

УДК: 534

Оценка собственных частот колебаний чистого изгиба композиционных нелинейно-упругих балок и круглых пластин

И. А. Тарасюк^а, А. С. Кравчук

Белорусский государственный университет,
механико-математический факультет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4

E-mail: ^аivan.a.tarasyuk@gmail.com

Получено 04.10.2017, после доработки — 06.10.2017.

Принято к публикации 24.10.2017.

В работе представлена методика линеаризации диаграммы растяжения-сжатия материала нелинейно деформируемых балки и круглой пластины с целью обобщения уравнений свободных колебаний чистого изгиба. В статье рассматриваются композиционные, в среднем изотропные призматические балки постоянного прямоугольного поперечного сечения и круглые пластины постоянной толщины из нелинейно-упругих компонент. Методика заключается в определении аппроксимирующего модуля Юнга материала исходя из начального напряженно-деформированного состояния балки и пластины, подверженных действию изгибающего момента.

В статье предлагается два критерия линеаризации: равенство удельной потенциальной энергии деформации, а также минимизация среднеквадратического отклонения при приближении нелинейного уравнения состояния линейной функцией. Данный метод позволяет в аналитическом виде получить оценочное значение частоты свободных колебаний слоистых и структурно-неоднородных в среднем изотропных нелинейно-упругих балок и пластин, что предоставляет возможность существенно сократить ресурсы при вибрационном анализе и моделировании указанных элементов конструкций. Кроме того, в работе показано, что предложенные критерии линеаризации позволяют производить оценку величины собственных частот с одинаковой точностью.

Поскольку в общем случае даже изотропные материалы проявляют разную сопротивляемость растяжению и сжатию, в качестве кривых деформирования компонент композиционного материала в работе впервые рассматриваются кусочно-линейные диаграммы Прандтля с различающимися пределами пропорциональности и касательными модулями Юнга при растяжении и сжатии. В качестве параметров диаграммы деформирования слоистых материалов рассматриваются эффективные характеристики по Фойгту при гипотезе об однородности деформаций (для продольно-слоистой структуры материала), по Рейссу при гипотезе об однородности напряжений (для поперечно-слоистой балки и аксиально-слоистой пластины). Кроме того, для структурно-неоднородного в среднем изотропного материала приведены эффективные модули Юнга и пределы пропорциональности, полученные с помощью ранее предложенного авторами метода гомогенизации. В качестве примера приведен расчет собственных частот колебаний двухфазных балок в зависимости от концентраций компонент их материала.

Ключевые слова: композиционный материал, нелинейная упругость, чистый изгиб, колебания, гомогенизация

Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф17М-009.

© 2017 Иван Александрович Тарасюк, Александр Степанович Кравчук

UDC: 534

Estimation of natural frequencies of pure bending vibrations of composite nonlinearly elastic beams and circular plates

I. A. Tarasyuk^a, A. S. Kravchuk

Belarusian State University,
Mechanical and Mathematical Faculty,
Nezavisimosti ave. 4, Minsk, 220030, Belarus

E-mail: ^aivan.a.tarasyuk@gmail.com

*Received 04.10.2017, after completion — 06.10.2017.
Accepted for publication 24.10.2017.*

In the paper, it is represented a linearization method for the stress-strain curves of nonlinearly deformable beams and circular plates in order to generalize the pure bending vibration equations. It is considered composite, on average isotropic prismatic beams of a constant rectangular cross-section and circular plates of a constant thickness made of nonlinearly elastic materials. The technique consists in determining the approximate Young's moduli from the initial stress-strain state of beam and plate subjected to the action of the bending moment.

The paper proposes two criteria for linearization: the equality of the specific potential energy of deformation and the minimization of the standard deviation in the state equation approximation. The method allows obtaining in the closed form the estimated value of the natural frequencies of layered and structurally heterogeneous, on average isotropic nonlinearly elastic beams and circular plates. This makes it possible to significantly reduce the resources in the vibration analysis and modeling of these structural elements. In addition, the paper shows that the proposed linearization criteria allow to estimate the natural frequencies with the same accuracy.

