

УДК: 532.5.013.4

Применение схемы «КАБАРЕ» к задаче об эволюции свободного сдвигового течения

Ю. М. Куликов^а, Э. Е. Сон^б

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, к. 2

E-mail: ^а kulikov-yurii@yandex.ru, ^б son.eduard@gmail.com

Получено 07.12.2016, после доработки — 21.10.2017.

Принято к публикации 24.10.2017.

В настоящей работе приводятся результаты численного моделирования свободного сдвигового течения с помощью схемы «КАБАРЕ», реализованной в приближении слабой сжимаемости. Анализ схемы проводится на основе изучения свойств неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и порождаемой ею двумерной турбулентности, с использованием интегральных кривых кинетической энергии и энтропии, картин временной эволюции завихренности, спектров энтропии и энергии, а также дисперсионного соотношения для инкремента неустойчивости. Расчеты проводились для числа Рейнольдса $Re = 4 \times 10^5$, на квадратных последовательно сгущаемых сетках в диапазоне 128^2 – 2048^2 ячеек. Внимание уделено проблеме «недоразрешенности слоев», проявляющейся в возникновении лишнего вихря при свертывании двух вихревых листов (слоев вихревой пелены). Данное явление существует только на грубых сетках (128^2), однако, полностью симметричная картина эволюции завихренности начинает наблюдаться только при переходе к сетке 1024^2 ячеек. Размерные оценки отношения вихрей на границах инерционного интервала показывают, что наиболее подробная сетка 2048^2 ячеек оказывается достаточной для качественного отображения мелкомасштабных сгустков завихренности. Тем не менее можно говорить о достижении хорошей сходимости при отображении крупномасштабных структур. Эволюция турбулентности, в полном соответствии с теоретическими представлениями, приводит к появлению крупных вихрей, в которых сосредотачивается вся кинетическая энергия движения, и уединенных мелкомасштабных образований. Последние обладают свойствами когерентных структур, выживая в процессе нитеобразования (филаментации), и практически не взаимодействуют с вихрями других масштабов. Обсуждение диссипативных характеристик схемы ведется на основе анализа графиков скорости диссипации кинетической энергии, вычисляемой непосредственно, а также на основе теоретических соотношений для моделей несжимаемой жидкости (по кривым энтропии) и сжимаемого газа (по влиянию тензора скоростей деформации и эффектов дилатации). Асимптотическое поведение каскадов кинетической энергии и энтропии подчиняется реализующимся в двумерной турбулентности соотношениям $E(k) \propto k^{-3}$, $\omega^2(k) \propto k^{-1}$. Исследование зависимости инкремента неустойчивости от безразмерного волнового числа показывает хорошее согласие с данными других исследователей, вместе с тем часто используемый способ расчета инкремента неустойчивости не всегда оказывается достаточно точным, вследствие чего была предложена его модификация.

Таким образом, реализованная схема, отличаясь малой диссипативностью и хорошим вихреразрешением, оказывается вполне конкурентоспособной в сравнении с методами высокого порядка точности.

Ключевые слова: численная схема «КАБАРЕ», слабосжимаемая жидкость, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, завихренность, энтропия, инкремент неустойчивости, недоразрешаемые слои, «паразитный» вихрь, свертывание, инерционный интервал, когерентные структуры, филаментация, скорость диссипации, дилатация

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00124).

© 2017 Юрий Матвеевич Куликов, Эдуард Евгеньевич Сон

UDC: 532.5.013.4

CABARET scheme implementation for free shear layer modeling

Yu. M. Kulikov^a, E. E. Son^b

Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences,
Izhorskaya st. 13, Bd. 2, Moscow, 125412, Russia

E-mail: ^a kulikov-yurii@yandex.ru, ^b son.eduard@gmail.com

Received 07.12.2016, after completion — 21.10.2017.

Accepted for publication 24.10.2017.

In present paper we reexamine the properties of CABARET numerical scheme formulated for a weakly compressible fluid flow basing the results of free shear layer modeling. Kelvin–Helmholtz instability and successive generation of two-dimensional turbulence provide a wide field for a scheme analysis including temporal evolution of the integral energy and enstrophy curves, the vorticity patterns and energy spectra, as well as the dispersion relation for the instability increment. The most part of calculations is performed for Reynolds number $Re = 4 \times 10^5$ for square grids sequentially refined in the range of 128^2 – 2048^2 nodes. An attention is paid to the problem of underresolved layers generating a spurious vortex during the vorticity layers roll-up. This phenomenon takes place only on a coarse grid with 128^2 nodes, while the fully regularized evolution pattern of vorticity appears only when approaching 1024^2 -node grid. We also discuss the vorticity resolution properties of grids used with respect to dimensional estimates for the eddies at the borders of the inertial interval, showing that the available range of grids appears to be sufficient for a good resolution of small-scale vorticity patches. Nevertheless, we claim for the convergence achieved for the domains occupied by large-scale structures.

The generated turbulence evolution is consistent with theoretical concepts imposing the emergence of large vortices, which collect all the kinetic energy of motion, and solitary small-scale eddies. The latter resemble the coherent structures surviving in the filamentation process and almost noninteracting with other scales. The dissipative characteristics of numerical method employed are discussed in terms of kinetic energy dissipation rate calculated directly and basing theoretical laws for incompressible (via enstrophy curves) and compressible (with respect to the strain rate tensor and dilatation) fluid models. The asymptotic behavior of the kinetic energy and enstrophy cascades comply with two-dimensional turbulence laws $E(k) \propto k^{-3}$, $\omega^2(k) \propto k^{-1}$. Considering the instability increment as a function of dimensionless wave number shows a good agreement with other papers, however, commonly used method of instability growth rate calculation is not always accurate, so some modification is proposed. Thus, the implemented CABARET scheme possessing remarkably small numerical dissipation and good vorticity resolution is quite competitive approach compared to other high-order accuracy methods

Keywords: CABARET numerical scheme, weakly compressible fluid, Kelvin–Helmholtz instability, vorticity, enstrophy, instability increment, underresolved layers, spurious vortex, rollup, inertial interval, coherent structures, filamentation, dissipation rate, dilatation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 881–903 (Russian).

The work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 14-50-00124).

1. Введение

Моделирование сдвиговых течений, часто встречающихся в инженерных приложениях (сверхзвуковое смешение в камерах сгорания, затопленные струи), является хорошим способом проверки используемого численного метода на разрешение многомасштабных вихревых структур, образующихся, в частности, вследствие развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Данная неустойчивость возникает в параллельных сдвиговых слоях, в которых возможна перекачка энергии [Gramer, 2007] из основного течения в энергию возмущений, и может моделироваться в различных постановках. Значительный пласт задач в этой тематике представляет расчет неустойчивости в потоке, подвергающемся одновременному дестабилизирующему воздействию разрыва скорости в сдвиговом течении и стабилизирующему эффекту стратификации плотности [Cushman-Roisin, 2005; Smyth, 2003; De Silva et al., 1996].

