КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 Т. 9 № 6 С. 905–918
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-6-905-918

Ки&М

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОСНОВЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

УДК: 519.813.7, 519.237

Четырехфакторный вычислительный эксперимент для задачи случайного блуждания на двумерной решетке

О. В. Максимова[1,a], В. И. Григорьев[2,b]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20

[2] МГУ им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Россия, 119991, г. Москва, ул. Ленинские горы, 1, стр. 2

E-mail: [a] omaksimova@hse.ru, [b] vadim.grig314@gmail.com

Получено 04.08.2017, после доработки — 09.11.2017.
Принято к публикации 16.11.2017.

Случайный поиск в настоящее время стал распространенным и эффективным средством решения сложных задач оптимизации и адаптации. В работе рассматривается задача о средней длительности случайного поиска одним объектом другого в зависимости от различных факторов на квадратной решетке. Решение поставленной задачи было реализовано при помощи проведения полного эксперимента с 4 факторами и ортогональным планом в 54 строки. В рамках каждой строки моделировались случайные блуждания двух точек с заданными начальными условиями и правила перехода, затем замерялась продолжительность поиска одного объекта другим. В результате построена регрессионная модель, отражающая среднюю длительность случайного поиска объекта в зависимости от четырех рассматриваемых факторов, задающих начальные положения двух объектов, условия их передвижения и обнаружения. Среди рассмотренных факторов, влияющих на среднее время поиска, определены наиболее значимые. По построенной модели проведена интерпретация в задаче случайного поиска объекта. Важным результатом работы стало то, что с помощью модели выявлено качественное и количественное влияние первоначальных позиций объектов, размера решетки и правил перемещения на среднее время продолжительности поиска. Показано, что начальное соседство объектов на решетке не гарантирует быстрый поиск, если каждый из них передвигается. Помимо этого, количественно оценено, во сколько раз может затянуться или сократиться среднее время поиска объекта при увеличении скорости ищущего объекта на 1 ед., а также при увеличении размера поля на 1 ед., при различных начальных положениях двух объектов. Выявлен экспоненциальный характер роста числа шагов поиска объекта при увеличении размера решетки при остальных фиксированных факторах. Найдены условия наиболее большого увеличения средней продолжительности поиска: максимальная удаленность объектов в сочетании с неподвижностью одного из них при изменении размеров поля на 1 ед. (т. е., к примеру, с 4 × 4 на 5 × 5) может увеличить в среднем продолжительность поиска в $e^{1.69} \approx 5.42$. Поставленная в работе задача может быть актуальна с точки зрения применения как в пограноментрике для обеспечения безопасности государства, так и, к примеру, в теории массового обслуживания.

Ключевые слова: математическое моделирование, случайное блуждание, планирование эксперимента, случайный поиск

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2017 VOL. 9 NO. 6 P. 905–918
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-6-905-918

NUMERICAL METHODS AND THE BASIS FOR THEIR APPLICATION

UDC: 519.813.7, 519.237

Four-factor computing experiment for the random walk on a two-dimensional square field

O. V. Maksimova[1,a], V. I. Grigoryev[2,b]

[1] National Research University «HSE»,
Myasnitskaya st. 20, Moscow, 101000, Russia
[2] Moscow State University, Faculty of Physics,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

E-mail: [a] omaksimova@hse.ru, [b] vadim.grig314@gmail.com

Received 04.08.2017, after completion — 09.11.2017.
Accepted for publication 16.11.2017.

Nowadays the random search became a widespread and effective tool for solving different complex optimization and adaptation problems. In this work, the problem of an average duration of a random search for one object by another is regarded, depending on various factors on a square field. The problem solution was carried out by holding total experiment with 4 factors and orthogonal plan with 54 lines. Within each line, the initial conditions and the cellular automaton transition rules were simulated and the duration of the search for one object by another was measured. As a result, the regression model of average duration of a random search for an object depending on the four factors considered, specifying the initial positions of two objects, the conditions of their movement and detection is constructed. The most significant factors among the factors considered in the work that determine the average search time are determined. An interpretation is carried out in the problem of random search for an object from the constructed model.The important result of the work is that the qualitative and quantitative influence of initial positions of objects, the size of the lattice and the transition rules on the average duration of search is revealed by means of model obtained. It is shown that the initial neighborhood of objects on the lattice does not guarantee a quick search, if each of them moves. In addition, it is quantitatively estimated how many times the average time of searching for an object can increase or decrease with increasing the speed of the searching object by 1 unit, and also with increasing the field size by 1 unit, with different initial positions of the two objects. The exponential nature of the growth in the number of steps for searching for an object with an increase in the lattice size for other fixed factors is revealed. The conditions for the greatest increase in the average search duration are found: the maximum distance of objects in combination with the immobility of one of them when the field size is changed by 1 unit. (that is, for example, with 4 × 4 at 5 × 5) can increase the average search duration in $e^{1.69} \approx 5.42$. The task presented in the work may be relevant from the point of view of application both in the landmark for ensuring the security of the state, and, for example, in the theory of mass service.

Keywords: mathematical modelling, random walk, experiment planning, random search

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 905–918 (Russian).

