

УДК: 519.62/64+517.958:536

Кинетические уравнения для моделирования диффузионных процессов методом решеточных уравнений Больцмана

Г. В. Кривовичев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

E-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Получено 12.02.2017, после доработки — 20.10.2017.

Принято к публикации 31.10.2017.

В работе рассмотрена система линейных кинетических уравнений с релаксационным членом типа Бхатнагара–Гросса–Крука для моделирования линейных диффузионных процессов с помощью метода решеточных уравнений Больцмана. Коэффициенты системы зависят от дискретных скоростей, определяемых точками шаблона, построенного в пространстве скоростей частиц. Система может рассматриваться как альтернативная математическая модель для описания диффузионного процесса. Рассматривается несколько случаев базовых шаблонов в пространстве скоростей частиц. Рассмотрены случаи зависящих от параметра коэффициентов. С использованием асимптотического метода Чепмена–Энскога показано, что система может быть сведена к линейному уравнению диффузии, а также получено выражение для коэффициента диффузии. Как результат анализа полученного выражения показано, что решения, получаемые по решеточным уравнениям Больцмана, обладают численной диффузией. Анализ устойчивости проводится посредством исследования волновых мод, допускаемых решениями гиперболической системы уравнений. Для случаев других шаблонов предложен алгоритм численного исследования устойчивости. В результате расчетов показано, что решения системы являются устойчивыми в широком диапазоне входных параметров. Показан достаточный характер физически допустимого условия положительности времени релаксации как условия устойчивости. Посредством аналитических, а также численных исследований показано, что решения в виде волновых мод обладают дисперсией, не типичной для решений линейного уравнения диффузии. Но при этом свойственные дисперсии искажения волнового пакета будут демпфироваться из-за наличия асимптотической устойчивости и в целом поведение решения близко к решению уравнения диффузии. Разностные схемы для построенной системы, помимо моделирования диффузии, могут быть использованы при решении стационарных задач методом установления и в методе расщепления для расчетов течений вязкой жидкости. Полученные результаты могут оказаться полезными при сравнении друг с другом теоретических свойств различных разностных схем метода решеточных уравнений Больцмана для численного моделирования диффузии.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, диффузия, устойчивость, дисперсия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-00021 мол_а.

UDC: 519.62/64+517.958:536

Kinetic equations for modelling of diffusion processes by lattice Boltzmann method

G. V. Krivovichev

Saint-Petersburg State University,
Universitetskaya nab. 7/9, Saint-Petersburg, 199034, Russia

E-mail: g.krivovichev@spbu.ru

Received 12.02.2017, after completion — 20.10.2017.

Accepted for publication 31.10.2017.

The system of linear hyperbolic kinetic equations with the relaxation term of Bhatnagar – Gross – Krook type for modelling of linear diffusion processes by the lattice Boltzmann method is considered. The coefficients of the equations depend on the discrete velocities from the pattern in velocity space. The system may be considered as an alternative mathematical model of the linear diffusion process. The cases of widely-used patterns on speed variables are considered. The case of parametric coefficients takes into account. By application of the method of Chapman – Enskog asymptotic expansion it is obtained, that the system may be reduced to the linear diffusion equation. The expression of the diffusion coefficient is obtained. As a result of the analysis of this expression, the existence of numerical diffusion in solutions obtained by application of lattice Boltzmann equations is demonstrated. Stability analysis is based on the investigation of wave modes defined by the solutions of hyperbolic system. In the cases of some one-dimensional patterns stability analysis may be realized analytically. In other cases the algorithm of numerical stability investigation is proposed. As a result of the numerical investigation stability of the solutions is shown for a wide range of input parameters. The sufficiency of the positivity of the relaxation parameter for the stability of solutions is demonstrated. The dispersion of the solutions, which is not realized for a linear diffusion equation, is demonstrated analytically and numerically for a wide range of the parameters. But the dispersive wave modes can be damped as an asymptotically stable solutions and the behavior of the solution is similar to the solution of linear diffusion equation. Numerical schemes, obtained from the proposed systems by various discretization techniques may be considered as a tool for computer modelling of diffusion processes, or as a solver for stationary problems and in applications of the splitting lattice Boltzmann method. Obtained results may be used for the comparison of the theoretical properties of the difference schemes of the lattice Boltzmann method for modelling of linear diffusion.

Keywords: lattice Boltzmann method, diffusion, stability, dispersion

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 919–936 (Russian).

This work was supported by RFBR according to the research project No. 16-31-00021 mol_a.

1. Введение

Метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее — LBM) в последние годы стал одним из самых популярных методов для численного моделирования различных физических процессов [Nourgaliev et al., 2003; Wolf-Gladrow, 2005]. Высокая эффективность LBM по сравнению с традиционными методами особенно проявилась при решении задач механики жидкости и газа со сложными эффектами, такими как фазовые переходы [Kupershtokh, 2011], ламинарно-турбулентный переход [Евстигнеев, Магницкий, 2010] и просачивание в пористых средах [Xia, 2016]. Ключевой особенностью метода является то, что в отличие от подходов, основанных на использовании макрохарактеристик физических сред (плотности, температуры, концентрации и др.), в рамках этого метода рассматриваются такие микрохарактеристики, как функции распределения модельных частиц среды. Функции распределения удовлетворяют кинетическим уравнениям первого порядка, являющимися, как правило, гиперболическими, для которых хорошо разработана теория разностных схем. Во многом эффективность метода связана с тем, что его алгоритмы обладают естественным параллелизмом, что важно для проведения расчетов с использованием современных многопроцессорных систем [Бикулов и др., 2012; Бикулов, Сенин, 2013; Бикулов, 2015; Грачев и др., 2011]. Математическая модель, используемая в методе LBM, основана на системе дискретных кинетических уравнений (так называемых решеточных уравнений Больцмана, lattice Boltzmann equations, далее — LB-уравнения), являющейся, по сути, разностной схемой для системы дифференциальных кинетических уравнений относительно функций распределения частиц с заданными скоростями. Такая система, в свою очередь, может быть получена как результат аппроксимации кинетического уравнения в пространстве скоростей на некотором заданном шаблоне.

Основанные на LB-уравнениях модели для решения задач для линейного уравнения диффузии (ЛУД) начали предлагаться еще с первых лет развития LBM. В [Wolf-Gladrow, 1995] предложена и обоснована система LB-уравнений для решения ЛУД в пространстве произвольной конечной размерности для случаев скоростных шаблонов с ненулевыми, ортогональными и противоположно направленными векторами скорости. В [Ancona, 1994] для случая одномерного шаблона показана эквивалентность системы LB-уравнений и разностной схемы Дю Форта – Франкела для одномерного ЛУД. Системы линейных LB-уравнений для моделирования диффузии в плоском случае для различных скоростных шаблонов предложены в [Blaak, Slood, 2000; Chen et al., 2008; Huber et al., 2008]. В [van der Sman, Ernst, 1999] исследуются свойства LB-уравнений для случаев скоростных шаблонов, определяемых орторомбическими наборами векторов.

В работах [Blaak, Slood, 2000; Krivovichev, 2015; Suga, 2010; Wagner, Strang, 2016] предложены LB-уравнения с коэффициентами, зависящими от безразмерного параметра, за счет выбора которого можно влиять на устойчивость и на другие свойства получаемых решений. В [Suga, 2010] для одномерного случая показано, что система LB-уравнений может быть сведена к разностной схеме для одномерного уравнения диффузии четвертого порядка аппроксимации и выдвинута гипотеза об эквивалентности условий устойчивости схемы и LB-уравнений. В [Кривовичев, 2016] с использованием метода фон Неймана была показана справедливость этой гипотезы. В недавно вышедшей работе [Wagner, Strang, 2016] исследуются параметрические LB-уравнения с флуктуациями.

