

$$s_1 = \frac{970299f^3 + 2763882f^2 + 2616273f + 969725}{427680\mu^*}\,\frac{a^2}{b\tilde{f}_2^2},$$

$$s_2 = \frac{(4851495f^3 + 17582994f^2 + 20545173f + 5412785)\sqrt{11}}{7840800\mu^*}\,\frac{a^2}{b\tilde{f}_2^2},$$

$$\omega_1 = \sigma^2, \;\; \omega_2 = \tilde{b}_2\sigma^2 + \tilde{b}_1\sigma + \tilde{b}_0, \;\; \omega_3^2 = \tilde{c}_4\sigma^4 + \tilde{c}_3\sigma^3 + \tilde{c}_2\sigma^2 + \tilde{c}_1\sigma + \tilde{c}_0,$$
$$\nu_1 = \tilde{a}_3\sigma^3 + \tilde{a}_2\sigma^2 + \tilde{a}_1\sigma + \tilde{a}_0, \;\; \nu_2 = \tilde{g}_3\sigma^3 + \tilde{g}_2\sigma^2 + \tilde{g}_1\sigma + \tilde{g}_0, \;\; \nu_3 = (\tilde{f}_2\sigma + \tilde{f}_1)\omega_3,$$

$$\tilde{b}_2 = -\frac{\sqrt{11}}{3}, \;\; \tilde{b}_1 = -\frac{8\sqrt{11}}{891}\,\frac{a}{b\tilde{f}_2}, \;\; \tilde{b}_0 = \frac{(-14554485f^3 + 6213834f^2 + 55212993f + 1664125)\sqrt{11}}{10585080\mu^*}\,\frac{a^2}{b^2\tilde{f}_2^2},$$

$$\tilde{c}_4 = -\frac{11}{5}, \;\; \tilde{c}_3 = -\frac{4}{75}\,\frac{a}{b\tilde{f}_2}, \;\; \tilde{c}_2 = \frac{-441045f^3 + 197802f^2 + 1724409f + 56245}{48600\mu^*}\,\frac{a^2}{b^2\tilde{f}_2^2},$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{-2910897f^3 - 17151750f^2 + 705573f + 127385}{26462700\mu^*}\,\frac{a^3}{b^3\tilde{f}_2^3}, \;\; \tilde{c}_0 = \frac{\mu_1}{\tilde{f}_2^4}, \tag{42}$$

$$\tilde{a}_3 = \frac{11}{10}\tilde{f}_2, \;\; \tilde{a}_2 = \frac{33f + 1}{30}\,\frac{a}{b}, \;\; \tilde{a}_1 = \frac{(970299f^3 + 1822986f^2 + 686961f - 18115)a^2}{427680\mu^* b^2\tilde{f}_2}, \;\; \tilde{a}_0 = \frac{\mu_2}{\tilde{f}_2^2},$$

$$\tilde{g}_3 = -\frac{3\sqrt{11}}{10}\tilde{f}_2, \;\; \tilde{g}_2 = -\frac{(99f - 1)\sqrt{11}}{330}\,\frac{a}{b},$$

$$\tilde g_1 = \frac{(-970299f^3 + 1940598f^2 + 8056719f + 281059)\sqrt{11}}{1568160\mu^*}\,\frac{a^2}{b^2\tilde f_2},\quad \tilde g_0 = \frac{\mu_3}{\tilde f_2^2},$$

$$\tilde f_2 = \sqrt[4]{\mu_1\Big(f\frac{a}{b}\Big)^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2},\quad \tilde f_1 = \frac{fa}{b},$$

$$\mu_1 = -(14122202241015f^6 - 42490235429532f^5 - 215323551336762f^4 + 105570574649694f^3 + \\ + 452142484620651f^2 + 29281432215222f + 467717308375)a^4(1509009004800\mu^{*2}b^4)^{-1},$$

$$\mu_2 = -\frac{(-970299f^3 + 1940598f^2 + 8056719f + 281059)(\mu^* + 3)}{4191691680\mu^*}\,\frac{a^3}{b^3},$$

$$\mu_3 = -\frac{(17194668579f^4 - 7660510605f^3 - 65845166409f^2 - 2044570176f + 1829615)\sqrt{11}}{12575075040\mu^*}\,\frac{a^3}{b^3}.$$