На практике математическое моделирование гидродинамической неустойчивости связано с решением задачи Коши или краевой задачи. В первом случае предполагается, что существует некоторое начальное состояние (каким-то образом приготовленное), которое затем подвергается воздействию неустойчивости и переходит в новое устойчивое состояние. Во втором случае состояние устойчивой стратификации поддерживается на верхней границе потока, и неустойчивость развивается в пространстве. Примером таких задач является истечение теплой пресной речной воды в холодное озеро или соленый океан. В предлагаемом исследовании будет рассматриваться задача Коши для уравнений Навье – Стокса [Pozrikidis, 2011], описывающих движение вязкой нетеплопроводной жидкости, имеющей слабую сжимаемость, с условиями пространственной периодичности на границах расчетной области. Выбор такой постановки позволяет исследовать уже готовое состояние течения и не вдаваться в вопросы его появления в процессе естественной эволюции. Таким образом, отпадает необходимость многократного рутинного решения задачи установления потока при наложении возмущений с различными параметрами. Этот процесс также осложняется использованием приближения слабой сжимаемости, существенно удлинняющим [Kulikov, Son, 2016] заключительную стадию установления.

Исследование неустойчивости свободного сдвигового течения гораздо проще проводить в двумерной постановке, вдобавок, такой подход является еще и естественным, так как, согласно теореме Сквайра, все гидродинамические неустойчивости имеют двумерную природу (по крайней мере, на линейной стадии). Эволюция такой неустойчивости в конечном итоге приводит к генерации двумерной турбулентности, обладающей рядом специфических свойств.

Разработка теорий этого явления начала активно вестись в 60-х гг. XX века, результатом чего стало появление известных работ Бэтчелора [Batchelor, 1969] и Крейчнана [Kraichnan, 1967]. В первой из них изложены основные черты двумерной турбулентности, обладающей [Davidson, 2004] прямым каскадом завихренности от больших масштабов к малым, автомодельным энергетическим спектром и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим. Именно Бэтчелор и Крейчнан определили основной круг вопросов теории двумерной турбулентности, остающихся актуальными и поныне.

Основная цель настоящей работы — подтвердить хорошие диссипативные свойства численного метода «КАБАРЕ», его возможность корректно описывать течения с доминирующим конвективным переносом на основе сравнения с методами высокого порядка точности [Sandham, Reynolds, 1991; Липавский и др., 2013] по результатам моделирования задач, характеризующихся наличием многомасштабных вихревых структур. В дальнейшем в статье последовательно излагается постановка задачи (§ 2), даются определения основных величин (§ 3), рассматриваемых в расчете, приводятся краткие комментарии об использованном численном методе (§ 4). В § 5 эволюция неустойчивости рассматривается на основе интегральных характеристик потока — кинетической энергии и энтропии, а также их производных. С целью выделения механизма численной диссипации анализируются кривые скорости диссипации кинетической энергии, полученные

различными способами. В § 6 обсуждается эволюция поля завихренности, а также вопросы сечной сходимости в контексте феноменологии двумерной турбулентности. В заключительных параграфах рассматривается задача об инкременте неустойчивости одномодового возмущения, проводится обобщение полученных результатов. В частности, уделено внимание явлению «недо-разрешенности слоев», образованию когерентных структур в процессе вырождения двумерной турбулентности, а также дисперсионному соотношению для инкремента неустойчивости.

2. Постановка задачи

Задача об эволюции двойного вихревого слоя принадлежит к широкому классу сдвиговых течений, основным объектом исследования которых является неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Несмотря на давность изучения, данное явление используется не только для верификации численных кодов. Современные исследования позволяют рассмотреть новую феноменологию, связанную, например, с развитием вторичных неустойчивостей [Smyth, 2003]. При решении задачи в качестве базовых выступают уравнения неразрывности и движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} \vec{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot \mu \vec{S},\end{aligned}$$

где $\vec{u}(u, v)$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, μ — динамическая вязкость, $\vec{S} = 1/2 (\nabla \vec{u} + (\nabla \cdot \vec{u})^T)$ — тензор скоростей деформации, которые дополняются уравнением состояния слабосжимаемой жидкости:

$$p = c^2(\rho - \rho_0),$$

где в качестве реперной плотности используется значение для воды при нормальных условиях $\rho_0 = 1000$ (кг/м³), c — скорость звука. Задача об эволюции двойного сдвигового слоя решалась в плоской, периодически продолженной области размером $(L_X \times L_Y) = 1 \times 1$ с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{aligned}u &= \text{th}(r(y - 1/4)), \quad y \in [0, 1/2], \\ u &= \text{th}(r(3/4 - y)), \quad y \in (1/2, 1), \\ v &= \delta \sin(2\pi l x), \\ \rho &= \rho_0.\end{aligned}$$

Таким образом, двойной сдвиговый слой (см. рис. 1) слегка возмущается в начальный момент времени, что приводит к его свертыванию в крупномасштабные структуры. Параметр $r = 80$ управляет толщиной сдвигового слоя, δ определяет величину амплитуды для l -й гармоники. За исключением специально оговоренных случаев, расчеты течения, описанные в последующих параграфах, проводились при $\delta = 0.05$.

При моделировании в широком диапазоне изменялось число ячеек равномерной прямоугольной сетки:

$$(n_X \times n_Y) = 128^2 (1), 256^2 (2), 512^2 (3), 1024^2 (4), 2048^2 (5),$$

а также номер моды l начального поперечного возмущения. В силу того, что расчетная область представляет собой квадрат, для масштаба длины в дальнейшем будет использоваться обозначение $L_X = L_Y = L$.

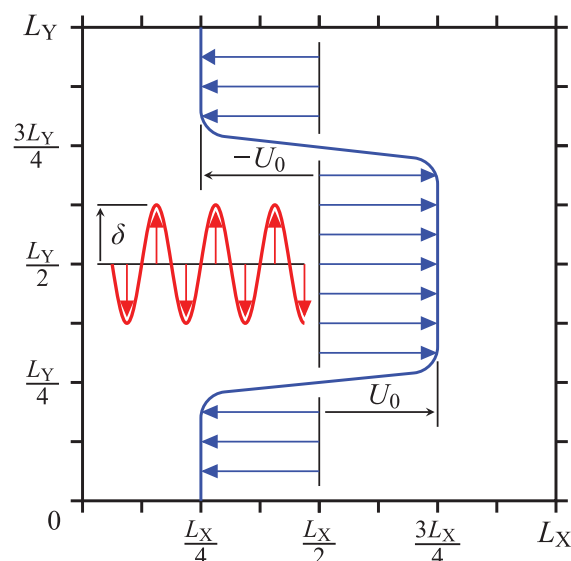


Рис. 1. Постановка начальных условий в задаче о двойном вихревом слое в бесконечной периодически продолженной области

Для достижения общности в описании свойств течений используется несколько безразмерных параметров, в частности число Рейнольдса, являющееся мерой отношения сил инерции к силам вязкого трения в сдвиговом течении:

$$\text{Re}_L = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu},$$

где в качестве характерной скорости принимается $U_0 = 1$, характерного размера — ширина расчетной области L , а также число Маха:

$$\text{M} = \frac{U_0}{c},$$

являющееся мерой сжимаемости

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \text{M}^2,$$

где $\Delta \rho$ — приращение плотности в потоке относительно равновесной. При использовании приближения слабой сжимаемости параметр M^2 выступает мерой точности полученных решений относительно результатов для несжимаемой ($\rho = \text{const}$) среды. Для обеспечения точности модели около 1 % необходимо задать $c \gtrsim 10 \max\{u, v\}$, таким образом, в случае постоянной скорости звука требуется заранее оценить значение глобального максимума на всем расчетном промежутке.