Устойчивость LB-уравнений для ЛУД, как правило, исследуется численно или аналитически с помощью метода фон Неймана. Аналитическое исследование в общем случае возможно только для LB-уравнений для одномерного ЛУД. Так, в [Junk, Yang, 2015; Rheinlander, 2008] аналитически исследуются спектры операторов перехода для случаев одномерных шаблонов. При этом спектральный признак, как известно, в общем случае дает только необходимые условия устойчивости. В [Кривовичев, 2016] с помощью метода дифференциального приближения

Н. Н. Яненко и Ю. И. Шокина показано, что в случае простейшего одномерного шаблона известное необходимое условие устойчивости носит и достаточный характер.

Отметим, что ЛВ-уравнения для ЛУД применяются не только для решения задач о массе или теплопереносе. Важное приложение эти схемы имеют в методе установления решения задач для стационарных уравнений, таких как уравнения Лапласа и Пуассона [Hirabayashi et al., 2001; Wang et al., 2011]. Другое важное применение относится к методу расщепления для расчета течений вязких несжимаемых жидкостей на основе LBM [Кривовичев, 2014; Shu et al., 2006], на одном из этапов которого приходится решать задачу для системы ЛУД.

Необходимо заметить, что все описанные ЛВ-уравнения построены во многом интуитивно (по аналогии с ЛВ-уравнениями для гидродинамических процессов) и, как математические объекты, представляют собой разностные уравнения, то есть являются *дискретными*. При этом до сих пор в известной автору литературе не представлена система *дифференциальных* уравнений, которая дискретизовалась бы этими разностными уравнениями, и не исследованы свойства ее решений. Цель настоящей работы состоит в разработке и исследовании такой системы, которая могла бы, во-первых, рассматриваться как альтернативная математическая модель диффузионных процессов, а во-вторых, являлась бы основой для построения ЛВ-уравнений различных порядков аппроксимации, а также схем, основанных на методе конечных элементов, конечных объемов и пр.

В настоящей работе представлена система линейных кинетических уравнений типа Бхатнагара – Гросса – Крука (далее – БГК), с помощью которой можно моделировать линейные диффузионные процессы. Показана гиперболичность этой системы в случае простейших скоростных шаблонов. Рассмотрены уравнения с параметрическими коэффициентами в релаксационных членах. На основе метода Чепмена – Энскога показано, что из системы может быть получено ЛУД и выведено выражение для коэффициента диффузии. Показано, что схемы на основе ЛВ-уравнений обладают численной диффузией, что следует учитывать при проведении расчетов. Проведено численное исследование устойчивости и показан достаточный характер необходимого условия устойчивости. Показано, что в отличие от ЛУД решения предложенных уравнений обладают дисперсией.

2. Линейные кинетические уравнения

Рассмотрим систему линейных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + V_{j\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\lambda} (f_j - f_j^{(eq)}), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где t — время, x_k ($k = \overline{1, N}$, $N \leq 3$) — декартовы координаты, f_j ($j = \overline{1, n}$) — функции распределения частиц со скоростями $\mathbf{V}_j = V\mathbf{e}_j$, $V = l/\delta t$ есть характерная скорость, δt — среднее время свободного пробега, l — средняя длина свободного пробега, \mathbf{e}_j представляют собой безразмерные векторы, λ — время релаксации, $f_j^{(eq)}$ — равновесные функции распределения. По греческим индексам используется правило суммирования Эйнштейна. Векторы \mathbf{e}_j задают шаблон DNQn в пространстве скоростей.

Уравнения (1) по структуре представляют собой частный случай уравнений БГК [Bhatnagar et al., 1954], характеризующихся тем, что в их правых частях вместо интеграла столкновений фигурирует релаксационный член.

В настоящей работе рассмотрим только случаи простейших скоростных шаблонов с ортогональными, нулевыми и противоположно направленными векторами \mathbf{e}_j . Рассмотрим примеры таких шаблонов.

1) Одномерный случай.

а) Шаблон D1Q2.

$$e_1 = 1, \quad e_2 = -1.$$

б) Шаблон D1Q3.

$$e_1 = 0, \quad e_2 = 1, \quad e_3 = -1.$$

2) Двумерный случай.

а) Шаблон D2Q4.

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (-1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, -1).$$

б) Шаблон D2Q5.

$$\mathbf{e}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{e}_4 = (-1, 0), \quad \mathbf{e}_5 = (0, -1).$$

3) Трёхмерный случай.

а) Шаблон D3Q6.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{e}_4 = (-1, 0, 0), \\ \mathbf{e}_5 = (0, -1, 0), \quad \mathbf{e}_6 = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

б) Шаблон D3Q7.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, 0, 1), \\ \mathbf{e}_5 = (-1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_6 = (0, -1, 0), \quad \mathbf{e}_7 = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Систему (1) будем рассматривать как модель диффузионного процесса, который может быть описан ЛУД:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c, \quad (2)$$

где $c(t, \mathbf{x})$ — концентрация, $D > 0$ — коэффициент диффузии.

Решения (2) и (1) связаны следующим образом:

$$c(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(t, \mathbf{x}). \quad (3)$$

По аналогии с БГК-уравнениями для моделирования гидродинамических процессов, равновесные функции распределения $f_j^{(eq)}$ определяются следующим образом [Sofonea, Sekerka, 2003]:

$$\sum_{j=1}^n f_j^{(eq)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j(t, \mathbf{x}). \quad (4)$$

Условию (4) будут удовлетворять $f_j^{(eq)}$ следующего вида:

$$f_j^{(eq)}(t, \mathbf{x}) = W_j c(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

где $W_j > 0$, $\sum_{j=1}^n W_j = 1$ являются безразмерными. Для случая шаблонов DNQ2N они могут быть представлены следующим образом:

$$W_j = \frac{1}{2N}; \quad (6)$$

для шаблонов типа D2Q(2N+1) можно использовать следующие W_j :

$$W_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \\ \frac{1}{2N}, & j \neq 1; \end{cases} \quad (7)$$

для таких шаблонов можно рассмотреть и параметрические зависимости вида

$$W_j = \begin{cases} \sigma, & j = 1, \\ \frac{1-\sigma}{2N}, & j \neq 1, \end{cases} \quad (8)$$

где $\sigma \in [0, 1]$. Параметр σ введем для того, чтобы за счет его выбора можно было влиять на различные свойства решений системы (1).

Подставляя (5) в (1), получим

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + V_{j\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\lambda} \left(f_j - W_j \sum_{s=1}^n f_s \right). \quad (9)$$

Заметим, что в случае указанных шаблонов скоростей система (9) является гиперболической. Перепишем (9) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{A}_\alpha \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\lambda} (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(eq)}). \quad (10)$$

В случае одномерных шаблонов в сумме в левой части (10) будем иметь только одно слагаемое. Для шаблонов D1Q2 и D1Q3 матрица \mathbf{A}_1 соответственно имеет вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -V & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях собственные значения матрицы вещественные и простые, в связи с чем для таких шаблонов система (10) является строго гиперболической [Куликовский и др., 2012]. Далее покажем, что для остальных случаев система является просто гиперболической.