1. Введение и цель исследования

Случайное блуждание, как одномерное, так и его многомерное обобщение, имеет широкое прикладное значение: для приближенного описания процессов диффузии, в теории массового обслуживания и в финансовых задачах [Сосинский, 2000; Карпенко, 2014]. В теории вероятностей задача о случайном блуждании точки на прямой (или плоскости) известна под названием «На краю утеса» или «задача о пьянице». В изначальной формулировке в одномерном случае она следующая:

– точка (частица) произвольно движется по точкам вида k (k — целое) оси OX;
– движение начинается в момент $t = 0$, и положение частицы меняется только в дискретные моменты времени 0, 1, 2, …;
– на каждом шаге координата частицы увеличивается или уменьшается на величину 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, независимо от предшествующего движения.

При двумерном случайном блуждании частица перемещается на единичный шаг в одном из четырех направлений параллельно заданным осям. Таким образом, каждое положение имеет четыре соседних.

Со случайным блужданием связывают задачи поиска вероятности возврата в первоначальное положение за заданное время, выхода из определенных границ отрезка (решетки), а также среднее и медианное время возврата частицы и др. Как при одномерном, так и при двумерном случайном блуждании частица с вероятностью 1 рано или поздно возвратится в свое первоначальное положение [Pólya, 1921]. При этом среднее смещение в одномерном случае зависит от числа шагов (времени), и случайное блуждание оказывается сильно негауссовским [Обухов, 1984]. Для двумерной задачи ситуация со средним смещением оказывается не ясна [Marinari et al., 1983].

Также в литературе рассматривается вопрос о случайном блуждании двух частиц, когда их передвижения происходят одновременно, причем единичными шагами на решетке. В зависимости от четности расстояния между ними в первоначальный момент времени (которое определяется наименьшим числом шагов, ведущих из одного положения в другое) две частицы наверняка будут занимать бесконечное число раз либо соседние положения, либо одно и то же положение [Pólya, 1921].

Непроанализированным остается вопрос для двумерной задачи как о среднем смещении одной частицы в зависимости от числа шагов, так и о времени достижения того или иного положения, так же как и не исследован вопрос о смещении и времени блуждания двух частиц до встречи. *Целью работы* служит исследование длительности случайного блуждания двух частиц до встречи на конечной двумерной решетке в зависимости от факторов, которые могут на эту длительность повлиять в среднем. Случайные блуждания двух частиц многократно моделировались в условиях проведенного многофакторного эксперимента, при этом в настоящем исследовании расширены возможности движения на решетке: частицы могут перемещаться не одновременно, за один шаг, а последовательно, также могут передвигаться не в четырех направлениях параллельно заданным осям, как исследовалось в работах других авторов, а с учетом «диагональных» перемещений. Таким образом, поставлена и решена задача в новых, в отличие от ранее рассматриваемых в литературе, условиях.

В практическом плане эта задача случайного блуждания может быть рассмотрена как задача случайного поиска и переформулирована в терминах поиска судна-нарушителя в заданном квадранте сторожевым кораблем или может быть переведена в игровую плоскость для наглядности дальнейшего описания и интерпретации. Случайный поиск имеет высокую эффективность: практические задачи, которые связаны с ним, приобретают важное значение, их решение без элементов случайности практически невозможно.

2. Построение и описание модели игры

В игре участвуют двое, назовем их по именам известных героев мультфильма «Том и Джерри», созданных американскими аниматорами Уильямом Ханной и Джозефом Барберой. Для наглядности рассмотрим игру на квадратной решетке (игровое поле) размерами $n \times n$. Первоначально каждый игрок располагается в одной из ее ячеек и не обладает информацией о положении своего соперника. За каждый ход игры Том и/или Джерри перемещаются по определенному правилу случайным образом в одну из клеток. Том хочет поймать (найти) Джерри, но ни Джерри, ни Том не видят друг друга до момента встречи. Когда оба героя займут одну и ту же ячейку игрового поля, считаем, что кот поймал мышку, и игра заканчивается.

Если назвать именами героев этой игры корабли противников, то можно сформулировать также задачу случайного поиска с условиями:

– местоположение каждого корабля не известно другому до момента обнаружения в условиях, например, крайней ограниченности видимости из-за густого тумана; каждый корабль не обладает информацией о передвижениях другого, но обладает свободой выбора своего передвижения,
– поиск заканчивается, когда сторожевой корабль «Том» нашел судно-нарушитель «Джерри».

Задачи этого типа относятся к погранометрическим задачам в рамках классификации [Шумов, 2012].

Опишем эту игру и ее правила на конечной квадратной решетке размером $n \times n$. Будем анализировать влияние различных начальных положений героев и правил их перемещения на время одной такой игры (число шагов, которое не меньше числа перемещений каждого из героев, потребного для поимки «Джерри»).

Первый этап. Основные определения и допущения в игре.

Рассмотрим поле игры, представленное двумерной квадратной решеткой (рис. 1).