Since in the general case even isotropic materials exhibit different resistance to tension and compression, it is considered the piecewise-linear Prandtl's diagrams with proportionality limits and tangential Young's moduli that differ under tension and compression as the stress-strain curves of the composite material components. As parameters of the stress-strain curve, it is considered the effective Voigt's characteristics (under the hypothesis of strain homogeneity) for a longitudinally layered material structure; the effective Reuss' characteristics (under the hypothesis of strain homogeneity) for a transversely layered beam and an axially laminated plate. In addition, the effective Young's moduli and the proportionality limits, obtained by the author's homogenization method, are given for a structurally heterogeneous, on average isotropic material. As an example, it is calculated the natural frequencies of two-phase beams depending on the component concentrations.

Keywords: composite material, nonlinear elasticity, pure bending, vibrations, homogenization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 945–953 (Russian).

The work was supported by BRFFR grant No. F17M-009.

1. Введение

Балки и пластины являются одними из самых распространенных конструктивных элементов в различных отраслях машиностроения и строительства. Наряду с устойчивостью одной из наиболее важных прикладных задач является вибрационный анализ, заключающийся в определении собственных частот колебаний для предотвращения резонанса элементов конструкций. Не смотря на то что задачи о колебаниях призматической балки и круглой пластины являются в некотором роде классикой теории колебаний, влиянию нелинейности деформирования их материала на собственные частоты не было оказано должного внимания.

В работе [Кравчук, Кравчук и др., 2015], посвященной исследованию колебаний чистого изгиба балки, было показано, что классическое динамическое уравнение [Бидерман, 1980] недостаточно теоретически обосновано ввиду использования противоречивых предположений при выводе как самого уравнения колебаний, так и уравнения изогнутой оси [Тимошенко, 1937]. Основываясь на приближенном уравнении изгиба [Филин, 1978], в [Кравчук, Кравчук и др., 2015] было получено новое уравнение поперечных колебаний композиционной балки из линейно-упругих материалов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^{b^2}}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

а также его обобщение на случай композиционного наследственно вязкоупругого материала, где $a^b = \sqrt{\langle E \rangle J_x / \langle \rho \rangle S}$, $\langle E \rangle$ — эффективный модуль Юнга материала, $\langle \rho \rangle$ — средняя плотность материала, S и J_x — площадь и момент инерции поперечного сечения балки.

Кроме того, в работе [Кравчук и др., 2016] был отмечен ряд неточностей при выводе уравнения колебаний круглой пластины [Бидерман, 1980], связанных с несоответствием гипотезам теории изгиба пластин [Жемочкин, 1957; Филин, 1978]. Было показано, что в случае чистого изгиба круглой композиционной пластины толщиной $2h$ уравнение ее осесимметричных колебаний может быть получено аналогичным образом и имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^{pl^2}}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

где $a^{pl} = h\sqrt{2\langle E \rangle / 3\langle \rho \rangle}$.

Настоящая статья посвящена обобщению результатов работ [Кравчук, Кравчук и др., 2015; Кравчук и др., 2016] на случай нелинейных материалов. На примере кусочно-линейной диаграммы Прандтля предлагается методика линеаризации уравнения состояния, позволяющая производить оценку величины собственных частот композиционных нелинейно-упругих балок и пластин с различающимися пределами пропорциональности и касательными модулями Юнга при растяжении и сжатии.

Полагая, что в начальный момент балка и пластина подвержены действию изгибающего момента, определяется напряженное состояние, используемое в дальнейшем для получения модуля Юнга, линеаризующего уравнение состояния. При этом предлагаются два критерия линеаризации: равенство удельной потенциальной энергии деформации и минимизация среднеквадратического отклонения при приближении уравнения состояния линейной функцией. Преимущество методики заключается в возможности получить в общем виде наиболее простую оценку влияния нелинейности материала на собственные частоты колебаний.

В качестве параметров деформирования композиционных балок в работе приводятся эффективные модули Юнга и пределы пропорциональности для продольно-слоистой структуры по Фойгту [Voigt, 1966], а также для поперечно-слоистой балки и аксиально-слоистой пластины по Рейссу [Reuss, 1929]. Кроме того, указанные эффективные характеристики рассчитаны и для структурно-неоднородного в среднем изотропного материала с помощью метода гомогенизации, предложенного авторами в работе [Тарасюк, Кравчук, 2014].