В случаях двумерных и трехмерных шаблонов рассмотрим матрицу $\mathbf{P} = a_\alpha \mathbf{A}_\alpha$, где $a_\alpha \in \mathbf{R}$, $\sum_s a_s^2 \neq 0$. Например, в случае шаблона D2Q5 она примет вид

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 V \end{pmatrix}.$$

При коэффициентах a_j , одновременно не равных нулю, \mathbf{P} тоже имеет простые вещественные собственные значения. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, будем иметь нулевое собственное значение третьей кратности, равное нулю, и два вещественных собственных значения; нулевому собственному значению будут отвечать три линейно независимых правых собственных вектора. Матрица из правых собственных векторов $\mathbf{\Omega}$ является диагональной, поэтому жорданова клетка, отвечающая кратному нулевому собственному значению, тоже будет диагональной, в связи с чем система является гиперболической [Гаврилюк и др., 2011]. В случае шаблона D2Q4 и трехмерных шаблонов гиперболичность показывается аналогично, просто будет меняться порядок кратности нулевого собственного значения.

Необходимо отметить, что поскольку ЛУД (2) является уравнением параболического типа, то гиперболическую систему (9) можно рассматривать как альтернативную математическую модель для описания линейных диффузионных процессов.

3. Метод Чепмена – Энскога

В данном параграфе покажем, что система (1) может быть сведена к ЛУД (2), и приведем выражение для коэффициента диффузии.

Зададим f_j следующими асимптотическими представлениями:

$$f_j \approx f_j^{(0)} + \varepsilon f_j^{(1)} + \varepsilon^2 f_j^{(2)}, \quad (11)$$

где ε представляет собой число Кнудсена $\varepsilon = l/L$, L есть характерный размер области, в которой происходит процесс. При использовании представлений (11) будем полагать, что $\varepsilon \ll 1$, что соответствует макроскопическому приближению (приближению сплошной среды).

В (11) $f_j^{(0)} = f_j^{(eq)}$, а $f_j^{(1)}$ и $f_j^{(2)}$ в соответствии с (4) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^n f_j^{(1)} = \sum_{j=1}^n f_j^{(2)} = 0. \quad (12)$$

Для производных по независимым переменным используем мультимасштабные представления [Sofonea, Sekerka, 2003]

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_{1\alpha}}. \quad (13)$$

После подстановки (11) и (13) в (9) получим с точностью до $o(\varepsilon^2)$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial t_2} + \varepsilon V_{j\alpha} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}} + \varepsilon^2 V_{j\alpha} \frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} = -\frac{1}{\lambda} (\varepsilon f_j^{(1)} + \varepsilon^2 f_j^{(2)}). \quad (14)$$

Приравнивая в (14) члены при ε и ε^2 , получим следующие уравнения для первого и второго приближений $f_j^{(1)}$ и $f_j^{(2)}$:

$$f_j^{(1)} = -\lambda V_{j\alpha} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial x_{1\alpha}}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial t_2} + V_{j\alpha} \frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial x_{1\alpha}} = -\frac{1}{\lambda} f_j^{(2)}. \quad (16)$$

После подстановки (15) в (16) получим

$$\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial t_2} - \lambda V_{j\alpha} V_{j\beta} \frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} = -\frac{1}{\lambda} f_j^{(2)}. \quad (17)$$

Перепишем (17) в виде

$$\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial t_2} - \lambda V^2 e_{j\alpha} e_{j\beta} \frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_{1\alpha} \partial x_{1\beta}} = -\frac{1}{\lambda} f_j^{(2)}. \quad (18)$$

Умножая (18) на ε^2 , в соответствии с (13) получим

$$\frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial t} - \lambda V^2 e_{j\alpha} e_{j\beta} \frac{\partial^2 f_j^{(0)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = -\frac{1}{\lambda} \varepsilon^2 f_j^{(2)}. \quad (19)$$

После суммирования (19) по i в соответствии с (12) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^n f_j^{(0)} \right) - \lambda V^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\sum_{j=1}^n f_j^{(0)} e_{j\alpha} e_{j\beta} \right) = 0. \quad (20)$$

С учетом (3) и (4) для шаблонов DNQ2N и DNQ(2N+1) (см. (6)–(8)) получим из (20) ЛУД (2) с коэффициентом диффузии D , который в случаях коэффициентов (6) и (7) представляется как

$$D = \frac{\lambda V^2}{N}, \quad (21)$$

а для случая параметрических коэффициентов (8) представляется как

$$D = \frac{1 - \sigma}{N} \lambda V^2. \quad (22)$$

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда система кинетических уравнений (9) с коэффициентами W_j , представимыми по (6)–(8), с точностью до членов второго порядка малости по ε может быть сведена к ЛУД с постоянным коэффициентом диффузии D , определяемым соотношениями (21)–(22).

4. Решеточные уравнения Больцмана

Известные из литературы LB-уравнения могут быть получены как разностные схемы для системы (9) посредством дискретизации ее интегральной формы по аналогии со случаем кинетических уравнений газовой динамики [He, Luo, 1997].

Интегральная форма системы (9) по аналогии с [He, Luo, 1997] получается посредством ее интегрирования вдоль характеристик и имеет следующий вид:

$$f_j(t + \delta t, \mathbf{x} + \mathbf{V}_j \delta t) - f_j(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\delta t} \left(f_j(t + \xi, \mathbf{x} + \mathbf{V}_j \xi) - W_j \sum_{s=1}^n f_s(t + \xi, \mathbf{x} + \mathbf{V}_j \xi) \right) d\xi. \quad (23)$$

Вычисляя интеграл в правой части (23) с использованием квадратурной формулы левых прямоугольников, получим явные LB-уравнения, предложенные в упомянутых во введении работах:

$$f_j(t + \delta t, \mathbf{x} + \mathbf{V}_j \delta t) - f_j(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\tau} \left(f_j(t, \mathbf{x}) - W_j \sum_{s=1}^n f_s(t, \mathbf{x}) \right), \quad (24)$$

где $\tau = \lambda / \delta t$ есть безразмерное время релаксации.

Выражения для аппроксимационного коэффициента диффузии LB-уравнений (24) получаются посредством применения метода Чепмена – Энскога к их первым дифференциальным приближениям для получения ЛУД (2). Для случаев шаблонов DNQ2N и DNQ(2N+1) с коэффициентами (6) и (7) выражение имеет вид [Wolf-Gladrow, 1995]

$$D = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{N \delta t}, \quad (25)$$

а для параметрических коэффициентов (8) выражение представляется следующим образом [Krivovichev, 2015; Suga, 2010]:

$$D = (\sigma - 1) \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{N\delta t}. \quad (26)$$

При $N = 2$ из (26) при $\sigma = 1/3$ получается выражение для коэффициента аппроксимационной диффузии LB-уравнений, предложенных в [Huber et al., 2008], а случай уравнений из [Chen et al., 2008] соответствует $\sigma = 1/5$.

Полученные выше формулы (21) и (22) можно переписать следующим образом:

$$D = \frac{\tau l^2}{N\delta t}, \quad D = \frac{(1 - \sigma)\tau l^2}{N\delta t}. \quad (27)$$

Сравнивая друг с другом (25)–(26) и (27), заметим, что в (25)–(26) существуют фиктивные члены $-l^2/(2N\delta t)$ и $-(1 - \sigma)l^2/(2N\delta t)$ соответственно. Наличие таких членов связано именно с дискретной природой (24). Эти члены следует учитывать при проведении практических расчетов по (24), вычисляя значения τ именно по (25)–(26) по заданным D , l и δt . Как и для кинетических уравнений для гидро- и газодинамических расчетов [Sofonea, Sekerka, 2003], на основе (9) можно построить конечно-разностные схемы, для которых аппроксимационные коэффициенты диффузии будут совпадать с (21)–(22).