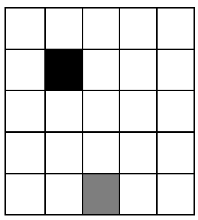
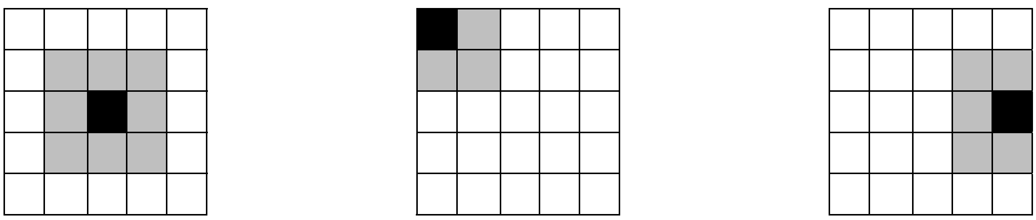


Рис. 1. Поле игры, представленное квадратной решеткой 5 × 5

Каждая ячейка этой решетки задает возможное положение Тома и/или Джерри. На рис. 1 положения игроков представлены черной и серой ячейками соответственно. Область возможных ходов определяется размерами решетки: чем больше этот размер, тем шире область различных ходов игроков.



(а) (б) (в)

Рис. 2. Положение игрока на решетке: а) в *центральной* (черной) ячейке; б) в *угловой* ячейке; в) в *граничной* ячейке. Серым цветом обозначены соседние ячейки

В зависимости от положения на решетке у каждого игрока может быть различное число возможностей для перемещения в соседнюю клетку. Назовем число клеток, соседствующих с той, где располагается игрок, *числом степеней свободы* игрока. В зависимости от положения игрока на решетке число степеней свободы может принимать значения 8, 5, 3. Выделим *три типа* ячеек:

– если игрок имеет максимальное число степеней свободы 8, то соответствующую ячейку назовем *центральной* (рис. 2, *а*);
– если игрок имеет минимальное число степеней свободы 3, то соответствующую ячейку назовем *угловой* (рис. 2, *б*);
– если игрок содержит среднее число степеней свободы 5, то соответствующую ячейку назовем *граничной* (рис. 2, *в*).

За каждый ход игры может происходить (или не происходить) перемещение каждого игрока. Смена положения игрока отображается изменением положения соответствующей черной ячейки в решетке.

Второй этап. Начальные условия игры.

Пусть первоначально Том и Джерри расположены в различных ячейках решетки.

Третий этап. Правило переходов.

Установим ***правило перехода игроков***: каждый из двух игроков за одну итерацию (за один ход) может оставаться на месте или занять случайным образом позицию любой соседней клетки из окрестности (рис. 2, окрестности выделены серым цветом).

Это условие позволяет отклониться от постоянного передвижения героев, что существенно расширяет вариативность течения игры.

Четвертый этап. Реализация игры.

Как отмечалось в § 1, когда два игрока окажутся в одной ячейке, игра заканчивается, т. е. Том поймает Джерри. Нас интересует число шагов, которое будет характеризовать длительность одной игры.

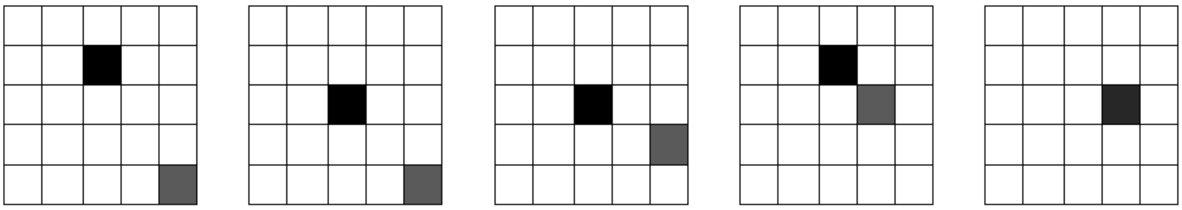


Рис. 3. Реализация игры (в черной ячейке располагается Том, в серой — Джерри)

На рис. 3 представлен пример случайного блуждания на решетке 5 × 5 до попадания игроков в одну ячейку (черно-серая), то есть до поимки Томом Джерри. Как видно, после 1-го и 4-го переходов Джерри, а после 2-го перехода Том не сменили положение. Для заданного начального положения игроков и размеров решетки попадание в одну ячейку произошло за четыре перехода, т. е. Том поймал Джерри за 4 хода.

3. Исследование модели игры при помощи планирования многофакторного эксперимента

Исследуем факторы, влияющие на длительность игры. Эти факторы задают начальные условия положения игроков и размеры решетки. Но различных начальных условий и размеров поля можно задать много, поэтому с целью сокращения их количества применим планирование эксперимента [Fisher, 1951]. Опишем его этапы реализации и проанализируем случайное блуждание при этих условиях.

Допущения и определения

Допущение 1. Для моделирования введем понятие расстояния между Томом и Джерри как расстояние Чебышёва[1] между соответствующими ячейками. Пусть имеются две различные ячейки, к примеру, как на рис. 1. Расстояние Чебышёва между ними будет равно $r = 3$. В игре это расстояние можно интерпретировать как минимальное число ходов Тома при условии, что Джерри остается на месте, а Том на каждом этапе делает ход в соседнюю ячейку.

Определение. Введем понятие *скорости игроков* на каждом переходе:

– если игрок не изменил положения, то будем считать его скорость $\vartheta = 0$ на этом этапе;
– если игрок сделал шаг в одну из окрестных клеток, то будем считать скорость соответствующего игрока $\vartheta = 1$ на этом этапе;
– если игрок сделал r шагов за единицу времени, то будем считать скорость соответствующего игрока $\vartheta = r$ на этом этапе, где r — расстояние между ячейками, определенное в допущении 1.