Приближение слабой сжимаемости представляет собой промежуточную модель, позволяющую упростить алгоритм отбора значений локальных инвариантов, а также избежать решения уравнения Лапласа для давления. Реализованная модификация схемы «КАБАРЕ» построена в переменных скорости u, v и плотности ρ [Kulikov, Son, 2016], тогда как существуют еще несколько различных реализаций [Головизнин и др., 2013], разработанных для газодинамических течений, несжимаемой жидкости, в которых уравнения формулируются относительно переменных «давление – скорость», «завихренность – функция тока» [Глотов, 2012], а также отличаются количеством переносимых по сетке инвариантов.

3. Основные соотношения вихревой динамики

С точки зрения общей теории турбулентности наиболее плодотворное описание вихревой динамики удастся дать на основе рассмотрения переменной завихренности:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}.$$

Поэтому, несмотря на то что основными расчетными переменными являются компоненты скорости и плотность, мы будем рассматривать эволюцию течения с помощью $\vec{\omega}$ и построенной на ее основе энстрофии $\vec{\omega}^2/2$, которые для трехмерного течения описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}^2}{2} \right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \nu (\nabla \times \omega) + \nu \nabla \cdot [\vec{\omega} \times (\nabla \times \vec{\omega})], \quad (2)$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость, $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$ — конвективная производная. В двумерном случае вектор завихренности $\vec{\omega}$ имеет лишь одну отличную от нуля (вертикальную) компоненту ω и оказывается перпендикулярным плоскости движения, а уравнения (1), (2) преобразуются к виду

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{\omega^2}{2} \right] = -\nu [(\nabla \omega)^2 - \nabla \cdot (\omega \nabla \omega)]. \quad (4)$$

Если число Рейнольдса является большим ($Re = 4 \times 10^5$), то можно ожидать, что в соответствии с уравнением (3) диффузия завихренности окажется достаточно малой, и вихревые трубки будут «вмороженными» в поток. Таким образом, завихренность будет переноситься так же, как и пассивная примесь.

К уравнениям (3), (4) добавляется соотношение для третьей производной величины — палинстрофии $1/2 (\nabla \times \vec{\omega})^2$, используемой, как правило, только в двумерном анализе и сводящейся к $1/2 (\nabla \omega)^2$:

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\nabla \omega)^2 \right] = -S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j - \nu \left[(\nabla^2 \omega)^2 - \nabla \cdot ((\nabla^2 \omega) \nabla \omega) \right], \quad (5)$$

где конструкция $S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j$ обозначает свертку тензора скоростей деформации $\overset{\leftrightarrow}{S}$ с вектором градиента завихренности. В двумерном течении процесс растяжения жидкой частицы и связанного с ней контура завихренности приводит к увеличению градиента завихренности. Таким образом, в результате уединенный сгусток завихренности (vorticity patch) превращается в нить или плоский лист (vortex sheet). Указанный процесс носит название филаментации или нитеобразования и приводит к измельчению структуры турбулентности. Палинстрофия является мерой этого процесса и показывает возможность образования вихревых листов.

Во многих случаях уравнения (3)–(5) непосредственно не решаются, а привлекаются для аналитического описания результатов моделирования, полученных в примитивных переменных (\vec{u}, ρ, p) . Отличительной особенностью уравнений для завихренности (1) и ее производных является отсутствие давления p , любые пульсационные изменения которого должны приводить к перестройке (мгновенной в случае несжимаемой жидкости или со скоростью звука c) поля скорости.

Согласно теоретическим представлениям в основе образования трехмерного течения с развитой завихренностью и турбулентностью лежит механизм деформации вихревых трубок при сжатии или растяжении жидких частиц. Действительно, обращаясь к уравнению (1), можно заметить, что первый член в правой части связан с изменением завихренности вследствие деформации жидкой частицы, второй отвечает за диффузию из-за вязкости. Кроме того, сравнение уравнений (1) и (3) показывает, что механизм растяжения вихрей проявляет себя исключительно в трехмерных течениях при достаточно больших числах Рейнольдса (критическое число Рейнольдса в трубе $Re_c \approx 2300$), так как слагаемое, отвечающее за деформацию в двумерном случае, отсутствует. Общий процесс интенсификации завихренности, независимо от направления вращения вихрей, описывается уравнением (4) для энстрофии $\omega^2/2$, откуда следует, что в двумерном вязком течении интеграл этой величины может только убывать.

Общее влияние диссипации на течение можно определить, рассматривая зависимость интеграла кинетической энергии

$$E = \frac{1}{\rho_0 U_0^2 L^2} \iint \rho (u^2 + v^2) / 2 \, dx \, dy \quad (6)$$

от времени, тогда как интеграл энстрофии

$$\zeta = \frac{t_0^2}{L^2} \iint \omega^2 / 2 \, dx \, dy \quad (7)$$

позволяет судить об эволюции завихренности и качестве воспроизведения вихревых образований численным методом. Помимо интегральных величин, можно ввести и их производные — скорости диссипации во времени:

$$\varepsilon = -\frac{dE}{dt}, \quad \varepsilon_\zeta = \frac{d\zeta}{dt}. \quad (8)$$

В приближении несжимаемой жидкости энстрофия пропорциональна скорости диссипации кинетической энергии [DeBonis, 2013]:

$$\varepsilon_1 = 2 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{t_0}{L^2} \zeta. \quad (9)$$

В силу того, что единственным механизмом диссипации энергии в инерционном интервале однородной изотропной турбулентности является деформация вихревых трубок, скорости диссипации ε и ε_1 должны совпадать [Davidson, 2004].

С другой стороны, для течения сжимаемого газа ε определяется совокупным влиянием вязкой диссипации

$$\varepsilon_2 = 2 \frac{\nu t_0}{\rho_0 U_0^2 L^2} \iint S_{ij} S_{ij} \, dx \, dy,$$

где свертка тензора скоростей деформации дает

$$S_{ij} S_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 1/2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

и эффектами сжимаемости. Для оценки влияния последних на эволюцию турбулентности необходимо рассчитать скорость диссипации от расширения (сжатия) под действием давления (pressure dilatation):

$$\varepsilon_3 = -\frac{t_0}{U_0^2 \rho_0 L^2} \iint p \nabla \cdot \vec{u} \, dx \, dy.$$

В параграфе, посвященном исследованию инкремента неустойчивости одномодового возмущения, будет рассматриваться интеграл палинстрофии.

$$P = 2 \iint (\nabla \times \omega)^2 / 2 \, dx \, dy = 2 \iint (\nabla \omega)^2 / 2 \, dx \, dy. \quad (10)$$