5. Исследование устойчивости

Следует отметить, что *необходимое* условие устойчивости решений уравнения (2) состоит в неотрицательности коэффициента диффузии D [Самарский, Вабищевич, 2004]. Из этого условия будет следовать *необходимое* условие устойчивости решений (9): $\tau \geq 0$. Учитывая, что время всегда является положительным, получим следующее условие:

$$\tau > 0. \quad (28)$$

Для LB-уравнений из выражения для коэффициента диффузии получим известное из литературы *необходимое* условие: $\tau > 1/2$. В [Кривовичев, 2016] на основе метода дифференциального приближения показана достаточность этого условия для шаблона D1Q2. Достаточность условия (28) в этой же работе показана аналитически для случая шаблонов D1Q2 и D1Q3 (в случае коэффициентов (7)) посредством анализа волновых мод. В настоящей работе рассмотрим случаи многомерных шаблонов и одномерного шаблона при параметрических коэффициентах (8).

Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\delta t}, \quad \tilde{x}_\alpha = \frac{x_\alpha}{l}, \quad \tilde{f}_j = \frac{f_j}{\Phi}, \quad (29)$$

где Φ есть характерное значение функций распределения. Во всех приводимых ниже формулах знак тильды в обозначениях (29) будем опускать.

Подставляя (29) в (9), получим

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + e_{j\alpha} \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\tau} \left(f_j - W_j \sum_{s=1}^n f_s \right). \quad (30)$$

Решения гиперболической системы (30) в случае областей с бесконечными или же периодическими границами могут быть представлены в виде волновых мод [Уизем, 1977]:

$$f_j(t, \mathbf{x}) = B_j \exp(i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})), \quad (31)$$

где ω есть частота, \mathbf{k} — волновой вектор, $B_j \in \mathbb{C}$ — комплексные или вещественные числа, $i^2 = -1$.

Подставляя (31) в (30), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Ненулевые решения (32) существуют, когда ω являются корнями дисперсионного соотношения

$$\det(\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k})) = 0. \quad (33)$$

Как можно видеть из (31), решения (30) будут ограничены при $t \rightarrow +\infty$, если $\omega \in \mathbf{R}$. В случае когда корни (33) комплексные, решения являются ограниченными, если их мнимые части неотрицательны. В случае если они положительны, решения будут асимптотически стремиться к нулю. Таким образом, достаточное условие устойчивости решений (32) выписывается как $\text{Im}(\omega) \geq 0$, причем случай строгого неравенства отвечает асимптотической устойчивости.

В общем случае корни (33) находятся численно. Случаи одномерных шаблонов, когда они легко находятся аналитически, рассмотрены в [Кривовичев, 2016]. Заметим, что в случае шаблона D1Q3 и параметрических коэффициентов (8) корни (33) тоже находятся аналитически, но выражения для них являются излишне громоздкими для анализа, в связи с чем они тоже изучались численными методами. Мнимые части частот представляют собой функции τ , σ и \mathbf{k} . При проведении исследований в их области определения $\Omega = \{(\tau, \sigma, \mathbf{k}) | \tau \in (0, \tilde{\tau}], \sigma \in [0, 1], k_\alpha \in [-\pi, \pi]\}$, где α соответствует пространственным координатам, строились сетки с постоянными шагами, при этом полагалось, что выполняется условие (28).

Исследование неотрицательности значений функций $\text{Im}(\omega_j)$ и, как следствие, достаточности условия (28) проводилось по следующему алгоритму.

1. Для каждого узла (τ_p, σ_l) формируются массивы $\mathbf{a}_q(\tau_p, \sigma_l)$, $q = \overline{1, n}$, элементы которых вычисляются следующим образом: $a_{qs}(\tau_k, \sigma_l) = \text{Im}(\omega_j)(\tau_p, \sigma_l, \mathbf{k}_s)$, где \mathbf{s} есть индекс узла сетки, построенной в области изменения компонент волнового вектора k_α .

2. Определяются наименьшие элементы массивов \mathbf{a}_q : $m_q(\tau_p, \sigma_l) = \min_{\mathbf{s}} a_{qs}(\tau_p, \sigma_l)$.

3. Определяются наименьшие элементы m_q : $\Lambda(\tau_p, \sigma_l) = \min_{q=\overline{1, n}} m_q$.

4. Значения функции $\Lambda(\tau_p, \sigma_l)$ исследуются на построенных сетках по переменным τ и σ . Если для какого-то узла оказалось $\Lambda < 0$, решение (30) не является устойчивым при таком значении τ , и условие (28) является только необходимым.

С использованием предложенного алгоритма проведем исследование устойчивости для случаев шаблонов, для которых аналитическое исследование является затруднительным.

1. *Шаблон D1Q3*. Параметрические коэффициенты задаются следующим образом: $W_1 = \sigma$, $W_2 = W_3 = (1 - \sigma)/2$.

Дисперсионное соотношение в этом случае представляет собой кубическое уравнение

$$a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega + d = 0, \quad (34)$$

где

$$a = -i, \quad b = -\frac{2}{\tau}, \quad c = i\left(k^2 + \frac{1}{\tau^2}\right), \quad d = -\frac{k^2(\sigma - 1)}{\tau}.$$

Случай $\sigma = 0$ рассмотрен в работе [Кривовичев, 2016].

Корни (34) при $\sigma \neq 0$ несложно получить с использованием современных пакетов компьютерной алгебры (автор пользовался системой Maple). К сожалению, выражения для них являются излишне громоздкими и не поддаются эффективному аналитическому исследованию. В связи с этим проведем их численное исследование в соответствии с приведенным алгоритмом. На рис. 1 представлен график функции Λ для случая $\tilde{\tau} = 10$ и сетки из 100×100 узлов. Как можно видеть, все значения Λ неотрицательны, а максимальные значения имеют место при $\sigma = 0$.

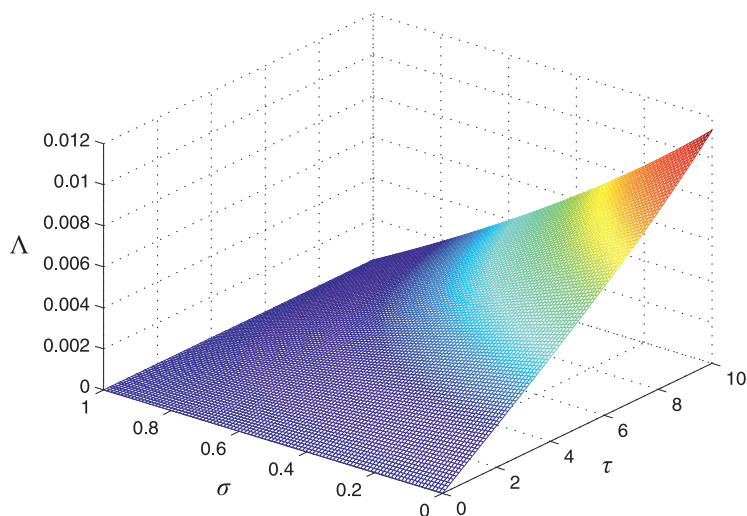


Рис. 1. График спектральной функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ как поверхности в пространстве параметров τ и σ в случае шаблона D1Q3 при $\tilde{\tau} = 10$