Допущение 2. Будем полагать, что *Том всегда движется*, причем за каждый ход его скорость передвижения $\vartheta_2 = 1$. Если для обоих игроков в каждом этапе игры будет $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, то мы придем к ситуации бесконечной длительности игры ввиду отсутствия движения игроков.

Первый этап. Выбор отклика.

В качестве отклика рассмотрим среднюю продолжительность игры, т. е. среднее число ходов Тома до поимки Джерри.

Второй этап. Выбор факторов.

Существует множество вариантов выбора сочетаний факторов, отвечающих за разнообразие начального положения двух ячеек и их перемещений. После проведения предварительного исследования было принято решение работать со следующими факторами и уровнями:

– X_1 — размер решетки n: 5 × 5; 11 × 11; 17 × 17;
– X_2 — положение Джерри на решетке: центральная клетка, граничная клетка, угловая клетка;
– X_3 — скорость Джерри: $\vartheta_1 = 0$;
– X_4 — начальное расстояние между игроками: герои соседствуют $(r = 1)$; герои на максимальном удалении друг от друга $(r = n - 1)$; герои на половине максимального удаления друг от друга $\left(r = \left[\frac{1}{2} n \right] \right)$.

Третий этап. Выбор уровней факторов.

Предварительный анализ влияния каждого фактора показал, что придется работать с нелинейной моделью. Так как не предполагалось выходить за рамки квадратичного полинома, то для такого рода моделей достаточно двух или трех уровней факторов, выбор которых осуществлялся после проведенной исследовательской работы. В таблице 1 представлены результаты выборов уровней факторов.

[1] Расстояние Чебышёва между n-мерными числовыми векторами называется максимумом модуля разности компонент этих векторов. Расстояние Чебышёва между двумя клетками решетки (шахматной доски) равно минимальному количеству ходов, которое необходимо королю, чтобы перейти из одной клетки в другую.

Таблица 1. Факторы и их уровни

Факторы	X_1	X_2	X_3	X_4
Нижний «–», $X_i = -1$	5	Серединная центральная ячейка	0	Герои соседствуют, $r = 1$
Средний «0», $X_i = 0$	11	Серединная граничная ячейка		Герои на половине максимального удаления друг от друга, $r = \left[\frac{1}{2}n\right]$
Верхний «+», $X_i = +1$	17	Угловая ячейка	1	Герои на максимальном удалении друг от друга, $r = n - 1$

<u>*Четвертый этап*</u>. Выбор матрицы планирования.

На этапе предварительного исследования было ясно, что модель не будет линейной и потребуется включение степеней и/или парных взаимодействий. Поэтому было решено провести полный факторный эксперимент, ортогональный план для реализации которого содержал $N = 54$ строки и 5 столбцов (4 фактора). В полном факторном эксперименте реализуются сочетания всех введенных уровней факторов, что дает возможность независимо оценить влияние как каждого фактора, так и каждого их парного взаимодействия.

<u>*Пятый этап*</u>. Эксперимент.

План включает моделирование с $l = 1000$ параллельными опытами в каждой строке. Каждый опыт, соответствующий строке плана, несет информацию об отклике. При этом уверенность в надежности изучаемых эффектов могут дать параллельные опыты — они позволяют оценить ошибку воспроизводимости там, где есть опасность иметь ошибку опыта.

Для проведения имитационного моделирования была разработана программа на языке Python. Моделирование тысячи опытов занимало в зависимости от начальных условий от сотых долей секунды до нескольких десятков минут. Последующий анализ результатов проводился в пакете STATISTICA 7.0. В ходе каждого проводимого параллельного опыта оценено время игры (число ходов), за которое Том поймает Джерри.

В каждой строке плана рассчитана средняя продолжительность игры и по критерию Кохрена проверена однородность дисперсий:

а) уровень значимости $\alpha = 0.01$;

б) проверяется основная гипотеза H_0 — дисперсии однородны, против альтернативной H_1 — дисперсии неоднородны;

в) статистика Кохрена $K = \dfrac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_N^2}$.

Получилось, что на заданном уровне значимости $K_{расч} = 0.21$ существенно больше $K_{крит}(l - 1 = 999; N = 54) = 0.03$, где l — число параллельных опытов в одной строке, N — число строк плана; что, в свою очередь, говорит о принятии решения в пользу альтернативной гипотезы о неоднородности дисперсий.

По итогам подтвержденной неоднородности на выбранном уровне значимости и построенным скошенным гистограммам откликов в каждой строке плана было принято решение рассматривать логарифмы продолжительностей согласований, для которых подтвердилась однородность дисперсий на уровне $\alpha = 0.01$ по критерию Кохрена $K_{расч} = 0.02 < K_{крит} = 0.03$ [Fisher, 1951]:

Шестой этап. Расчеты и уравнение.