В предлагаемом исследовании завихренность рассматривается как производная величина; таким образом, еще одна дифференциальная операция $\nabla \times$, представляемая в конечных разностях, вносит дополнительную ошибку, что затрудняет сравнение полученных результатов с данными других авторов. Несмотря на то что рассматриваемая задача, по сути, является канонической, для нее не сформирован ряд обязательных для рассмотрения параметров и характерных зависимостей, как было сделано для задачи Тейлора – Грина [Елизарова, 2013]. В работах используются различные числа Рейнольдса, которые могут определяться по толщине слоя начальной завихренности:

$$\text{Re}_{\delta_{\omega,0}} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_{\omega,0}}{\mu}, \quad \delta_{\omega,0} = \frac{\Delta U}{(\partial U / \partial y)_{\max,0}}, \quad (11)$$

где ΔU обозначает максимальную разницу скоростей в сдвиговом течении, $(\partial U / \partial y)_{\max,0}$ — максимальный поперечный градиент скорости в начальный момент времени, или потери импульса:

$$\text{Re}_{\delta_{\theta,0}} = \frac{\rho_0 U_0 \delta_{\theta,0}}{\mu}, \quad \delta_{\theta,0} = \frac{1}{U_0^2} \int U(t=0, y)(U_0 - U(t=0, y)) \, dy.$$

Кроме того, не всегда приводятся точные данные о номере гармоники l и величине амплитуды поперечного возмущения скорости δ .

4. Замечания о численном методе

В данном параграфе мы детализируем постановку задачи в применении к схеме «КАБАРЕ». В основе данного метода лежит использование двойного набора переменных: первый из них относится к центрам, а второй — к серединам граней расчетных ячеек. На диаграмме на рис. 2 индексы (i, j) обозначают индексацию по направлениям X и Y соответственно, C — положение точек так называемых консервативных переменных, а F_X и F_Y — потоковых. Подмножества потоковых переменных в граничных ячейках, для которых значения на новом слое по времени определяются исходя из граничных условий, отмечены цветовыми обозначениями.

Точки, относящиеся к центрам ячеек, используются при решении уравнений, записанных в консервативной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \Lambda_u U, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \Lambda_v V. \quad (14)$$

Правая часть неоднородных уравнений переноса (13), (14) также записывается в дивергентной форме без учета сжимаемости:

$$\Lambda_u U = \left(\frac{\partial \mu q_x^u}{\partial x} + \frac{\partial \mu q_y^u}{\partial y} \right), \quad \Lambda_v V = \left(\frac{\partial \mu q_x^v}{\partial x} + \frac{\partial \mu q_y^v}{\partial y} \right), \quad (15)$$

где $q_x^u, q_y^u, q_x^v, q_y^v$ — компоненты тензора напряжений \vec{S} .

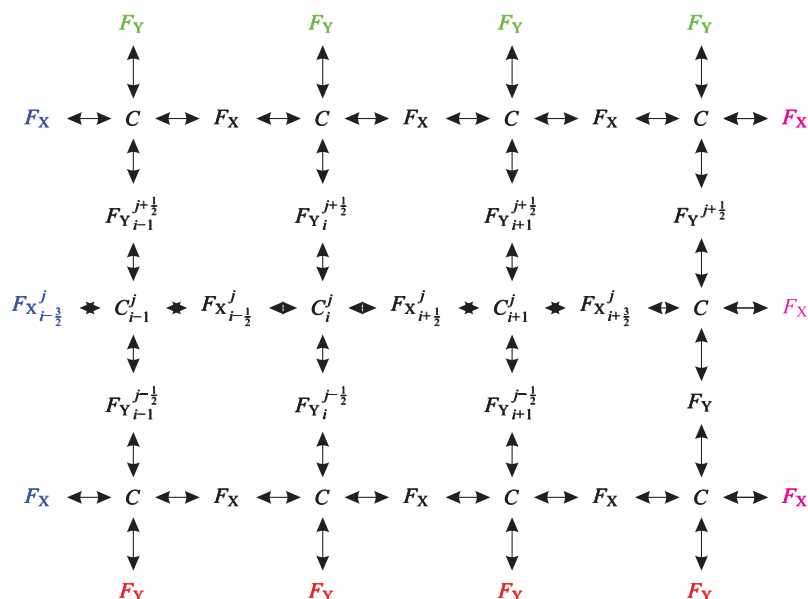


Рис. 2. Диаграмма сеточных множеств для двумерной реализации схемы «КАБАРЕ»

Потоковые переменные используются для решения уравнений в характеристической форме:

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = G_k^x, \quad \frac{\partial I_k^y}{\partial t} + \lambda_k^y \frac{\partial I_k^y}{\partial x} = G_k^y, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где I_k^i — инварианты Римана. В случае двумерной реализации приближения слабой сжимаемости эти инварианты и их характеристические числа имеют вид

$$I_1^x = c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, \quad I_2^x = -c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, \quad I_3^x = v, \quad (17)$$

$$I_1^y = c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, \quad I_2^y = -c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, \quad I_3^y = u, \quad (18)$$

$$\lambda_1^x = u + c, \quad \lambda_2^x = u - c, \quad \lambda_3^x = u, \quad (19)$$

$$\lambda_1^y = v + c, \quad \lambda_2^y = v - c, \quad \lambda_3^y = v. \quad (20)$$

Инварианты (17), (18) переносятся в поперечных направлениях в соответствии со значениями характеристических чисел (19), (20) и на произвольном шаге по времени определяются по значениям потоковых переменных.

Следует отметить, что в действительности консервативными переменными являются ρ , ρu , ρv , однако, пользуясь терминами «консервативный» и «потоковый», мы будем следовать авторской терминологии, отраженной в опубликованных работах. Консервативные и потоковые переменные связаны между собой с помощью интерполяции лишь при задании начальных условий, в дальнейшем они рассчитываются независимо и не могут быть получены друг из друга непосредственно.

Граничные условия задаются в форме локальных инвариантов Римана. В случае периодических граничных условий для расчета переменных на нижней и левой границах используются значения инвариантов I_1^∞ , определяемого из граничных условий, и I_2 , приносящего информацию из внутренних ячеек расчетной области, а для верхней и правой границ используется пара I_1, I_2^∞ . Потоковые переменные включают в себя несколько сеточных множеств (по числу размерностей расчетной области) и рассчитываются независимо друг от друга.

Для обеспечения расчета по явной схеме использовалось число Куранта, соответствующее диапазону устойчивости $CFL = 0.15$.

Подробное описание численного метода «КАБАРЕ», включающее алгоритм нелинейной коррекции потоковых переменных, служащий для подавления численных осцилляций, является достаточно громоздким. Интересующийся читатель может найти его детальное изложение в работах [Головизнин и др., 2013; Kulikov, Son, 2016].

5. Интегральные кривые энергии и энтрофии

Рассмотрим семейство кривых кинетической энергии $E = E(t)$, рассчитанной на различных сетках (рис. 3, а) при числе Рейнольдса $Re = 4 \times 10^5$ для основной гармоники $l = 1$. Независимо от числа ячеек сетки кривые отличаются большим количеством мелких осцилляций, которые накладываются на основную зависимость. Для последней характерно наличие участка резкого спада с 1-2 крупными всплесками, который затем становится все более и более пологим, переходя в некоторую линейную асимптотическую зависимость. Кроме того, общее поведение $E = E(t)$ дает представление о процессе сеточной сходимости: при увеличении количества ячеек на начальном этапе эволюции амплитуда резкого спада при $t \approx 2 - 5$ становится меньше, а участок линейной диссипации начинается раньше.