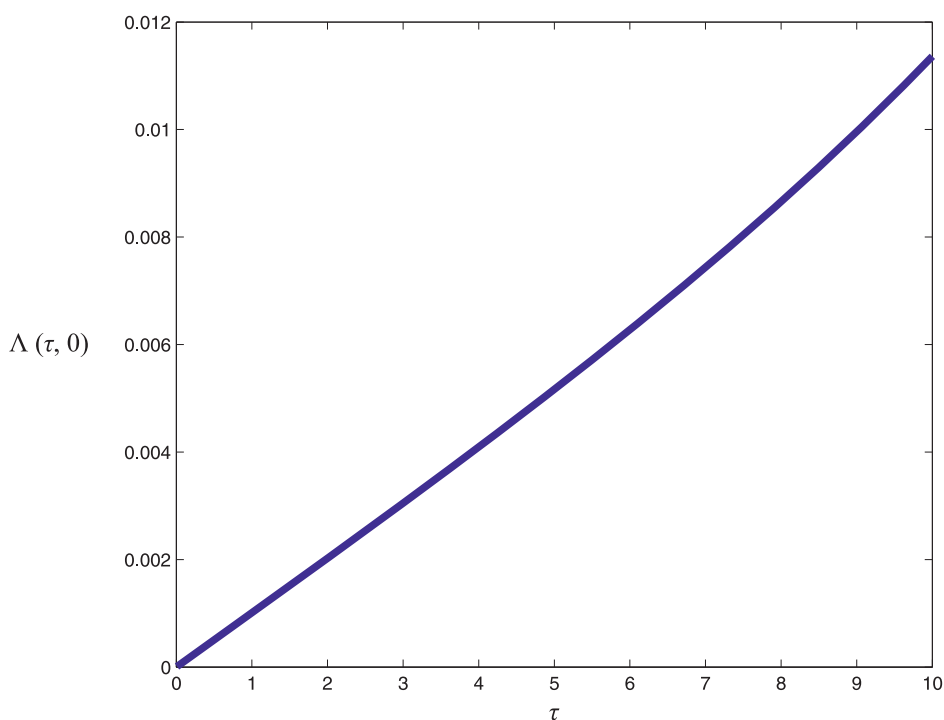


Рис. 2. График спектральной функции $\Lambda(\tau, 0)$ в случае шаблона D1Q3 при $\tilde{\tau} = 10$

На рис. 2 представлены графики Λ как функции τ при нулевом значении σ для различных $\tilde{\tau}$. Заметим, что максимальное значение величины $E(\tau) = |\Lambda^{D1Q3}(\tau, 0) - \Lambda^{D1Q2}(\tau)|$, где Λ^{D1Q3} есть функция Λ для случая шаблона D1Q3, Λ^{D1Q2} соответствует шаблону D1Q2, в широком диапазоне изменения τ является величиной порядка 10^{-17} . Как можно видеть, значениями E можно пренебречь в широком диапазоне изменения времени релаксации τ , в связи с чем с позиции критерия устойчивости, характеризуемого функцией Λ , случаи шаблонов D1Q2 и D1Q3 при $\sigma = 0$ в плане устойчивости можно считать эквивалентными.

2. *Шаблоны D2Q4 и D2Q5.* Коэффициенты W_j в случае шаблона D2Q4 имеют вид $W_1 = \dots = W_4 = 1/4$, и дисперсионное соотношение (33) представляет собой алгебраическое уравнение четвертого порядка. В случае шаблона D2Q5 имеем параметрические коэффициенты $W_1 = \sigma$, $W_2 = \dots = W_5 = \frac{1-\sigma}{4}$, а дисперсионное соотношение представляет собой уравнение пятого порядка.

В случае двумерных шаблонов в Maple корни аналитически найти не удалось, в связи с чем они находились численно с использованием формул Феррари для шаблона D2Q4 и с помощью функции `roots()` пакета Matlab для шаблона D2Q5. На рис. 3 представлен график функции Λ : как можно видеть, ее поведение близко со случаем аналогичной функции для шаблона D1Q3. Следует отметить, что по аналогии с одномерным случаем при применяемом критерии значениями функции $E(\tau)$ можно пренебречь и случаи шаблонов D2Q4 и D2Q5 с $\sigma = 0$ фактически эквивалентны.

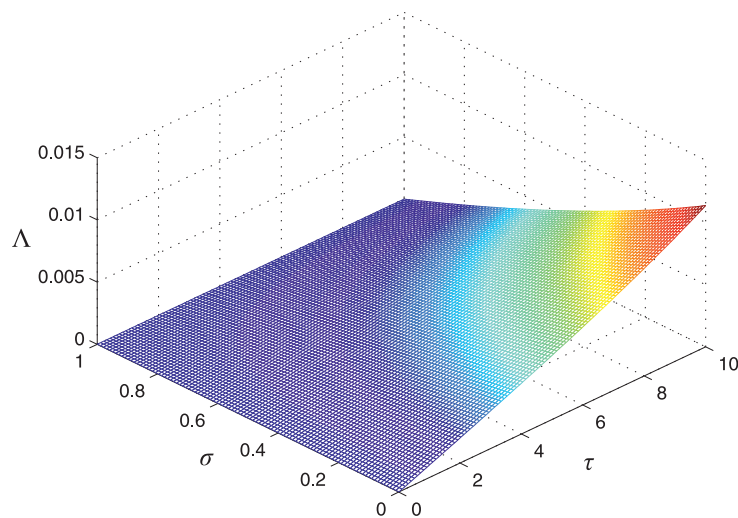


Рис. 3. График спектральной функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ как поверхности в пространстве параметров τ и σ в случае шаблона D2Q5 при $\tilde{\tau} = 10$

3. *Шаблоны D3Q6 и D3Q7.* В случае шаблона D3Q6 имеем коэффициенты $W_1 = \dots = W_6 = \frac{1}{6}$ и уравнение шестого порядка. В случае шаблона D3Q7 $W_1 = \sigma$, $W_2 = \dots = W_7 = \frac{1-\sigma}{6}$ и имеем уравнение седьмого порядка. Корни дисперсионных соотношений находились с использованием функции `roots()`. Отметим, что и в этом случае имеем ситуацию, аналогичную одномерному и двумерному случаям, когда значениями $E(\tau)$ можно пренебречь. На рис. 4 представлен график Λ , и ситуация тоже является аналогичной случаям шаблонов для меньших значений N .

В качестве результатов проведенного анализа устойчивости можно отметить следующее.

1. При всех рассмотренных значениях \mathbf{k} , σ и τ с учетом справедливости условия (28) значения $\text{Im}(\omega_j)$ являются неотрицательными и решения вида (31) ограничены при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, можно считать, что показана достаточность естественного с физической точки зрения условия устойчивости (28).

2. Максимальные значения функции Λ для случаев шаблонов типа $\text{DNQ}(2N+1)$ с параметрическими коэффициентами достигаются на границе $\sigma = 0$.