Предварительно по методу медианных размахов и числу выделившихся точек в регрессионную модель целесообразно включить следующие факторы: размер решетки X_1, расстояние между игроками X_4 и парные взаимодействия X_1X_4, X_2X_4 [Адлер и др., 1976]. Применение формулы для расчета коэффициентов в МНК

$$B = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} \cdot X^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Ln}\, Y,$$

где B — столбец коэффициентов, Ln Y — столбец усредненных откликов, X — матрица системы соответствующих нормальных уравнений, и пошагового включения переменных подтвердило включение всех отобранных на этапе предварительного анализа факторов, и была получена следующая регрессионная модель со значимыми коэффициентами (на уровне $\alpha = 0.01$ по критерию Стьюдента):

$$\mathrm{Ln}\, Y = 3.15 + 1.07\, X_1 + 1.20\, X_4 + 0.62\, X_1X_4 + 0.31\, X_2X_4 - 0.32\, X_3X_4. \tag{1}$$

Матрица плана ортогональна ввиду проводимого полного факторного эксперимента, поэтому мы можем напрямую интерпретировать коэффициенты модели. Модель (1) адекватна на уровне значимости $\alpha = 0.01$ согласно критерию Фишера, а показатели детерминации достаточно высоки, что также говорит о высоком качестве модели (1): $R^2 = 0.83, R^2_{adj} = 0.81$ [Fisher, 1951].

Седьмой этап. Результаты.

1. Наиболее наглядна в уравнении (1) связь с фактором X_1: увеличение поля игры (размеров решетки) в среднем затягивает процесс встречи героев при остальных равных условиях.

2. График полученной модели (1) задается в пятимерном пространстве. Чтобы изучить ее более подробно и провести интерпретацию, рассмотрим сечения различных уровней. Начнем с уровней фактора X_4, так как при каждом фиксированном уровне мы будем получать линейные модели. Наиболее важными для интерпретации служат верхний и нижний уровни фактора X_4 удаленности героев; средний же уровень этого фактора подтверждает уже отмеченную связь с фактором X_1.

Таким образом, исследуем первоначально, *как влияет начальная удаленность героев на оптимум продолжительности игры.*

2.А. Зафиксируем фактор X_4 на верхнем уровне:

$$X_4 = +1; \quad \mathrm{Ln}\, Y = 4.35 + 1.69\, X_1 + 0.31\, X_2 - 0.32\, X_3. \tag{1.1}$$

Рассмотрим различные уровни откликов с учетом того, что Ln Y в эксперименте варьируется в диапазоне от 1 до 7. Ввиду того что модель (1.1) линейная, нетрудно найти градиент $\mathrm{Grad}_1 = \{1.69; 0.31; -0.32\}$, а затем проанализировать сочетания уровней факторов для наибольшего возрастания Ln Y, а значит и Y. Любой набор из трех координат, пропорциональный полученному Grad_1, также будет принадлежать градиенту. Остается подобрать удобные для интерпретации значения уровней факторов, используя графу «Шаги», как показано в таблице 2 (для удобства поиска интерпретируемых уровней факторов коэффициенты и координаты градиента в таблице взяты с округлением до десятых).

Из последней строки таблицы 2 заключаем, что при заданных условиях рост числа ходов в игре будет наблюдаться, если факторы будут принимать следующие значения:

– размер решетки равен 33;
– Джерри занимает позицию угловой ячейки;
– скорость Джерри $\vartheta_1 = 0$, т. е. Джерри покоится в течение всей игры.

В рассматриваемой игре «Том и Джерри» это можно интерпретировать следующим образом: если первоначально герои максимально удалены, то процесс поимки Томом Джерри будет затягиваться, если Джерри будет находиться в углу и не двигаться.

Также модель (1.1) показывает частные случаи при изменении одного фактора:

– увеличение X_3 на 1 ед. влечет в среднем уменьшение отклика Y в $e^{0.32} \approx 1.38$;

– увеличение X_1 на 1 ед. влечет в среднем увеличение отклика Y в $e^{1.69} \approx 5.42$.

Таблица 2. Поиск градиента модели (1.1) и сочетания уровней факторов, $X_4 = +1$

	X_1	X_2	X_3
Основной уровень	11	Джерри в серединной из граничных ячеек	нет
Интервал варьирования	2	2	2
Нижний уровень	5	Джерри в серединной из центральных ячеек	$\vartheta_1 = 0$
Верхний уровень	17	Джерри в угловой ячейке	$\vartheta_1 = 1$
Коэффициенты модели B_j при соответствующем X_j	1.7	0.3	–0.3
Grad_{11}	3.4	0.6	–0.6
Шаги	1.1	0.2	–0.2
Опыт с наиб. значением	5.6	1	–1
Итоговые значения	**33**	**Джерри в угловой ячейке**	$\boldsymbol{\vartheta_1 = 0}$

Экстраполируя эти результаты за пределы области эксперимента, получаем, что *при максимальном удалении героев*:

– *рост скорости Джерри на 1 ед. в среднем уменьшает число ходов в игре в* $e^{0.32} \approx 1.38$ *раза;*

– *увеличение размера решетки лишь на 1 ед., что соответствует добавлению на решетке* $2n+1$ *ячейки по отношению к имеющимся* n^2 *ячейкам, увеличивает число ходов игры в среднем в* $e^{1.69} \approx 5.42$ *раза.*

2.Б. Зафиксируем фактор X_4 на нижнем уровне:

$$X_4 = -1;\quad \mathrm{Ln}\, Y = 1.95 + 0.45\, X_1 - 0.31\, X_2 + 0.32\, X_3. \tag{1.2}$$

Аналогично, как и в п. 2.А, для Ln Y получаем линейную модель, для которой, так же как и для модели (1.1), несложно найти направления роста числа ходов $\mathrm{Grad}_2 = \{0.45; -0.31; 0.32\}$ и соответствующие интерпретируемые значения уровней факторов (таблица 3).