Здесь

$$f = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot\mu_0^2 - 9404\mu_0 - 25562410\sqrt[3]{2}}{9702\mu_0},$$

$$\mu_0 = (270291247949 + 3969\sqrt{5167858187243741})^{1/3}.$$

Так как зависимость $\sigma = \sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot\sigma = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(\frac{\sigma}{9} + \frac{(\mu^* + 3)a}{2673b\tilde f_2}\right)\sqrt{\tilde c_4\sigma^4 + \tilde c_3\sigma^3 + \tilde c_2\sigma^2 + \tilde c_1\sigma + \tilde c_0}, \tag{43}$$

то действительность решения (41)–(43) вытекает из условия, что подкоренная функция $\omega_3 = \omega_3(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$ положительна. При этом $\sigma(t)$ — функция, полученная в результате обращения эллиптического интеграла третьего рода.

Приведенный пример (41)–(43) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a, b. Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой $\sigma = \sigma(t)$ в равенства (42).

6. Заключение

В работе с помощью аналитических методов и компьютерного исследования изучены условия существования частных решений двух обобщенных полиномиальных классов задач динамики гиростата. Построены три новых решения рассматриваемых классов. Они отличаются от ранее полученных решений значениями максимальных степеней многочленов, характеризующих эти решения. Первое и второе новые полиномиальные решения — решения дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Одно из них относится к первому обобщенному полиномиальному классу и содержит три независимых параметра задачи. Другое является решением второго обобщенного полиномиального класса и характеризуется четырьмя независимыми параметрами задачи и решения. Третье решение относится ко второму обобщенному полиномиальному классу и построено в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта – Лондона. Оно содержит четыре независимых параметра задачи.

Первое решение выражается через гиперэллиптические функции времени, а второе и третье описываются функциями времени, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Указанные полиномиальные решения не имеют аналогов в задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой, описанных в научных публикациях.

Автор благодарит Г. В. Горра за его ценные указания при обсуждении результатов статьи.

Список литературы (References)

Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Borisov A. V., Mamayev I. S. Dinamika tverdogo tela [Dynamics of rigid body]. — Izhevsk: RI “Regular and chaotic dynamics”, 2001 (in Russian).

Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалев А. М. Классические задачи динамики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 2012.

Gashenenko I. N., Gorr G. V., Kovalev A. M. Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela [Classical tasks of dynamiscs of rigid body]. — Kiev: Scientific idea, 2012 (in Russian).

Горр Г. В., Зыза А. В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1998. — № 6. — С. 12–21.

Gorr G. V., Zyza A. V. Polinomial solutions in a problem of the motion of a gyrostat with a fixed point // Mechanics of solids. — 1998. — Vol. 33. — P. 7–14. (Original Russian paper: Gorr G. V., Zyza A. V. Polinomialnye resheniya v odnoy zadache o dvizhenii girostata s nepodvizhnoy tochkoy // Izvestiy RAN. Mekhanika tverdogo tela. — 1998. — No. 6. — P. 12–21).

Горр Г. В., Мазнев А. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. — Донецк: ДонНУ, 2010.

Gorr G. V., Maznev A. V. Dinamika girostata, imeyushego nepodvizhnuyu tochku [Dynamics of gyrostat, which has a fixed point]. — Donetsk: DonNU, 2010 (in Russian).

Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ.-мат. наук общества любителей естествознания. — 1899. — Т. 10, вып. 1. — С. 23–24.

Goryachov D. N. Novoe chastnoye resheniye zadachi o dvizhenii tyazhologo tverdogo tela vokrug nepodvizhnoy tochki [New private solution of the motion problem of a heavy rigid body around fixed point] // W. dep. Physico-mathematical science of society lovers of Natural Science. — 1899. — Vol. 10, is. 1. — P. 23–24 (in Russian).

Докшевич А. И. Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. — 1970. — Вып. 2. — С. 12–15.