3. С позиции критерия устойчивости, выражаемого функцией Λ , нет особой разницы между случаями шаблонов типа $\text{DNQ}2N$ и $\text{DNQ}(2N+1)$ при $\sigma = 0$. В связи с чем введение дополнительной нулевой скорости в шаблоны типа $\text{DNQ}2N$ не влияет на устойчивость и не дает никаких

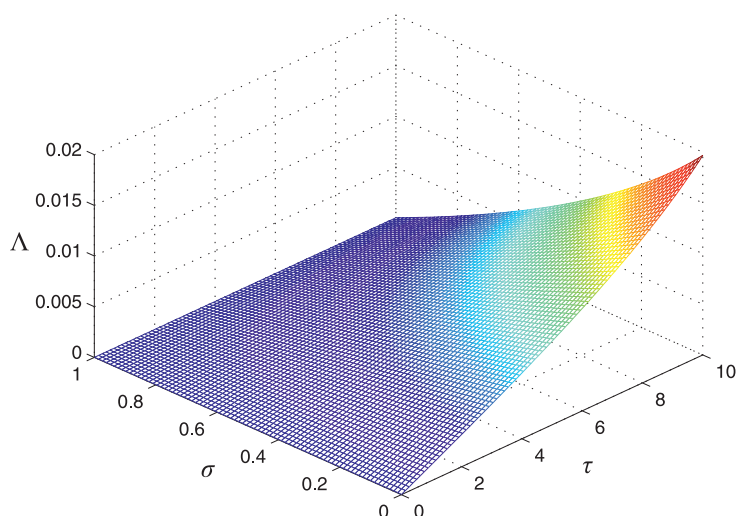


Рис. 4. График спектральной функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ как поверхности в пространстве параметров τ и σ в случае шаблона D3Q7 при $\tilde{\tau} = 10$

дополнительных условий. Но при этом следует отметить, что речь идет, во-первых, об устойчивости только по начальным условиям, а во-вторых, только о такой характеристике устойчивости, как функция Λ .

6. Анализ дисперсионных свойств решений

Поскольку система (30) является гиперболической, ее решения могут вести себя иначе, чем решения ЛУД (2). В частности, может иметь место дисперсия бегущих волн вида (31). Как известно [Уизем, 1977], решения (2) не обладают дисперсией. Таким образом, если рассматривать (30) как модель для линейных диффузионных процессов, описываемых посредством (2), наличие дисперсии следует считать фиктивным эффектом.

Основной характеристикой дисперсии является групповая скорость

$$\mathbf{c}_j = \nabla_{\mathbf{k}} \operatorname{Re}(\omega_j).$$

Если компоненты этих векторов являются константами, то волновые моды (31) не обладают дисперсией. Дисперсионные свойства исследуются только для случая, когда $\operatorname{Re}(\omega_j) \neq 0$. Без потери общности наличие дисперсии можно показать только для одной волновой моды.

Для случаев шаблонов D1Q2 и D1Q3 (при $\sigma = 0$) соответственно частоты имеют вид [Кривовичев, 2016]

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\tau} \pm \sqrt{4k^2 - \frac{1}{\tau^2}} \right),$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\tau} \pm \sqrt{4k^2 - \frac{1}{\tau^2}} \right), \quad \omega_3 = \frac{i}{\tau}.$$

Групповая скорость моды, отвечающей ω_1 , имеет вид

$$c_1 = \frac{d\operatorname{Re}(\omega_1)}{dk} = \frac{2\tau k}{\sqrt{4k^2\tau^2 - 1}}.$$

Как можно заметить, решение в виде (31) при ω_1 будет обладать дисперсией.

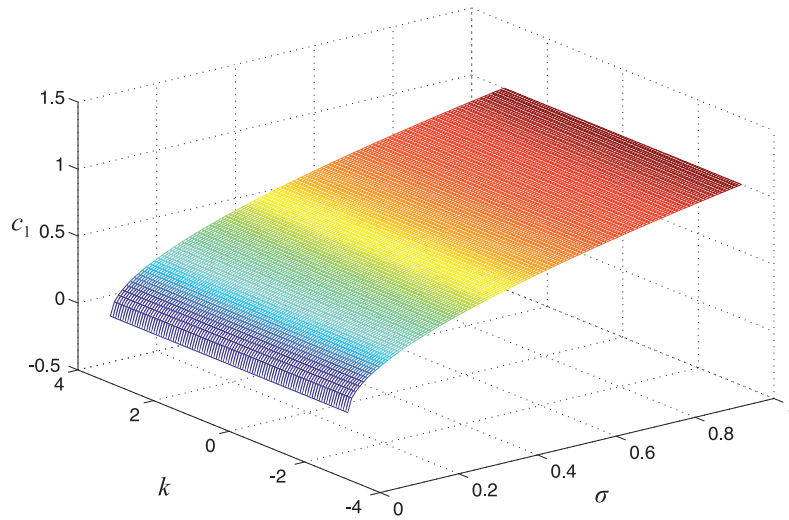


Рис. 5. График групповой скорости $c_1(\sigma, k)$ как поверхности в пространстве параметров σ и k в случае шаблона D1Q3 при $\tilde{\tau} = 0.001$

Для случая шаблона D1Q3 (при $\sigma \neq 0$) корни (34) имеют вид

$$\omega_j = \frac{A_j}{E_j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau \right)^{2/3} + \\ &\quad + 12\tau^2k^2 - 4 + 4i\sqrt[3]{-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau}, \\ A_2 &= - \left(-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau \right)^{2/3} - \\ &\quad - 12\tau^2k^2 + 4 + 8i\sqrt[3]{-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau} + \\ &\quad + i\sqrt{3} \left(-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau \right)^{2/3} - 12i\sqrt{3}\tau^2k^2 + 4i\sqrt{3}, \\ A_3 &= - \left(-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau \right)^{2/3} + \\ &\quad + 12\tau^2k^2 - 4 - 8i\sqrt[3]{-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau} + \\ &\quad + i\sqrt{3} \left(-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau \right)^{2/3} - 12i\sqrt{3}\tau^2k^2 + 4i\sqrt{3}, \\ E_1 &= 6\tau\sqrt[3]{-36i\tau^2k^2 + 8i + 108i\sigma\tau^2k^2 + 12kC\tau}, \\ E_2 &= E_3 = 2E_1, \\ C &= \sqrt{-12\tau^4k^4 + 3\tau^2k^2 + 54\sigma\tau^2k^2 - 12\sigma - 81\sigma^2\tau^2k^2}. \end{aligned}$$

Из-за громоздкости выражений (35) производные их вещественных частей по k исследовались численно при различных значениях τ и σ . Для того чтобы показать наличие дисперсии, здесь также можно рассмотреть случай только одного корня, в связи с чем рассмотрим корень ω_1 . На рис. 5 представлен график c_1 как функции σ и k при $\tau = 0.001$. На рис. 6 представлены графики c_1 как функции k при фиксированных значениях σ и τ . Как можно видеть из рис. 5 и рис. 6, волновая мода с $\omega = \omega_1$ обладает дисперсией.