2. Чистый изгиб композиционных балки и круглой пластины

Для определения напряженного состояния композиционных нелинейно-упругих балки и пластины при чистом изгибе и последующей линеаризации уравнения состояния с целью получения оценочных значений частот собственных колебаний рассмотрим призматическую балку прямоугольного поперечного сечения высотой $2h$ и шириной $2b$, подверженную действию момента M , лежащего в плоскости симметрии балки (рис. 1).

В этом случае гипотеза о плоских сечениях справедлива и для нелинейно-упругого изгиба даже при деформациях порядка десятых долей [Биргер, Мавлютов, 1986; Писаренко, Можаровский, 1981]. Предполагается, что изменение размера поперечного сечения при нагружении балки мало по сравнению с радиусом кривизны и не вносит существенный вклад в определение перемещений и напряжений.

Кроме того, рассмотрим сектор круглой пластины радиусом l^{pl} толщиной $2h$ и угловой мерой $d\theta$, изгибаемой моментом M (рис. 2). Без нарушения общности будем считать, что центр пластины неподвижен, что позволяет перейти к рассмотрению чистого изгиба балки переменного поперечного сечения высотой $2h$ и шириной $rd\theta$ [Кравчук и др., 2016].

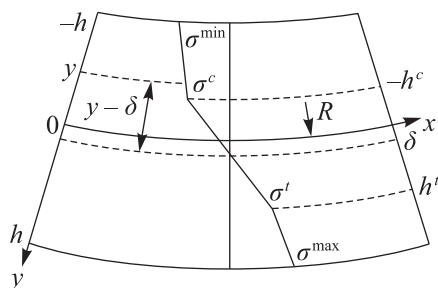


Рис. 1. Сечение балки при изгибе

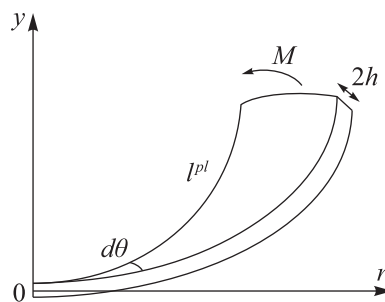


Рис. 2. Чистый изгиб сектора пластины

Будем считать, что материал балки и пластины, состоящий из n нелинейно-упругих компонент с объемными долями γ_k , является в среднем изотропным, а уравнение состояния его k -й компоненты представляет собой кусочно-линейную диаграмму Прандтля:

$$\sigma_k = \psi_k(\varepsilon_k) = \begin{cases} E_k^c \varepsilon_k + \sigma_k^c (1 - E_k^c / E_k^e), & \varepsilon_k \leq \sigma_k^c / E_k^e, \\ E_k^e \varepsilon_k, & \sigma_k^c / E_k^e \leq \varepsilon_k \leq \sigma_k^t / E_k^e, \\ E_k^t \varepsilon_k + \sigma_k^t (1 - E_k^t / E_k^e), & \varepsilon_k \geq \sigma_k^t / E_k^e, \end{cases} \quad (2)$$

где σ_k и ε_k — нормальные осевые (для балки) и радиальные (для круглой пластины) напряжения и деформации, E_k^e — секущий модуль Юнга, E_k^t и E_k^c — касательные модули Юнга при растяжении и сжатии, σ_k^t и σ_k^c — пределы пропорциональности при растяжении и сжатии.