Dokshevich A. I. Novoye chastnoye resheniye uravneniy dvizheniya girostata, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku [A new private solution of the equations of motion of a gyrostat, which has a fixed point] // Mechanic of a rigid body. — 1970. — Ed. 2. — P. 12–15 (in Russian).

Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование интегралов в гамильтоновых системах // Доклады Академии наук СССР. — 1981. — Т. 257, № 1. — С. 26–29.

Ziglin S. L. Vetvleniye resheniy i nesushchestvovaniye integralov v gamiltonovykh sistemakh [Ramification of solutions and nonexistence of integrals in Hamiltonian systems] // Reports of the Academy of Sciences the USSR. — 1981. — Vol. 257, No. 1. — P. 26–29 (in Russian).

Зыза А. В. Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. ИПММ НАН Ураины. — Т. 24. — Донецк: Изд-во ИПММ НАН Украины, 2012. — С. 116–123.

Zyza A. V. Sluchay integriruemosti uravneniy dvizheniya girostata v magnitnom pole [The case of integrability of the equations of motion of a gyrostat in a magnetic field] // IAMM SNA of Ukraine. — Vol. 24. — Donetsk: publishing office of IAMM SNA of Ukraine, 2012. — P. 116–123 (in Russian).

Зыза А. В. О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. — 2013. — Вып. 43. — С. 33–42.

Zyza A. V. O polinomialnykh resheniyakh s kvadratichnym invariantnym, sootnosheniem uravneniy dvizheniya girostata [About polynomial solutions with a quadratic invariant zelation of the equations of motions of a gyrostat] // Mechanic of a rigid body. — 2013. — Ed. 43. — P. 33–42 (in Russian).

Зыза А. В. Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа – Пуассона // Механика твердого тела. — 2015. — Вып. 45. — С. 63–69.

Zyza A. V. Polinomialnye resheniya s lineynym invariantnym sootnosheniyem uravneniy Kirkhgofa – Puassona [Polynomial solutions with a linear invariant relation of the Kirchhoff – Poisson equations] // Mechanic of a rigid body. — 2015. — Ed. 45. — P. 63–69 (in Russian).

Зыза А. В. Новое решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. ИПММ МОН ДНР. — Т. 29. — Донецк: Изд-во ИПММ МОН ДНР, 2015. — С. 51–59.

Zyza A. V. Novoye resheniye uravneniy dvizheniya girostata v magnitnom pole [A new solution of the equations of motion of a gyrostat in a magnetic field] // IAMM MES DPR. — Vol. 29. — Donetsk: Publishing office IAMM MES DPR, 2015. — P. 51–59 (in Russian).

Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. — М.: Физматгиз. 1963.

Kittel Ch. Vvedeniye v fiziku tverdogo tela [Introduction of the concept of “solid body” in physics]. — Moscow: Phisico-mathematical publishing office, 1963 (in Russian).

Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 266, № 6. — С. 1298–1300.

Kozlov V. V., Onishenko D. A. Neintegriruemost uravneniy Kirkhgofa [Nonintegrability of the Kirchhoff equations] // Reports SA of USSR. — 1982. — Vol. 266, No. 6. — P. 1298–1300 (in Russian).

Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893.

Steklov V. A. O dvizhenii tverdogo tela v zhidkosti [About the motion of a solid body in a liquid]. — Kharkov, 1893 (in Russian).

Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд. физ.-мат. наук общества любителей естествознания. — 1899. — Т. 10, вып. 1. — С. 1–3.

Steklov V. A. Novoye chastnoe resheniye differencialnykh uravneniy dvizheniya tyazhologo tverdogo tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku [A new private solution of the differential equations of motion of a rigid body, which has a fixed point] // W. dep. Physico-mathematical sciences of Society lovers of Natural Science. — 1899. — Vol. 10, is. 1. — P. 1–3 (in Russian).

Урман Ю. Н. Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 6. — С. 1402–1404.

Urman Yu. N. Dinamicheskiye effekty, obuslovlennye vrashchatelnym dvizheniyem sverkhprovodnika v magnitnom podvese [Dynamic effects due to the rotational movement of the superconductor in a magnetic suspension] // Report SA USSR. — 1984. — Vol. 276, No. 6. — P. 1402–1404 (in Russian).