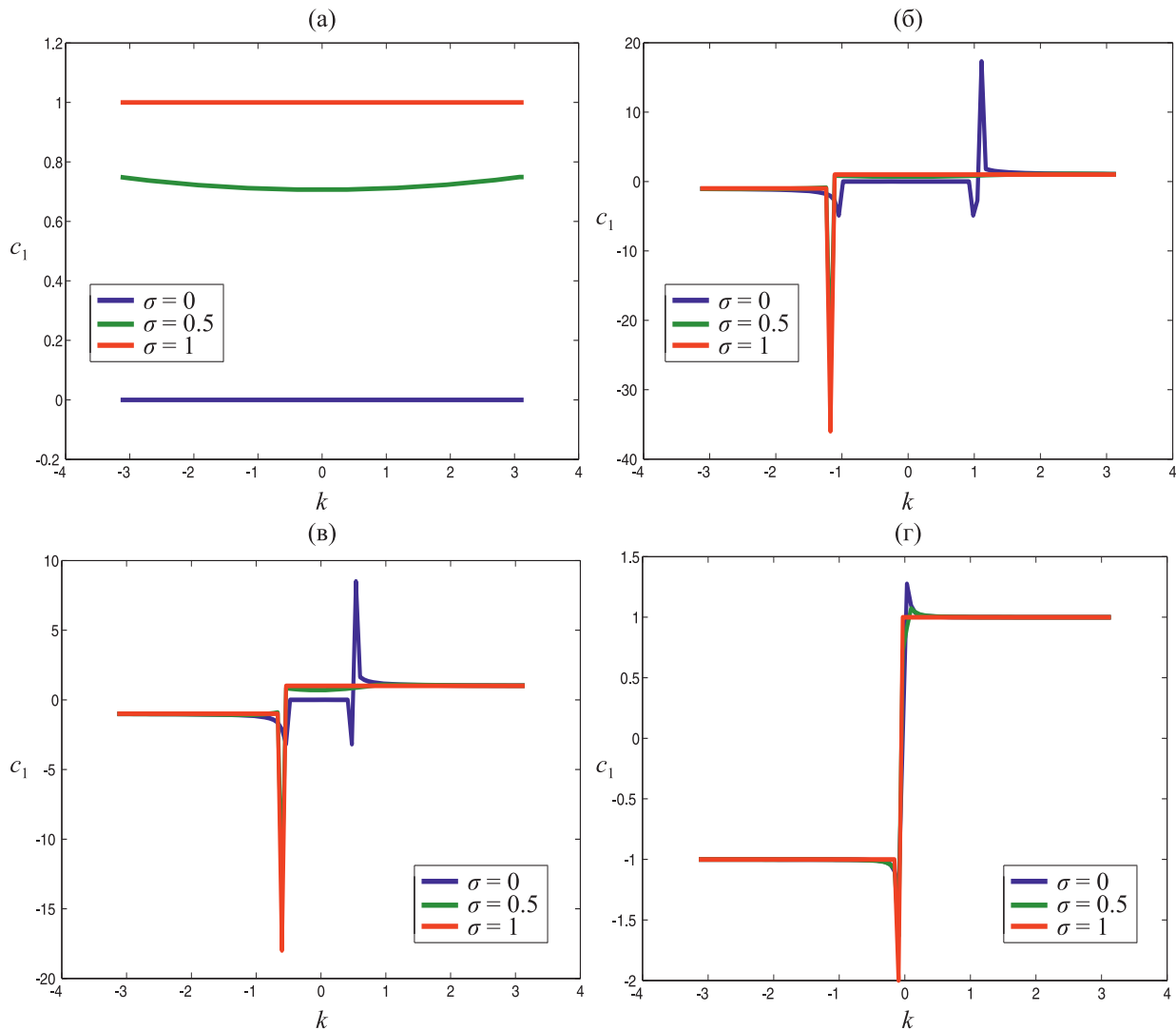


Рис. 6. Графики групповой скорости c_1 как функции волнового числа k в случае шаблона D1Q3 при фиксированных значениях параметров τ и σ : а) $\tau = 0.1$; б) $\tau = 0.5$; в) $\tau = 1$; г) $\tau = 10$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Для двумерного случая рассмотрим только ситуацию, когда $k_x = k_y = k$. Во-первых, наличие дисперсии достаточно показать только в этом случае, а во-вторых, при таком волновом векторе корни дисперсионных соотношений можно получить аналитически. В случае шаблона D2Q4 имеем 4 корня: $\omega_{1,2}$ имеют такой же вид, как для случая шаблона D1Q2, а два других корня имеют вид $\omega_{3,4} = k \pm \frac{i}{\tau}$. Таким образом, групповые скорости будут константами только для мод с частотами $\omega_{3,4}$. В случае шаблона D2Q5 корни $\omega_{1,2,3}$ являются такими же, как для случая шаблона D1Q3, а корни $\omega_{4,5}$ — такие же, как $\omega_{3,4}$ в случае шаблона D2Q4.

В трехмерном случае рассмотрим только волновые векторы с $k_x = k_y = k_z = k$. Для шаблона D3Q6 корни $\omega_{1,2}$ те же, что и для случая шаблона D1Q2, а $\omega_{3,4}$ те же, что и для шаблона D2Q4. Для шаблона D3Q7 ситуация аналогична двумерному случаю: $\omega_{1,2,3}$ имеют вид (35), другие четыре корня представляют собой те же, что и $\omega_{3,4}$ в случае D2Q4, но второй кратности.

Таким образом, в отличие от параболического ЛУД (2) решения гиперболической системы (30) будут обладать дисперсией. Наличие дисперсии может приводить к эффектам, не характерным для линейного диффузионного процесса. Поэтому, если рассматривать систему (1)

как его математическую модель, эти эффекты следует считать фиктивными и нефизическими. Но, как было показано, при выполнении естественного с физической точки зрения условия (28) мнимые части частот ω_j являются неотрицательными. В связи с этим эффекты, связанные с наличием дисперсии, могут играть важную роль только при $\text{Im}(\omega_j) = 0$. Если же $\text{Im}(\omega_j) > 0$, дисперсионные эффекты не будут преобладающими, поскольку в амплитуде (31) будет присутствовать множитель $\exp(-\text{Im}(\omega_j)t)$. Наличие такого множителя будет приводить к демпфированию высокочастотных колебаний, связанных с дисперсией, а сумма таких решений будет стремиться к нулю при $t \rightarrow +\infty$, как и решение ЛУД при $D > 0$.

7. Заключение

В работе рассмотрена система линейных гиперболических кинетических уравнений БГК-типа для моделирования линейных диффузионных процессов с помощью метода LBM. Система может рассматриваться как альтернативная математическая модель диффузионного процесса и как база для построения разностных схем. Рассмотрены случаи параметрических коэффициентов. С использованием метода Чепмена–Энскога показано, что система может быть сведена к ЛУД, и получено выражение для коэффициента диффузии. Показано, что решения, получаемые по LB-уравнениям, обладают численной диффузией. Посредством анализа волновых мод показано, что решения системы являются устойчивыми в широком диапазоне входных параметров. Показан достаточный характер физически допустимого условия положительности времени релаксации как условия устойчивости. Посредством аналитических и численных исследований показано, что решения в виде волновых мод обладают дисперсией, не характерной для решений ЛУД.

Разностные схемы для построенной системы, помимо моделирования диффузии, могут быть использованы при решении стационарных задач методом установления и в методе расщепления для расчетов течений вязкой жидкости.