Из последней строки таблицы 3 заключаем, что при заданных условиях, рост числа ходов в игре будет наблюдаться, если факторы будут принимать следующие значения:

– размер решетки равен 21;

– Джерри занимает позицию серединной центральной ячейки;

– $\vartheta_1 = 1$.

В рассматриваемой игре «Том и Джерри» это можно интерпретировать следующим образом: если первоначально герои располагаются по соседству, то поиск будет максимально затягиваться, если оба героя имеют наибольшее число степеней свободы на игровом поле и передвигаются. То есть если герои имеют большую вариативность в своих передвижениях, то ввиду этого время до момента встречи в среднем увеличивается по сравнению с другим первоначальным их положением.

Таблица 3. Поиск градиента модели (1.2) и сочетания уровней факторов, $X_4 = -1$

	X_1	X_2	X_3
Основной уровень	11	Джерри в серединной из граничных ячеек	нет
Интервал варьирования	2	2	2
Нижний уровень	5	Джерри в серединной из центральных ячеек	$\vartheta_1 = 0$
Верхний уровень	17	Джерри в угловой ячейке	$\vartheta_1 = 1$
Коэффициенты модели B_j при соответствующем X_j	0.5	–0.3	0.3
Grad_{21}	1	–0.6	0.6
Шаги	0.3	–0.2	0.2
Опыт с наиб. значением	1.6	–1	1
Итоговые значения	**21**	**Джерри в серединной центральной**	$\boldsymbol{\vartheta_1 = 1}$

Это достаточно неожиданный результат: ***изначальное соседство героев не гарантирует быстрый поиск***, если оба персонажа передвигаются по решетке. В практическом плане это означает: судну-нарушителю следует непрерывно маневрировать для затруднения поиска в заданном квадранте (в случае когда поисковой корабль находится вблизи судна-нарушителя).

Также модель (1.2) показывает частные случаи при изменении одного фактора:

– увеличение X_3 на 1 ед. влечет в среднем увеличение отклика Y в $e^{0.32} \approx 1.38$;

– увеличение X_1 на 1 ед. влечет в среднем увеличение отклика Y в $e^{0.45} \approx 1.57$.

Экстраполируя эти результаты за пределы области эксперимента, получаем, что *при соседствующих положениях героев*:

– *рост скорости Джерри на 1 ед. в среднем увеличивает число ходов игры в* $e^{0.32} \approx 1.38$ *раза;*

– *увеличение размера решетки на 1 ед., что соответствует добавлению на поле* $2n+1$ *ячейки по отношению к имеющимся* n^2 *ячейкам, увеличивает число ходов в игре в среднем в* $e^{0.45} \approx 1.57$ *раза.*

Из п. 2.А и п. 2.Б получаем, что ***максимальная средняя продолжительность игры будет наблюдаться при увеличении размера поля игры в сочетании с начальной удаленностью героев.***

3. Продолжим изучать модель: построим графики зависимостей Y (среднего времени поиска) при фиксированных уровнях пар факторов X_3 и X_4 (рис. 4–7), задающих начальное положение героев на решетке. Нас интересует, при каких из них число ходов в игре будет расти в условиях увеличения размеров поля (фактора X_1).

Рис. 4, 5 отражают соседство героев, а рис. 6, 7 отражают максимальную их удаленность. Видно, что взаимное положение кривых от рис. 4 и 5 к рис. 6 и 7 меняется в зависимости от положения Джерри. Из этого можно сделать следующие выводы: если герои максимально удалены друг от друга на игровом поле ($X_4 = +1$), то среднее число ходов в игре больше в случае, когда Джерри будет иметь наименьшее число степеней свободы (т. е. находиться в угловой позиции, см. рис. 8, *а*) при остальных равных условиях, а если герои располагаются по соседству ($X_4 = -1$), то в среднем число ходов в игре будет больше, если один из игроков будет иметь большее число степеней свободы (см. рис. 8, *б*).

Как уже было отмечено, подвижность обоих героев в среднем снижает продолжительность игры (поиска) при удаленности героев. Действительно, известно, что поймать неподвижного далекого игрока можно в среднем быстрее, нежели того, кто за каждый ход изменяет свое положение.

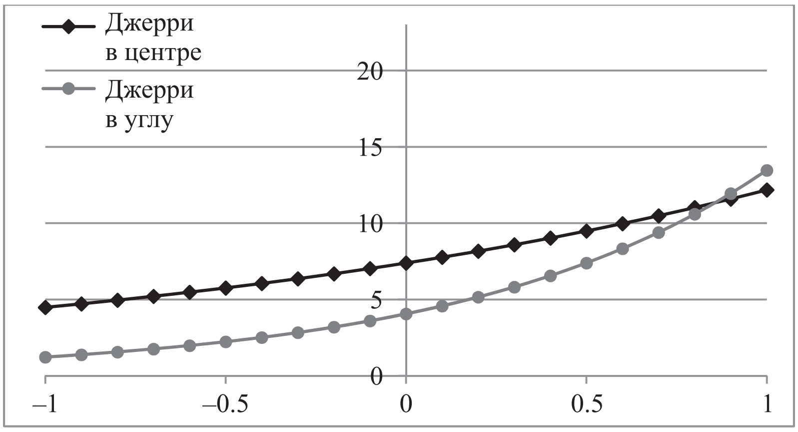


Рис. 4. Зависимость числа ходов игры Y от размера игрового поля X_1 для случая, когда $X_3 = -1$ (Джерри не перемещается), $X_4 = -1$ (герои соседствуют)