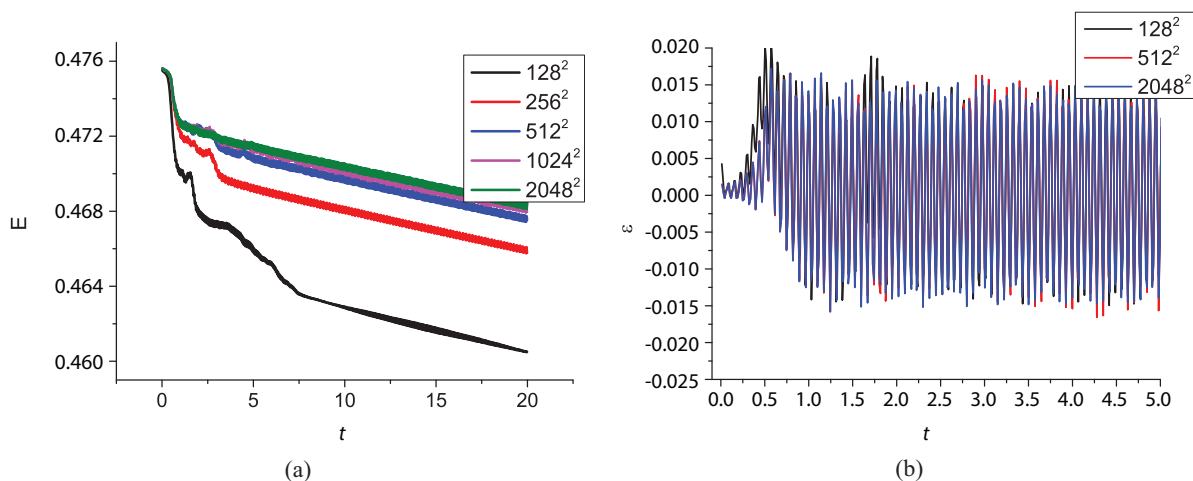


Рис. 3. (а) Зависимость кинетической энергии E от времени, рассчитанная на сетках (1)–(5); (б) скорость диссипации кинетической энергии ε , полученная непосредственным дифференцированием зависимости $E = E(t)$ на сетках (1), (3), (5). Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Например, на сетке 1024^2 линейный участок начинается при $t \sim 3$, что соответствует рис. 8, *e–f*. Линейность процесса диссипации кинетической энергии, вероятно, является одной из характерных черт моделирования двумерной турбулентности в периодической области, тогда как в трехмерном случае наблюдается зависимость $E \propto t^{-1.2}$, переходящая в $E \propto t^{-2}$. Среднюю скорость диссипации $\bar{\varepsilon}$ можно определить, аппроксимировав участок асимптотического спада при $t > 10$ (см. таблицу 1).

Таблица 1. Начало участка асимптотического спада в зависимости от расчетной сетки

Сетка, №	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Начало асимптотического участка	$t \approx 8.5$	$t \approx 5$	$t \approx 3.5$	$t \approx 3.3$	$t \approx 3.3$

Скорость диссипации ε на всем расчетном промежутке также представляется в виде сильно осциллирующей функции (см. рис. 3, *b*), в поведении которой можно выделить два участка: на первом из них происходит рост до $\varepsilon = 0.02$, а на втором — резкое усиление амплитуды колебаний, на фоне которого оказывается практически невозможным определение среднего значения. Вероятно, оно должно быть положительным вследствие наличия вязкой диссипации. Частота выборки данных (12–14 точек на период осцилляции) позволяет предположить, что на участке развития течения ($t \gtrsim 1.5$) амплитуда и период колебаний T являются практически независимыми от сеточного разрешения. Для исследованного случая период составил $T \approx 1.473 \times 10^{-4}$, что должно соответствовать акустическому диапазону.

Сильная перемежаемость, наблюдаемая в процессе эволюции течения, несколько затрудняет использование простого приема оценки диссипативности схемы [DeBonis, 2013], который основан на сравнении скорости диссипации ε , рассчитанной по формуле (8), и аналогичной величины ε_1 , установленной по графикам интегральной энтропии (9). Указанное семейство кривых представлено на рис. 4, *a* (левая шкала). Все они получены при одинаковом числе Рейнольдса, поэтому скорость диссипации кинетической энергии легко найти умножением $\zeta = \zeta(t)$ на масштабный коэффициент 2ν (правая шкала того же рисунка). Новый набор кривых ε_1 не несет в себе никаких временных осцилляций, при его получении не использовались какие-либо сглаживание или фильтрация.

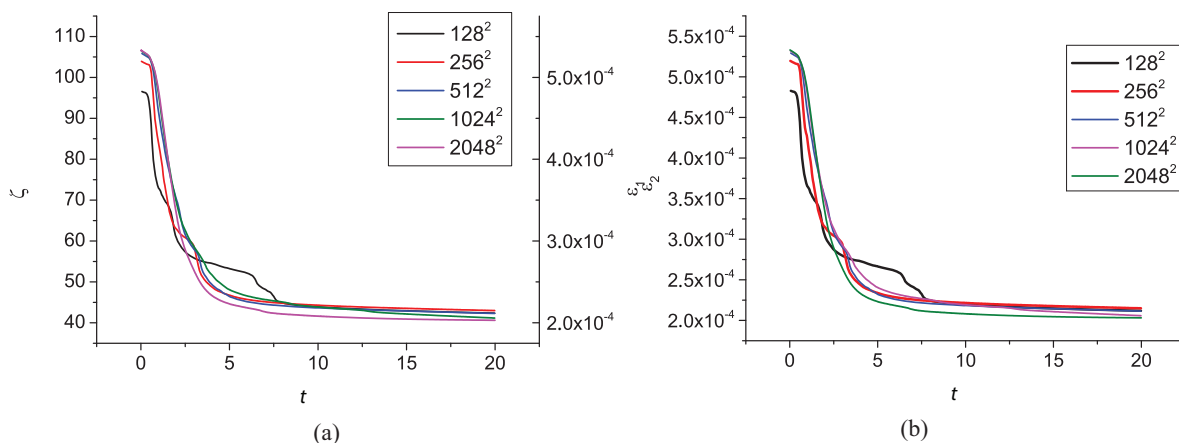


Рис. 4. (а) Зависимость интеграла энтропии ζ от времени (левая шкала ординат), а также скорость диссипации ε_1 , построенная на ее основе (правая шкала); (б) компонента скорости диссипации кинетической энергии ε_2 , возникающая вследствие действия сил вязкого трения. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

При исследовании сеточной сходимости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t)$ наиболее сильные различия (см. рис. 4, *a*) наблюдались для грубых сеток на участке $t \lesssim 7.5$, тогда как для мелких сеток 1024^2 и 2048^2 при $t \sim 2.5$, когда формируется развитая турбулентность, графики практически совпадают.

На поздних стадиях эволюции скорость диссипации медленно убывает со временем, при этом для последовательности сеток (1)–(5) значение ε_1 находится в пределах $\varepsilon_1 \sim 2.048\text{--}2.147 \times 10^4$. Измельчение сетки приводит к некоторому уменьшению скорости диссипации.