В [Кравчук, Томило, Тарасюк, 2015] приведена процедура гомогенизации уравнения состояния чистого изгиба слоистых балок из нелинейных материалов, основанная на использовании гипотез Фойгта об однородности деформаций [Voigt, 1966] и Рейсса об однородности напряжений [Reuss, 1929], согласно которой эффективная функция деформирования имеет вид, аналогичный (2), при этом эффективные характеристики по Фойгту

$$\langle E \rangle_V^X = \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k^X, \quad \langle \sigma \rangle_V^Y = \sum_{k=1}^n \gamma_k \sigma_k^Y (1 - E_k^Y / E_k^e) \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k^e / \sum_{k=1}^n \gamma_k (E_k^e - E_k^Y) \quad (3)$$

соответствуют продольно-слоистой структуре, а эффективные характеристики по Рейссу

$$\langle E \rangle_R^X = 1 / \sum_{k=1}^n \gamma_k / E_k^X, \quad \langle \sigma \rangle_R^Y = \sum_{k=1}^n \gamma_k \sigma_k^Y (1/E_k^Y - 1/E_k^e) / \sum_{k=1}^n \gamma_k (1/E_k^Y - 1/E_k^e) \quad (4)$$

описывают деформирование поперечно-слоистой балки и аксиально-слоистой пластины. Для сокращения записи верхние индексы X и Y принимают значения e, c, t и c, t соответственно. В качестве эффективных характеристик структурно-неоднородных в среднем изотропных балки и пластины могут быть рассмотрены эффективные модули Юнга и пределы пропорциональности, полученные предложенным авторами методом гомогенизации [Тарасюк, Кравчук, 2014]:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_{KT}^X &= \frac{\langle E \rangle_V^{X^2} - \langle E \rangle_R^{X^2} + 2 \langle E \rangle_V^X \langle E \rangle_R^X \ln \langle E \rangle_V^X / \langle E \rangle_R^X}{4(\langle E \rangle_V^X - \langle E \rangle_R^X)}, \\ \langle \sigma \rangle_{KT}^Y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \sigma \rangle_V^Y + \langle \sigma \rangle_R^Y}{2} + \frac{\langle \sigma \rangle_V^Y A_V^Y - \langle \sigma \rangle_R^Y A_R^Y}{A_V^Y - A_R^Y} - A_V^Y A_R^Y \frac{\langle \sigma \rangle_V^Y - \langle \sigma \rangle_R^Y}{(A_V^Y - A_R^Y)^2} \ln \frac{A_V^Y}{A_R^Y} + \right. \\ &\quad \left. + (\langle \sigma \rangle_V^Y \langle E \rangle_R^e - \langle \sigma \rangle_R^Y \langle E \rangle_V^e) \left(\frac{\langle E \rangle_V^Y}{\langle E \rangle_V^e} - \frac{\langle E \rangle_R^Y}{\langle E \rangle_R^e} \right) \frac{B_V^{Y^2} - B_R^{Y^2} - 2B_V^Y B_R^Y \ln B_V^Y / B_R^Y}{2(B_V^Y - B_R^Y)^3} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_V^Y = 1 / \langle E \rangle_V^Y - 1 / \langle E \rangle_V^e$, $A_R^Y = 1 / \langle E \rangle_R^Y - 1 / \langle E \rangle_R^e$, $B_V^Y = \langle E \rangle_V^e - \langle E \rangle_V^Y$, $B_R^Y = \langle E \rangle_R^e - \langle E \rangle_R^Y$.

Пусть δ и R — положение и радиус кривизны нейтрального слоя изогнутой балки и пластины, тогда деформация волокна с координатой y относительно середины сечения определяется выражением $\langle \varepsilon_x \rangle = (y - \delta) / R$ (рис. 1). В этом случае уравнение состояния композиционных балки и круглой пластины будет вид

$$\langle \sigma \rangle = \psi(\langle \varepsilon \rangle) = \begin{cases} \langle E \rangle^c (y - \delta) / R + \langle \sigma \rangle^c (1 - \langle E \rangle^c / \langle E \rangle^e), & \langle E \rangle^e (y - \delta) / R \leq \langle \sigma \rangle^c, \\ \langle E \rangle^e (y - \delta) / R, & \langle \sigma \rangle^c \leq \langle E \rangle^e (y - \delta) / R \leq \langle \sigma \rangle^t, \\ \langle E \rangle^t (y - \delta) / R + \langle \sigma \rangle^t (1 - \langle E \rangle^t / \langle E \rangle^e), & \langle E \rangle^e (y - \delta) / R \geq \langle \sigma \rangle^t, \end{cases} \quad (6)$$

где эффективные секущий $\langle E \rangle^e$ и касательные модули Юнга $\langle E \rangle^c$ и $\langle E \rangle^t$, а также эффективные пределы пропорциональности $\langle \sigma \rangle^c = -\langle E \rangle^e (h^c + \delta) / R$ и $\langle \sigma \rangle^t = \langle E \rangle^e (h^t - \delta) / R$ определяются согласно (3)–(5), а $-h^c \leq y \leq h^t$ — область сечения, подверженная чисто упругой деформации.