Харламов А. П. Построение полного решения для периодического движения гиростата // Механика твердого тела. — 1992. — Вып. 24. — С. 62–68.

Kharlamov A. P. Postroyeniye polnogo resheniya dlya periodicheskogo dvizheniya girostata [Construction of a complete solution fot the periodic motion of a gyrostat] // Mechanic of a rigid body. — 1992. — Ed. 24. — P. 62–68 (in Russian).

Харламов А. П. Об удалении невидимых линий при построении плоских проекций сложных трехмерных объектов // Механика твердого тела. — 1993. — Вып. 25. — С. 70–75.

Kharlamov A. P. Ob udalenii nevidimykh liniy pri postroyenii ploskih proyeksiy slozhnykh trekhmernykh obyektov [About removal of invisible lines at construction of flat projections of difficult three-dimensional objects] // Mechanic of a rigid body. — 1993. — Ed. 25. — P. 70–75 (in Russian).

Харламов М. П. О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. — 1980. — Вып. 12. — С. 3–8.

Kharlamov M. P. O postroenii aksoidov prostranstvennogo dvizheniya tverdogo tela [About the axoid’s construction of the spatial motion of a rigid body] // Mechanic of a rigid body. — 1980. — Ed. 12. — P. 3–8 (in Russian).

Харламов М. П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. — 1981. — Вып. 13. — С. 10–14.

Kharlamov M. P. O postroyenii godografov uglovoy skorosti tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku [About construction of novographs of the angular velocity of a body, which has a fixed point] // Mechanic of a rigid body. — 1981. — Ed. 13. — P. 10–14 (in Russian).

Харламов П. В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. математики и техн. физики. — 1963. — № 4. — С. 17–29.

Kharlamov P. V. O dvizhenii v zhidkocti tela, ogranichennogo mnogosvyaznoy poverkhnostyu [About the motion in a fluid of a body bounded by a multiply connected surface] // The journal of Applied Mathematics and technical Physics. — 1963. — No. 4. — P. 17–29 (in Russian).

Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, вып. 3. — С. 703–707.

Kharlamov P. V. Kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point // Jurnal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1963. — Vol. 28, Is. 3. — P. 615–621. (Original Russian paper: Kharlamov P. V. Kinematicheskoye istolkovaniye dvizheniya tela, imeyushchego nepodvizhnuyu tochku // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1964. — Vol. 28, Is. 3. — P. 703–707.)

Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1965.

Kharlamov P. V. Lektsii po dinamike tverdogo tela [Lectures on the dynamics of a rigid body]. — Novosibirsk: Publishing office of Novosibirsk University, 1965 (in Russian).

Харламов П. В., Мозалевская Г. В., Лесина М. Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 3–17.

Kharlamov P. V., Mozalevskaya G. V., Lesina M. E. O razlichnykh predstavleniyakh uravneniy Kirkhgofa [About various representations of Kirchhoff's equations] // Mechanic of a rigid body. — 2001. — Ed. 31. — P. 3–17 (in Russian).

Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ.-мат. наук общества любителей естествознания. — 1904. — Т. 12, вып. 1. — С. 1–4.

Chaplygin S. A. Novoye chastnoye resheniye zadachi o vrashchenii tyazhologo tverdogo tela vokrug nepodvizhnoy tochki [New private solution of the motion problem of a heavy rigid body around fixed point] // W. dep. Physico-mathematical science of society lovers of natural science. — 1904. — Vol. 12, is. 1. — P. 1–4 (in Russian).

Barnett S. I. Gyromagnetic and Electron — Inertia Effects // Rev. Modern Phys. — 1935. — Vol. 7 (2). — P. 129–166.

Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. — New York: Johnson reprint corp, 1965.

Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzial Gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. — 1908. — B. 65. — S. 528–537.

Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. — 1986. — Vol. 5, No. 5. — P. 747–754.

Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. II: A new form of the equations of motion of a multiconnected rigid in on ideal incompressible // J. Mecan. Theor. Appl. — 1986. — Vol. 5, No. 5. — P. 755–762.