В отличие от трехмерных расчетов [DeBonis, 2013], где существование дополнительного механизма схемной диссипации приводит к практически двукратному занижению ε_1 , в данной задаче разброс значений ε_1 для различных сеток не превышает 8%. В качестве меры ошибки определим расхождение между $\bar{\varepsilon}$, полученным аппроксимацией участка асимптотического спада, и ε_1 , взятым на стадии «медленной» диссипации в произвольный момент времени $t = 15$. Указанное расхождение на мелких сетках составляет 1.3–3% (см. таблицу 2).

Таблица 2. Скорости диссипации $\bar{\varepsilon}$ и ε_1 , полученные на различных расчетных сетках

(1) Сетка, №	(2) $\bar{\varepsilon} \times 10^{-4}$	(3) Относительная ошибка аппроксимации (%)	(4) ε_1	(5) Относительная ошибка $ \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} /\bar{\varepsilon}$ (%)
128^2	2.352	0.2	2.147	8
256^2	2.161	0.05	2.178	2.6
512^2	2.158	0.1	2.129	1.3
1024^2	2.113	0.08	2.107	3
2048^2	2.091	0.15	2.048	2

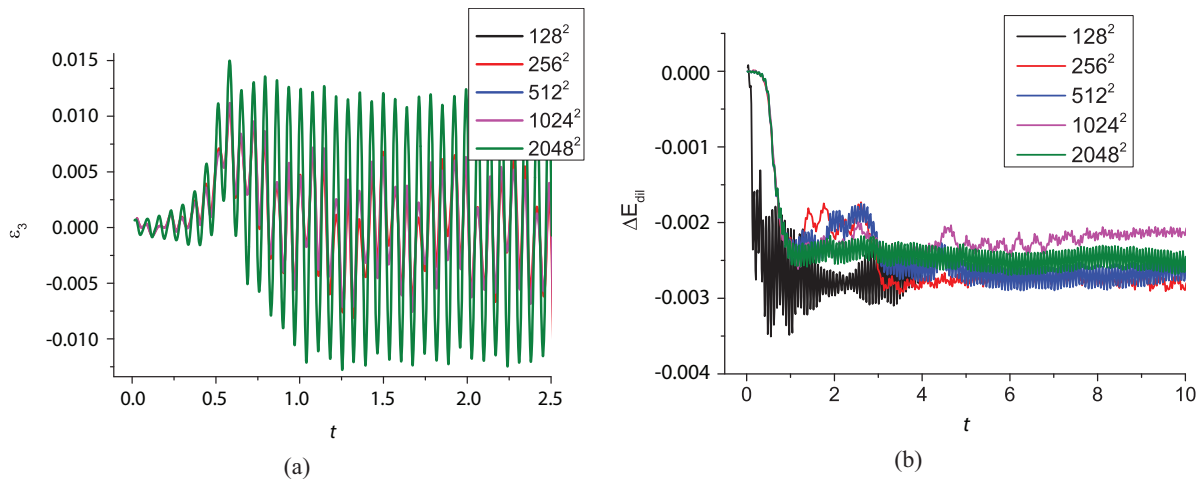


Рис. 5. (a) Зависимость скорости диссипации вследствие дилатации ε_3 ; (b) интеграл потерь кинетической энергии ΔE_{dil} вследствие дилатации в различные моменты времени. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Рассмотрим теперь поведение скорости диссипации с точки зрения модели сжимаемого газа, пренебрегая объемной вязкостью. В этом случае скорость диссипации ε определяется совокупным вкладом сил вязкого трения ε_2 (рис. 4, b), а также эффектами дилатации ε_3 (рис. 5, a). Скорость диссипации ε_2 оказывается монотонно убывающей функцией, хорошо совпадающей с ε_1 , откуда следует, что высокочастотные осцилляции ε являются исключительно следствием эффектов сжимаемости, а отсутствие колебаний на графиках палинстрофии обусловлено тем, что переменная p не входит в основные уравнения для завихренности и ее производных.

Это предположение находит свое подтверждение в поведении графиков скорости диссипации вследствие дилатации ε_3 (рис. 5, b), амплитуда колебаний которых на несколько порядков превосходит ε_2 . При увеличении количества ячеек расчетной сетки частота этих осцилляций оказывается неизменной, в то время как амплитуда постепенно увеличивается. Подобное поведение, вероятно, является одним из свойств приближения слабой сжимаемости. Для определения общей доли ε_3 в процессе диссипации можно вычислить интеграл

$$\Delta E_{\text{dil}} = - \int \varepsilon_3 dt,$$

значения которого (см. рис. 5, b) оказываются сопоставимыми с общим изменением энергии ΔE в процессе эволюции течения; в частности, для сетки 2048^2 имеем $\Delta E_{\text{dil}} \approx 2.5 \times 10^{-3}$, в то время как общая потеря энергии составляет $\Delta E \approx 4 \times 10^{-3}$. Основная часть потерь энергии ΔE_{dil} , вероятно, связана с перестройкой полей давления при сворачивании крупных вихрей, что является следствием несогласованности переменных давления и скорости при задании начальных условий.

Влияние численной диссипации не удастся выделить однозначно, так как поведение ε сильно «зашумлено» осцилляциями, в то время как сравнение ε_1 и ε_2 показывает, что диссипативный механизм схемы в целом повторяет характеристики физической диссипации. Это особенно хорошо видно при $t \gtrsim 3$ (сетка (5)): скорость диссипации на линейном участке кривой ε совпадает со значениями ε_1 на участках развития и затухания турбулентности.

В целом положительные результаты сравнения определяются двумя факторами: общими свойствами задачи и характеристиками алгоритма. Действие первого фактора связано с тем, что в процессе свертывания вихревого слоя (листа) в «клубы» завихренности начинает существовать обратный каскад энергии, приводящий к появлению все более и более крупных энергосодержащих вихрей. Те мелкомасштабные когерентные структуры, которые выживают в процессе слияния, не вносят существенного вклада в интегральные характеристики. Таким образом, роль схемной диссипации уменьшается при моделировании достаточно крупных вихрей.

Второй фактор связан с действием алгоритма нелинейной коррекции потоковых переменных, который может вызвать диссипацию, однако он не срабатывает на участках двумерного течения, где существуют структуры с замкнутыми линиями тока [Глотов, 2014]. Этим обстоятельством объясняется успешное прохождение схемой «КАБАРЕ» тестовой задачи о диффузии вихря. Отметим еще раз, что существование мелкомасштабных когерентных структур является следствием начальных условий, т. е. их может и вовсе не быть.