Очевидно, в отличие от случая симметричной диаграммы деформирования балка и пластина могут иметь как две, так и одну область проявления нелинейности (в зависимости от величины изгибающего момента). Поэтому уравнения равновесия балки запишем в виде

$$\begin{cases} \int_{-h}^h \langle E \rangle^e (y - \delta) dy = \theta^c \int_{-h}^{-h^c} (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^c) (y + h^c) dy + \theta^t \int_{h^t}^h (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^t) (y - h^t) dy, \\ \int_{-h}^h \langle E \rangle^e (y - \delta) y dy - M R / 2b = \theta^c \int_{-h}^{-h^c} (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^c) (y + h^c) y dy + \theta^t \int_{h^t}^h (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^t) (y - h^t) y dy, \end{cases} \quad (7)$$

где $\theta^c = \theta(h - h^c)$ и $\theta^t = \theta(h - h^t)$ — функции Хевисайда. После упрощения (7) примет вид

$$\begin{cases} 4E^e h \delta = (E^e - E^c)(h - h^c)^2 \theta^c - (E^e - E^t)(h - h^t)^2 \theta^t, \\ 4E^e h^3 - 3M R / b = (E^e - E^c)(h - h^c)^2 (2h + h^c) \theta^c + (E^e - E^t)(h - h^t)^2 (2h + h^t) \theta^t. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, уравнения равновесия пластины приводят к уравнениям (8) при $b = \pi l^{pl}$. При решении данной системы относительно δ и R определяется область чисто упругого деформирования $-h^c \leq y \leq h^t$, используемая в дальнейшем для линеаризации уравнения состояния (6).

3. Оценка собственных частот колебаний композиционных балки и круглой пластины

В качестве первого критерия линеаризации эффективной функции деформирования (6) воспользуемся условием равенства удельной потенциальной энергии деформации при приближении уравнения состояния линейной функцией, т. е. аппроксимирующий модуль Юнга $\langle \tilde{E} \rangle$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} & \theta^c \int_{\langle \varepsilon \rangle^c}^{\langle \varepsilon \rangle^{\min}} (\langle E \rangle^c - \langle E \rangle^e) (\langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon \rangle^c) d\langle \varepsilon \rangle + \int_0^{\langle \varepsilon \rangle^{\min}} (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle) \langle \varepsilon \rangle d\langle \varepsilon \rangle + \\ & + \theta^t \int_{\langle \varepsilon \rangle^t}^{\langle \varepsilon \rangle^{\max}} (\langle E \rangle^t - \langle E \rangle^e) (\langle \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon \rangle^t) d\langle \varepsilon \rangle + \int_0^{\langle \varepsilon \rangle^{\max}} (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle) \langle \varepsilon \rangle d\langle \varepsilon \rangle = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\langle \varepsilon \rangle^{\min} = -(h + \delta)/R$ и $\langle \varepsilon \rangle^{\max} = (h - \delta)/R$ — наименьшая и наибольшая деформации балки и пластины, $\langle \varepsilon \rangle^c = -(h^c + \delta)/R$ и $\langle \varepsilon \rangle^t = (h^t - \delta)/R$ — деформации, соответствующие эффективным пределам пропорциональности. Решением (9) является выражение

$$\langle \tilde{E} \rangle = \langle E \rangle^e - \frac{(\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^c)(h - h^c)^2 \theta^c + (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^t)(h - h^t)^2 \theta^t}{2(h^2 + \delta^2)}. \quad (10)$$