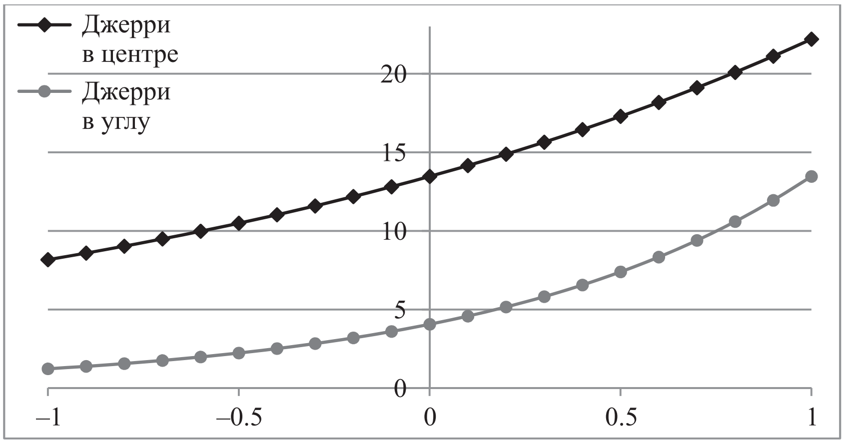


Рис. 5. Зависимость числа ходов игры Y от размера игрового поля X_1 для случая, когда $X_3 = +1$ (Джерри движется), $X_4 = -1$ (герои соседствуют)

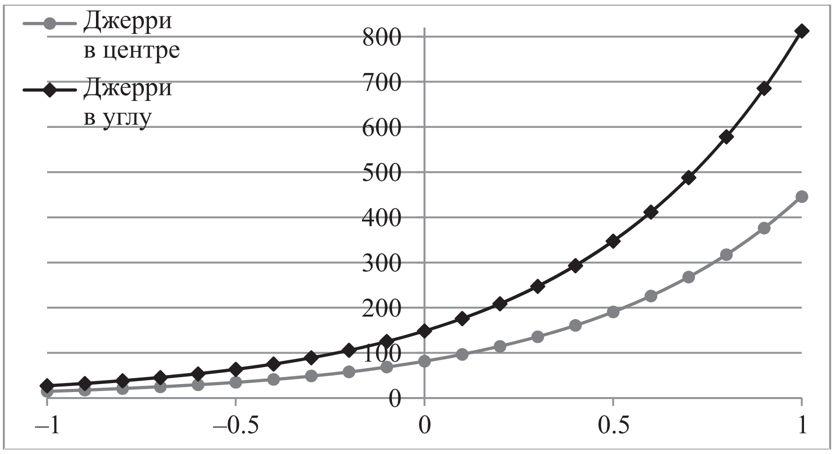


Рис. 6. Зависимость числа ходов игры Y от размера игрового поля X_1 для случая, когда $X_3 = -1$ (Джерри не перемещается), $X_4 = +1$ (герои максимально далеки друг от друга)

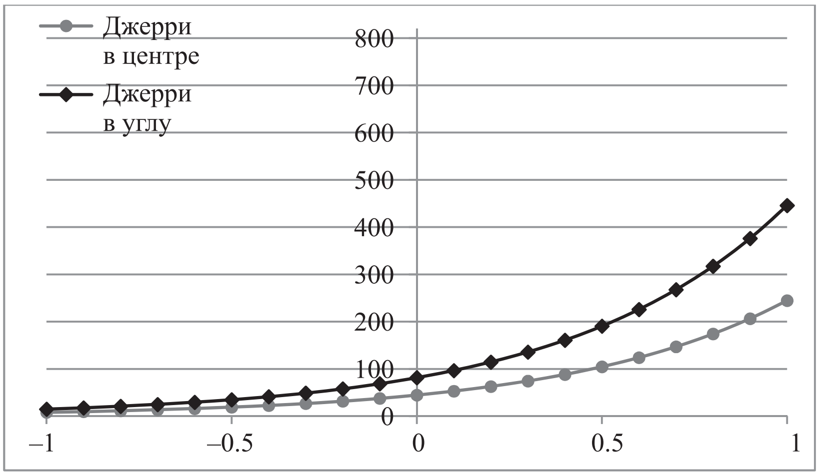


Рис. 7. Зависимость числа ходов игры Y от размера игрового поля X_1 для случая, когда X_3 = +1 (Джерри движется), X_4 = +1 (герои максимально далеки друг от друга)

Рис. 8. а) Джерри (черная ячейка) в углу, Том (серая ячейка) в углу, на наибольшем расстоянии от Джерри; б) Джерри в центральной ячейке, Том по соседству, на наименьшем расстоянии от Джерри

При фиксированных условиях на все факторы ***при увеличении поля игры*** **(**размера решетки) ***среднее число ходов растет, причем экспоненциально*** (возрастающие кривые на рис. 4–7, уравнение (1)). На практике это означает, что увеличение площади поиска судна-нарушителя влечет резкое увеличение времени его поиска. Также игра затягивается на порядки в случае, если герои первоначально максимально удалены друг от друга (X_4 = +1) при прочих равных условиях (уравнение (1)).