В заключение этого параграфа рассмотрим семейства кривых палинстрофии (10) при различных числах Re для основной ($l = 1$) и самой быстрорастущей ($l = 6$) гармоник возмущения. На рис. 6, *a* представлена зависимость $P = P(t)$ при $Re = 4 \times 10^5$ и $l = 1$ для различного числа ячеек расчетной сетки, откуда следует, что при переходе к более подробным сеткам качество воспроизводства $\nabla\omega$ улучшается. При вычислении ω , как и $\nabla\omega$, для аппроксимации пространственных производных используются центральные разности, приводящие к сглаживанию неоднородностей, что вместе с другими различиями дает 10 %-ную ошибку в сравнении с [Липавский и др., 2013] в зоне максимума P . Рассматривая $P = P(t)$ для основной гармоники в широком интервале Re (см. рис. 6, *b*), следует отметить, что при $Re = 2.5 \times 10^4$ результаты, полученные по схеме «КАБАРЕ» в зоне максимума, дают значение на 6 % большее, в то время как при $Re = 10^5$ наблюдается слабое занижение (–2 %). В целом можно говорить об удовлетворительном совпадении результатов до нижнего диапазона «больших» чисел Рейнольдса $Re \sim 10^5$. Характерным признаком ухудшения сеточного разрешения является наличие второго выраженного локального максимума, наблюдаемого с $Re \sim 2.5 \times 10^5$. При максимальных из исследованных Re значение первого максимума, скорее всего, является заниженным вследствие потери точности решения. Это предположение также хорошо подтверждается, если обратиться к зависимости времени достижения максимума P при различных Re , представленной на рис. 6, *d*. Действительно, для гармоники $l = 1$ при всех Re , за исключением самого большого $Re = 10^6$, наблюдается зависимость $t_{\max} \sim \lg Re$, а для гармоники $l = 6$, производящей более мелкомасштабные возмущения, линейный закон начинает нарушаться еще раньше, при $Re \approx 250000$. На графиках $P = P(t)$ (рис. 6, *c*) этот процесс также связан с появлением второго локального максимума, значения которого превосходят первый. Сравнение рис. 6, *b* и 6, *c* показывает, что для $l = 6$ максимумы P достигаются приблизительно в три раза быстрее. Таким образом, ускоренное развитие самой неустойчивой моды приводит к тому, что двумерная турбулентность развивается несколько другим образом, подчиняясь тем не менее общим закономерностям.

6. Поле завихренности: сходимость по сетке и временная эволюция

Обратимся к рассмотрению эволюции поля завихренности при $Re = 4 \times 10^5$, возмущаемого в начальный момент времени основной гармоникой возмущения $l = 1$. Достаточно большое число Re позволяет утверждать, что в турбулентном течении сохраняется пол-

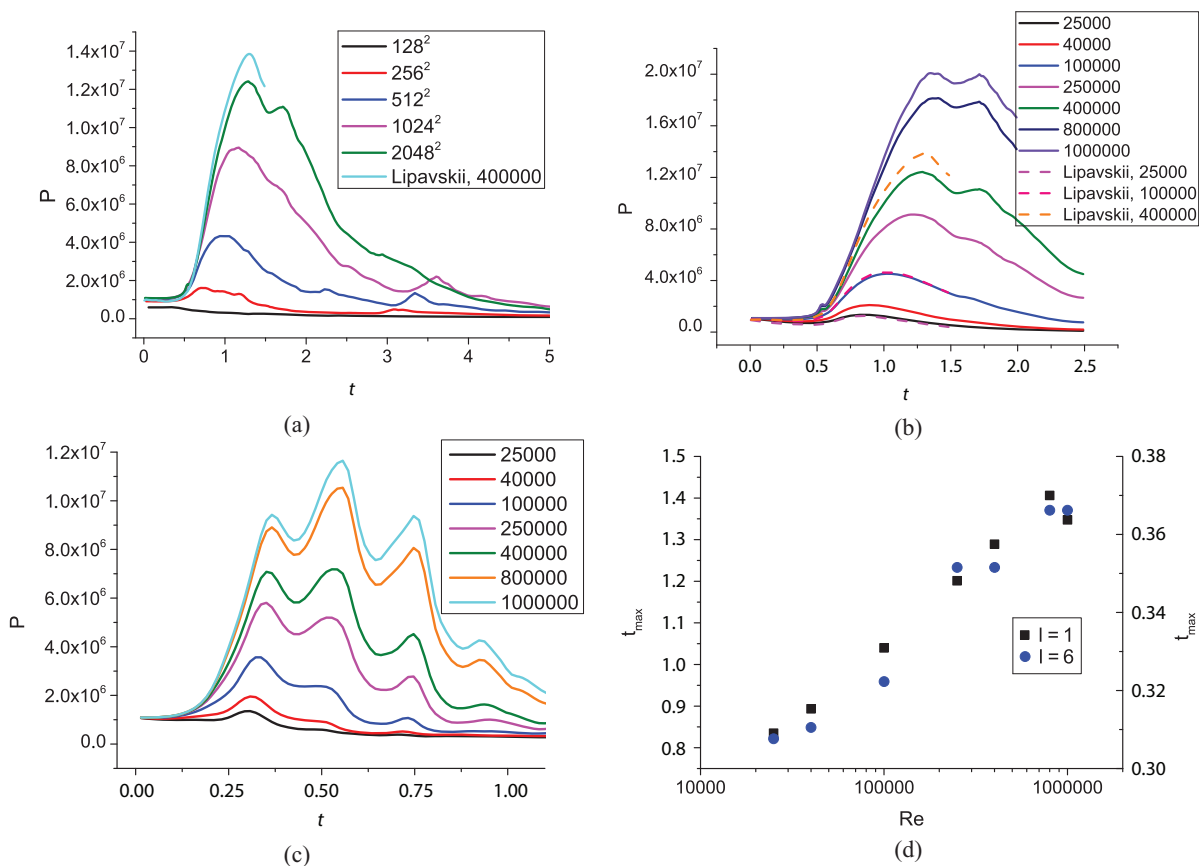


Рис. 6. Зависимость палинстрофии: от числа ячеек расчетной сетки при $Re = 4 \times 10^5$, сравнение с эталонным решением [Липавский и др., 2013] (а); от значения числа Рейнольдса для основной (b) и самой быстрорастущей гармоники поперечного возмущения скорости (с); (d) время достижения палинстрофией первого максимума при различных числах Рейнольдса для выделенных гармоник $l = 1$ (левая шкала) и $l = 6$ (правая шкала). Результаты рис. b–d получены на сетке 2048^2 . Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

ная кинетическая энергия E , что позволяет турбулентности развиваться и долго существовать. Действительно, на мелких сетках относительное изменение кинетической энергии составляет $|\Delta E|/E \approx 8.4 \times 10^{-3}$. В отличие от трехмерной турбулентности скорость диссипации определяется каскадным разрушением вихрей с характерной скоростью u и масштабом l и не зависит от вязкости. С другой стороны, в двумерном процессе интегральная энтропия $\zeta = \zeta(t)$ определяется начальными условиями и является убывающей функцией, так как механизм растяжения вихревых трубок оказывается заблокированным и не может восполнить потери от вязкой диссипации.

Для детектирования сильных, но немелких вихревых структур можно использовать поле давления или распределения пассивной примеси [Cortesi et al., 1999]. В настоящей работе вихри определяются по полю завихренности, данный способ является самым универсальным. Нарастание амплитуды гребней поперечного возмущения резко увеличивает площадь взаимодействия вихревых структур, что позволяет захватить больше независимой жидкости. После ее захвата спутным потоком в дело вступает процесс смешения, сглаживающий неоднородности между завихренной жидкостью в каскаде вихрей разного масштаба. Захваченные жидкие моли постепенно смешиваются во время сворачивания вихревого слоя и дальнейшего слияния вихрей. Процесс смешения ограничен снизу скоростью диффузии на мелких масштабах и может сопровождаться развитием вторичных неустойчивостей.