В качестве второго критерия линеаризации эффективной функции деформирования (6) рассмотрим минимизацию среднеквадратического отклонения:

$$\begin{aligned} & \theta^c \left(\int_{\langle \varepsilon \rangle^{\min}}^{\langle \varepsilon \rangle^c} [(\langle E \rangle^c - \langle \tilde{E} \rangle) \langle \varepsilon \rangle + \langle \varepsilon \rangle^c (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^c)]^2 d\langle \varepsilon \rangle - \int_{\langle \varepsilon \rangle^{\min}}^{\langle \varepsilon \rangle^c} (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle)^2 \langle \varepsilon \rangle^2 d\langle \varepsilon \rangle \right) + \\ & + \theta^t \left(\int_{\langle \varepsilon \rangle^t}^{\langle \varepsilon \rangle^{\max}} [(\langle E \rangle^t - \langle \tilde{E} \rangle) \langle \varepsilon \rangle + \langle \varepsilon \rangle^t (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^t)]^2 d\langle \varepsilon \rangle - \int_{\langle \varepsilon \rangle^t}^{\langle \varepsilon \rangle^{\max}} (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle)^2 \langle \varepsilon \rangle^2 d\langle \varepsilon \rangle \right) + \\ & + \int_{\langle \varepsilon \rangle^{\min}}^0 (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle)^2 \langle \varepsilon \rangle^2 d\langle \varepsilon \rangle + \int_0^{\langle \varepsilon \rangle^{\max}} (\langle E \rangle^e - \langle \tilde{E} \rangle)^2 \langle \varepsilon \rangle^2 d\langle \varepsilon \rangle \rightarrow \min, \end{aligned}$$

которому соответствует аппроксимирующий модуль Юнга вида

$$\langle \tilde{E} \rangle = \langle E \rangle^e - \frac{(\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^c)(h - h^c)^2 (2h + h^c + 3\delta)\theta^c + (\langle E \rangle^e - \langle E \rangle^t)(h - h^t)^2 (2h + h^t - 3\delta)\theta^t}{4(h^3 + 3h\delta^2)}. \quad (11)$$

Таким образом, оценочное значение величины частоты собственных колебаний чистого изгиба закрепленной с двух сторон композиционной балки постоянного прямоугольного поперечного сечения определяется выражением [Кравчук, Кравчук и др., 2015]

$$\langle \omega_j^b \rangle = h(\mu_j^b / l^b)^2 \sqrt{\langle \tilde{E} \rangle / 3\langle \rho \rangle}, \quad (12)$$

где l^b — длина балки, μ_j^b — корни уравнения $D_{-1/2}(\mu_j^b(i+1)) = D_{-1/2}(\mu_j^b(i-1))$, $D_{-1/2}(z)$ — функция параболического цилиндра Вебера–Эрмита, i — мнимая единица, а величина частоты свободных осесимметричных колебаний чистого изгиба закрепленной по краю композиционной круглой пластины может быть оценена с помощью выражения [Кравчук и др., 2016]

$$\langle \omega_j^{pl} \rangle = h(\mu_j^{pl} / l^{pl})^2 \sqrt{2\langle \tilde{E} \rangle / 3\langle \rho \rangle},$$

где l^{pl} — радиус пластины, μ_j^{pl} — корни уравнения $D_{-1/2}(-\mu_j^{pl}(i+1)) = -D_{-1/2}(\mu_j^{pl}(i+1))$.

На рис. 3 приведены зависимости оценочных низших частот свободных колебаний (12) двухфазных балок длиной 1 м квадратного поперечного сечения $0.01 \times 0.01 \text{ м}^2$ при $M = 370 \text{ Н} \cdot \text{м}$ от концентраций компонент, характеристики которых приведены в таблице 1. В качестве аппроксимирующего модуля Юнга используется полученное с помощью энергетического критерия выражение (10). Кроме того, на рис. 4 представлены расхождения в величинах указанных оценочных частот при аппроксимации уравнения состояния с помощью модулей (10) и (11).

Как видно из рис. 3 и 4, расхождения в значениях частот свободных колебаний, полученных с помощью предложенных критериев линеаризации уравнения состояния, пренебрежимо малы. Следовательно, данная методика позволяет сделать оценку величины собственных частот независимо от того, какой из данных критериев аппроксимации будет при этом использован.