Список литературы (References)

- Бикулов Д. А., Сенин Д. С., Демин Д. С., Дмитриев А. В., Грачев Н. Е. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 221–228.
- Bikulov D. A., Senin D. S., Demin D. S., Dmitriev A. V., Grachev N. E. Realizatsiia metoda reshetochnykh uravnenii Boltsmana dlia raschetov na GPU-clustere [Implementation of the lattice Boltzmann method on GPU clusters] // Numerical Methods and Programming. — 2012. — Vol. 13, No. 1. — P. 221–228 (in Russian).*
- Бикулов Д. А., Сенин Д. С. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 370–374.
- Bikulov D. A., Senin D. S. Realizatsiia metoda reshetochnykh uravnenii Boltsmana bez khranimykh znachenii funktsii raspreseleniia dlia GPU [Implementation of the lattice Boltzmann method without stored distribution functions on GPU] // Numerical Methods and Programming. — 2013. — Vol. 14. — P. 370–374 (in Russian).*
- Бикулов Д. А. Эффективная реализация метода решеточных уравнений Больцмана для гибридных суперкомпьютерных систем // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 205–214.
- Bikulov D. A. Effektivnaya realizatsiia metoda reshetochnykh uravnenii Boltsmana dlia gibridnykh superkompyuternykh sistem [An efficient implementation of the lattice Boltzmann method for hybrid supercomputers] // Numerical Methods and Programming. — 2015. — Vol. 16, No. 2. — P. 205–214 (in Russian).*
- Гаврилюк С. Л., Макаренко Н. И., Сухинин С. В. Волны в сплошных средах. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011. — 114 с.
- Gavriluk S. L., Makarenko N. I., Sukhinin S. V. Volny v sploshnykh sredah [Waves in continuous media]. — Novosibirsk, Novosibirsk State University Publishing, 2011. — 114 p. (in Russian).*

- Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Сенин Д. С. Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 227–231.
Grachev N. E., Dmitriev A. V., Senin D. S. Modelirovanie dinamiki gaza pri pomoschi reshetochnogo metoda Boltsmana [Simulation of gas dynamics with the lattice Boltzmann method] // Numerical Methods and Programming. — 2011. — Vol. 12, No. 1. — P. 227–231 (in Russian).
- Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1794–1798.
Eystigneev N. M., Magnitskii N. A. Nelineinaia dinamika v nachal'no-kraevoi zadache techeniia zhidkosti s ustupa dlia gidrodinamicheskogo priblizheniia uravneniia Boltsmana [Nonlinear dynamics in the initial-boundary value problem on the fluid flow from a ledge for the hydrodynamic approximation to the Boltzmann equations] // Differential Equations. — 2010. — Vol. 46, No. 12. — P. 1794–1798 (in Russian).
- Кривовичев Г. В. Модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 365–381.
Krivovichev G. V. Modifitsirovannyi variant metoda reshetochnyh uravnenii Boltsmana dlia rascheta techenii viazkoi neshzimaemoi zhidkosti [Modification of the lattice Boltzmann method for the computations of viscid incompressible fluid flows] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 3. — P. 365–381 (in Russian).
- Кривовичев Г. В. Исследование устойчивости разностных схем метода решеточных уравнений Больцмана для моделирования диффузии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 485–500.
Krivovichev G. V. Issledovanie ustoichivosti raznostnyh shem metoda reshetochnyh uravnenii Boltsmana dlia modelirovaniia diffuzii [Stability investigation of finite-difference schemes of lattice Boltzmann method for diffusion modelling] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 3. — P. 485–500 (in Russian).
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2012. — 656 с.
Kulikovskii A. G., Pogorelove N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislenного resheniia giperbolicheskikh sistem uravnenii [Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems]. — Moscow: Fizmatlit, 2012 (in Russian).
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 480 с.
Samarskii A. A., Vabischevich P. N. Chislennyye metody resheniia obratnyh zadach matematicheskoi fiziki [Numerical methods of the solution of inverse problems of mathematical physics]. — Moscow: URSS, 2004 (in Russian).
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
Witham G. B. Linear and nonlinear waves. USA, New York, John Wiley and Sons, 1974. (Russ. ed.: *Witham G.* Lineinye i nelineinye volny. — Moscow: Nauka, 1977).
- Ancona T. G. Fully-Lagrangian and lattice-Boltzmann methods for solving systems of conservation equations // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 115. — P. 107–120.
- Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. — 1954. — Vol. 94, No. 3. — P. 511–525.
- Blaak R., Sloot P. M. A. Lattice dependence for reaction–diffusion in lattice Boltzmann modelling // Computer Physics Communications. — 2000. — Vol. 129. — P. 256–266.
- Chai Z., Shi B. A novel lattice Boltzmann model for the Poisson equation // Applied Mathematical Modelling. — Vol. 32. — P. 2050–2058.
- Chen S., Tolke J., Geller S., Krafczyk M. Lattice Boltzmann model for incompressible axisymmetric flows // Physical Review E. — Vol. 78. — P. 046703-1–046703-8.
- He X., Luo L. S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. — 1997. — Vol. 56, No. 6. — P. 6811–6817.

- Hirabayashi M., Chan Y., Ohashi H.* The lattice BGK model for the Poisson equation // *JSME International Journal Ser. B.* — 2001. — Vol. 44, No. 1. — P. 45–52.
- Huber C., Parmigiani A., Chopard B., Manga M., Bachmann O.* Lattice Boltzmann model for melting with natural convection // *International Journal of Heat and Fluid Flow.* — 2008. — Vol. 29. — P. 1469–1480.
- Junk M., Yang Z.* L_2 convergence of the lattice Boltzmann method for one-dimensional convection-diffusion-reaction equations // *Communications in Computational Physics.* — 2015. — Vol. 17, No. 5. — P. 1225–1245.
- Krivovichev G. V.* Numerical stability analysis of lattice Boltzmann equations for linear diffusion // *Applied Mathematics and Information Sciences.* — 2015. — Vol. 9, No. 4. — P. 1687–1692.
- Kupershtokh A. L.* A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases // *Computers and Mathematics with Applications.* — 2011. — Vol. 61. — P. 3537–3548.
- Nourgaliev R. R., Dinh T. N., Theofanous T. G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *International Journal of Multiphase Flow.* — 2003. — Vol. 29. — P. 117–169.
- Rheinlander M.* Stability and multiscale analysis of an advective lattice Boltzmann scheme // *Progress in Computational Fluid Dynamics.* — 2008. — Vol. 8, No. 1–4. — P. 56–68.
- Shu C., Niu X. D., Chew Y. T., Cai Q. D.* A fractional step lattice Boltzmann method for simulating high Reynolds number flows // *Mathematics and Computers in Simulation.* — 2006. — Vol. 72. — P. 201–205.
- van der Sman R., G. M., Ernst M. H.* Diffusion lattice Boltzmann scheme on a orthorhombic lattice // *Journal of Statistical Physics.* — 1999. — Vol. 94, No. 1–2. — P. 203–217.
- Sofonea V., Sekerka R. F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // *Journal of Computational Physics.* — 2003. — Vol. 184. — P. 422–434.
- Suga S.* An accurate multi-level finite difference scheme for 1D diffusion equations derived from the lattice Boltzmann method // *Journal of Statistical Physics.* — 2010. — Vol. 140. — P. 494–503.
- Wagner A. J., Strang K.* Fluctuating lattice Boltzmann method for the diffusion equation // *Physical Review E.* — 2016. — Vol. 94. — P. 033302-1–033302-15.
- Wang H., Yan G., Yan B.* Lattice Boltzmann model based on the rebuilding — divergency method for the Laplace and the Poisson equations // *Journal of Scientific Computing.* — 2011. — Vol. 46. — P. 470–484.
- Wang Y., Shu C., Teo C. J.* A fractional step axisymmetric lattice Boltzmann flux solver for incompressible swirling and rotating flows // *Computers and Fluids.* — 2014. — Vol. 96. — P. 204–214.
- Wolf-Gladrow D. A.* A lattice Boltzmann equation for diffusion // *Journal of Statistical Physics.* — 1995. — Vol. 79, No. 5–6. — P. 1023–1032.
- Wolf-Gladrow D. A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 311 p.
- Xia M.* Pore-scale simulation of miscible displacement in porous media using the lattice Boltzmann method // *Computers and Geosciences.* — 2016. — Vol. 88. — P. 30–40.
- Zhang J., Yan G., Dong Y.* A new lattice Boltzmann model for the Laplace equation // *Applied Mathematics and Computation.* — 2009. — Vol. 215. — P. 539–547.