4. Выводы

Важной особенностью построенной модели служит тот факт, что в ней анализируется влияние на продолжительность поиска таких характеристик, как размеры решетки, начальное положение частиц и их скорость. При этом расширены возможности для передвижения частицы на квадратной решетке в любую соседствующую клетку, в том числе и диагональную по отношению к ней. Таким образом, поставлена и решена задача в новых условиях (в отличие от ранее рассматриваемых, подразумевающих возможность случайного движения ячеек только в 4 направлениях и без учета начального положения частиц). В ходе исследования получены следующие результаты.

1. Увеличение размера решетки в среднем порождает экспоненциальный рост продолжительности случайного блуждания двух частиц до попадания в одну ячейку. При этом максимальное время будет наблюдаться при наибольшей начальной удаленности частиц. Этот результат не был получен ранее, несмотря на то что отмечалось, что даже при случайном блуждании одной частицы на квадратной решетке среднее смещение частицы зависит от числа шагов, и случайное блуждание оказывалось сильно негауссовским [Обухов, 1984].

2. Начальное соседство на решетке не гарантирует быстрый поиск, если каждая из частиц передвигается. Непрерывное движение обеих частиц затрудняет поиск в заданном квадранте, т. е. увеличивает в среднем длительность поиска.

3. При удаленности двух частиц наблюдается обратная ситуация: движение обоих в среднем уменьшает время случайного блуждания до попадания в одну ячейку.

4. Характер влияния числа степеней свободы движения частиц на длительность поиска определяется лишь в совокупности с их удаленностью на решетке: одновременная максимальная удаленность с угловой позицией одной из частиц и максимальная близость с центральной позицией частиц в среднем дают увеличение продолжительности случайного блуждания по сравнению с другими расположениями на решетке.

5. Результаты моделирования могут быть обобщены на случай, когда поле поиска представляет выпуклый плоский компакт, если осуществить его квадрирование, как продемонстрировано в работе [Петросян, Гарнаев, 1992].

5. Заключение

Применение построенной в работе модели зависимости средней продолжительности случайного блуждания двух частиц до попадания в одну ячейку двумерной квадратной решетки от различных начальных условий в практических задачах может способствовать сокращению случайного поиска и разработке стратегий для его сокращения в условиях малого объема информации об объекте поиска или даже ее отсутствии. К примеру, учет таких результатов работы, как начальное соседство, не гарантирующее быстрый поиск, непрерывное движение обоих объектов, замедляющее процесс случайного поиска, оптимальное расположение на поле объекта-поисковика, может существенно сократить длительность. К примеру, в работе произведены расчеты, которые показывают возможное увеличение время случайного поиска более чем в 5 раз при максимальной дальности первоначальных позиций объектов и увеличении размера квадратного поля на один столбец и одну строку. Полученные выводы могут быть актуальны с точки зрения применения в погранометрике для обеспечения безопасности государства, а также в теории массового обслуживания.

Список литературы (References)

Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
Adler Yu. P., Markova E. V., Granovsky Yu. V. Planirovaniye eksperimenta pri poiske optimal'nykh usloviy [Planning an experiment when searching for optimal conditions]. — Moscow: Science, 1976. — 280 p. (in Russian).

Карпенко А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 446 с.
Karpenko A. P. Sovremennyye algoritmy poiskovoy optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy [Modern algorithms of search optimization. Algorithms inspired by nature]. — Moscow: Publishing house of the Moscow State Technical University, 2014. — 446 p. (in Russian).

Обухов С. П. Случайное блуждание в неоднородной среде // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т. 39, вып. 1.
Obukhov S. P. Sluchaynoye bluzhdaniye v neodnorodnoy srede [Random walk in an inhomogeneous medium] // Letters in JETF. — 1984. — Vol. 39, issue 1 (in Russian).

Петросян Л. А., Гарнаев А. Ю. Игры поиска: учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1992. — 216 с.
Petrosyan L. A., Garnayev A. Yu. Igry poiska [Search Games]: textbook. — St. Petersburg: Publishing house of the St. Petersburg University, 1992. — 216 p. (in Russian).

Сосинский А. Б. Мыльные пленки и случайные блуждания. — М.: МЦМНО, 2000.
Sosinskiy A. B. Myl'nyye plenki i sluchaynyye bluzhdaniya [Soap films and random walks]. — Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000 (in Russian).

Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 827–862.

Chkhartishvili A. G., Shikin E. V. Dinamicheskiy poisk obyektov. Geometricheskiy vzglyad na problemu [Dynamic object search. A geometric view of the problem] // Fundamental and Applied Mathematics. — 1995. — Vol. 1, issue 4. — P. 827–862 (in Russian).

Шумов В. В. Классификация и обзор пограномерических моделей // Труды ИСА РАН. — 2012. – Т. 62 (1).

Shumov V. V. Klassifikatsiya i obzor pogranometricheskikh modeley [Classification and review of porgrammetric models] // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. — 2012. — Vol. 62 (1) (in Russian).

Marinari E., Parisi G., Ruelle D., Widney P. Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 50. — P. 1223.

Fisher R. A. The design of experiments / by Sir Ronald Aylmer Fisher. — Edinburgh; London: Oliver & Boyd. — 1966. — 248 p.

Pólya G. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz // Mathematische Annalen. — 1921. — Vol. 84. — P. 149–160.