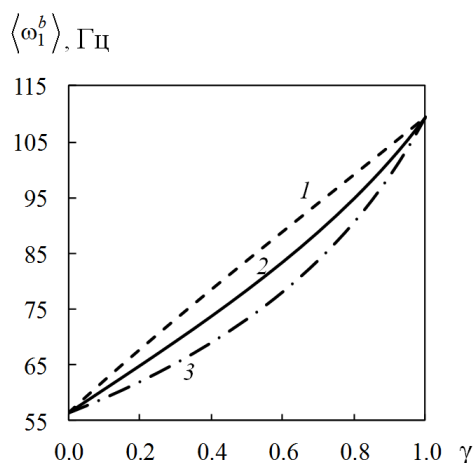


Рис. 3. Зависимость оценочных частот свободных колебаний от концентраций компонент при энергетическом критерии аппроксимации уравнения состояния: 1 — продольно-слоистой балки, 2 — структурно-неоднородной балки, 3 — поперечно-слоистой балки

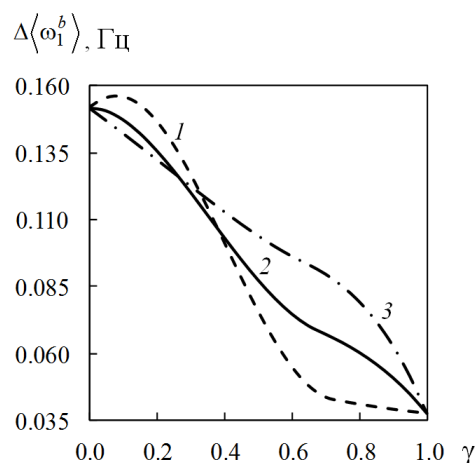


Рис. 4. Расхождение значений оценочных частот свободных колебаний, полученных с помощью разных критериев аппроксимации уравнения состояния: 1 — продольно-слоистой балки, 2 — структурно-неоднородной балки, 3 — поперечно-слоистой балки

Таблица 1. Характеристики компонент композиционного материала балки

k	γ_k	ρ_k , кг/м ³	E_k^e , ГПа	E_k^c , ГПа	E_k^t , ГПа	σ_k^c , ГПа	σ_k^t , ГПа
1	γ	3700	43	10	14	-0.30	0.26
2	$1-\gamma$	4800	15	6	4	-0.25	0.24

4. Заключение

В работе представлена методика линеаризации уравнения состояния композиционных нелинейно-упругих балок и круглых пластин при чистом изгибе для оценки частот свободных колебаний. Аппроксимирующий модуль Юнга определен исходя из критерия равенства удельной потенциальной энергии деформации, а также из минимизации среднеквадратического отклонения при приближении функции деформирования. Показано, что предложенные критерии линеаризации позволяют производить оценку величины собственных частот колебаний с одинаковой точностью.

Впервые в качестве уравнения состояния компонент композиционного материала рассмотрена кусочно-линейная диаграмма Прандтля с различающимися пределами пропорциональности и касательными модулями Юнга. Представленные эффективные характеристики диаграммы деформирования для поперечно-слоистой балки, аксиально-слоистой пластины и продольно-слоистой структуры материала получены при использовании гипотез Фойгта и Рейсса, а параметры деформирования структурно-неоднородных балки и пластины получены с помощью метода гомогенизации, предложенного ранее авторами.

Список литературы (References)

- Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.
- Bateman H.* Higher transcendental functions, vol. II. — New York: McGraw-Hill, 1953. (Russ. ed.: *Bejtmn G., Erdeji A.* Vysshie transcendentnye funkcii. T. 2. Funkcii Besselya, funkcii parabolicheskogo cilindra, ortogonal'nye mnogochleny. — Moscow: Nauka, 1966.)
- Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980.
- Biderman V. L.* Teoriya mehanicheskikh kolebanij [Theory of mechanical vibrations]. — Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
- Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопrotivление материалов. — М.: Наука, 1986.
- Birger I. A., Mavljutov R. R.* Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. — Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
- Жемочкин Б. Н.* Теория упругости. — М.: Госстройиздат, 1957.
- Zhemochkin B. N.* Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. — Moscow: Gosstroyizdat, 1957 (in Russian).
- Кравчук А. С., Кравчук А. И., Томило Е. В., Тарасюк И. А.* Колебания чистого изгиба композиционной структурно-неоднородной призматической балки постоянного сечения // Известия НАН Беларуси. Сер. физико-технических наук. — 2015. — № 2. — С. 65–71.
- Kravchuk A. S., Kravchuk A. I., Tomilo E. V., Tarasyuk I. A.* Kolebaniya chistogo izgiba kompozicionnoj strukturno-neodnorodnoj prizmaticheskoy balki postoyannogo secheniya [Pure bending vibrations of a composite structurally heterogeneous prismatic beam of a constant cross-section] // Izvestiya NAN Belarusi. Ser. fiziko-tehnicheskikh nauk. — 2015. — No. 2. — P. 65–71 (in Russian).
- Кравчук А. С., Михасев Г. И., Тарасюк И. А.* Свободные осесимметричные колебания чистого изгиба композиционной структурно-неоднородной круглой пластины постоянной толщины // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. — 2016. — № 3. — С. 154–159.
- Kravchuk A. S., Mikhasev G. I., Tarasyuk I. A.* Svobodnye osesimmetrichnye kolebaniya chistogo izgiba kompozicionnoj strukturno-neodnorodnoj krugloj plastiny postoyannoj tolshhiny [Free axisymmetric vibrations of pure bending of a composite structural heterogeneous circular plate of a constant thickness] // Vestnik BGU. Ser. 1. Fizika. Matematika. Informatika. — 2016. — No. 3. — P. 154–159 (in Russian).
- Кравчук А. С., Томило Е. В., Тарасюк И. А.* Нелинейная ползучесть слоистых и композиционных призматических брусев при чистом изгибе // Известия НАН Беларуси. Сер. физико-технических наук. — 2015. — № 1. — С. 69–81.
- Kravchuk A. S., Tomilo E. V., Tarasyuk I. A.* Nelinejnaya polzuchest' sloistyh i kompozicionnyh prizmaticheskikh brus'ev pri chistom izgibe [Nonlinear creep of laminated and composite rods in the case of pure bending] // Izvestiya NAN Belarusi. Ser. fiziko-tehnicheskikh nauk. — 2015. — No. 1. — P. 69–81 (in Russian).

- Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. — Киев: Наукова думка, 1981.
Pisarenko G. S., Mozharovskij N. S. Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti [Equations and boundary-value problems of theory of plasticity and creep]. — Kiev: Naukova dumka, 1981 (in Russian).
- Тарасюк И. А., Кравчук А. С.* Сужение «вилки» Фойгта–Рейсса в теории упругих структурно-неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов // APRIORI. Сер. Естественные и технические науки. — 2014. — № 3. — URL: <http://www.apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf> (дата обращения 03.10.2017).
Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Suzhenie «vilki» Fojgta-Rejssa v teorii uprugih strukturno neodnorodnyh v srednem izotropnyh kompozicionnyh tel bez primeneniya variacionnyh principov [Reducing the Voigt-Reuss range in the theory of elastic structurally heterogeneous composite on average isotropic bodies without application of variational principles] // APRIORI. Ser. Estestvennye i tehnicheckie nauki. — 2014. — No. 3 (in Russian). Available at: <http://www.apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf> (accessed 03.10.2017).
- Тимошенко С. П.* Теория упругости. — М.: ОНТИ, 1937.
Timoshenko S. Theory of elasticity. — New York: McGraw-Hill, 1934. (Russ. ed.: *Timoshenko S. P.* Teoriya uprugosti. — Moscow: ONTI, 1937.)
- Филин А. П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 2. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. — М.: Наука, 1978.
Filin A. P. Prikladnaya mehanika tverdogo deformiruemogo tela. T. 2. Soprotivlenie materialov s elementami teorii sploshnyh sred i stroitel'noj mehaniki [Applied solid mechanics. Vol. 2. Strength of materials with elements of theory of continuous media and structural mechanics]. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
- Peters S. T.* Handbook of Composites. — London: Chapman & Hall, 1998.
- Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1929. — Vol. 9, No. 1. — P. 49–58.
- Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. — Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1966.