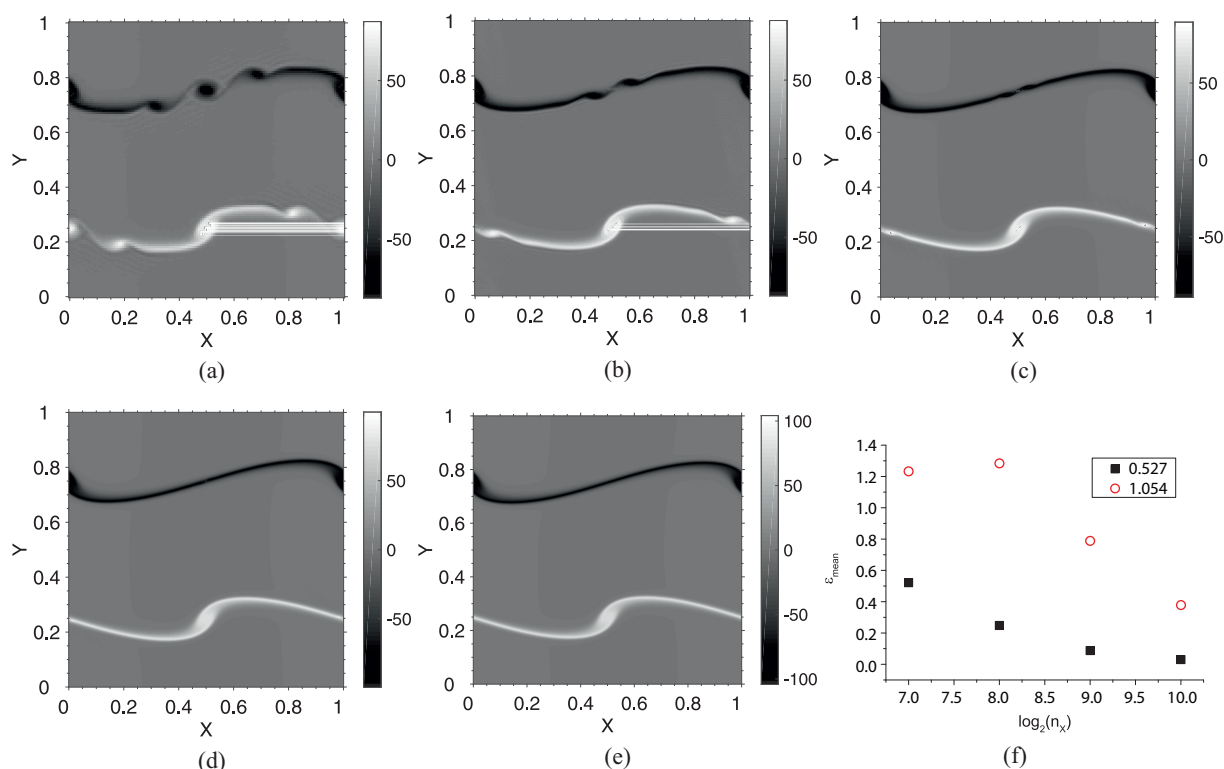


Рис. 7. Поле завихренности при $t = 0.527$, число гармоник $l = 1$ на различных расчетных сетках: (a) 128^2 , (b) 256^2 , (c) 512^2 , (d) 1024^2 , (e) 2048^2 ячеек; (f) зависимость средней ϵ_{mean} ошибки от двоичного логарифма числа ячеек n_x

В эталонных решениях [Липавский и др., 2013] каждый сдвиговый слой сворачивается в одиночные периодические вихри, в то время как в случае недоразрешения появляются дополнительные свертки завихренности (roll-ups) между основными вихрями, что и происходит на сетке 128^2 . Измельчение расчетной сетки приводит к появлению всё новых деталей в основных вихревых структурах (рис. 7, *a–e*) и уменьшает влияние «недоразрешенности» слоев, выражающееся в появлении «лишнего» («паразитного») вихря. Различие в эволюции процесса вследствие появления этого образования становится существенным при $t = 0.527$, однако данный артефакт исчезает уже при переходе к сетке 256^2 . Несмотря на полное исчезновение паразитного вихря на сетке 512^2 при числе Рейнольдса $Re = 4 \times 10^5$ для основной гармоники начального возмущения $l = 1$, окончательной сходимости решения не наблюдается, а при дальнейшем измельчении изменяются направление закрутки и относительное расположение мелкомасштабных вихревых образований.

Полезно провести оценку качества разрешения вихрей инерционного интервала в зависимости от числа расчетных узлов в одном направлении. Так как завихренность ω в двумерном случае сохраняется [Davidson, 2004], то отношение крупных вихрей L к мелким l^* составляет

$$\frac{L}{l^*} \propto Re^{1/2}.$$

При $Re = 4 \times 10^5$ отношение масштабов составляет $L/l^* \approx 633$, тогда, считая, что самый крупный вихрь занимает половину расчетной области, получим $l^* \approx 8 \times 10^{-4}$. Для удовлетворительного отображения самого малого вихря инерционного интервала необходимо как минимум две ячейки (в случае трехмерной реализации схемы «КАБАРЕ» для разрешения потребуется 5–6 ячеек [Глотов, 2014]), что позволяет связать Re с минимальным числом ячеек в одном направлении

$N \approx 2\text{Re}^{1/2}$, т.е. самой мелкой сетки 2048^2 ячеек должно быть достаточно для моделирования всего инерционного интервала. Данная оценка, к сожалению, не распространяется на участок сворачивания тонких вихревых слоев, отличающихся большими градиентами завихренности.

Для оценки процесса сходимости решения при сгущении расчетной сетки воспользуемся оценкой средней относительной ошибки ϵ_{mean} по норме L_1 , предложенной в [Berger, Helzer, 2012]:

$$\epsilon_{\text{mean}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} |\omega_f(i, j) - \omega_m(i, j)|}{\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} |\omega_f(i, j)|},$$

где $\omega_f(i, j)$ — значения завихренности в узлах самой подробной сетки, а $\omega_m(i, j)$ — значения на более грубой сетке с количеством ячеек $m = 128\text{--}1024$ в одном направлении, суммирование ведется по узлам более грубой сетки. На рис. 7, *f* приведена средняя относительная ошибка ϵ_{mean} в два различных момента времени: $t = 0.527$ и $t = 1.054$; при измельчении сетки ее убывание в первом случае происходит монотонно, в то время как при $t = 1.054$ происходит нарушение монотонности (сетка 256^2), которая восстанавливается при дальнейшем сгущении сетки. Таким образом, окончательная сходимость не достигается даже на подробных сетках, однако этот процесс все же имеет место при последовательном измельчении.

Рисунки 8, *a–f* демонстрируют генерацию вихрей и их эволюцию в различные моменты времени на самой подробной сетке 2048^2 ячеек. В начале происходит сворачивание слоя завихренности в спирали с одновременным образованием крупномасштабных «клубов». Помимо этого, образуются малые вторичные вихри большой интенсивности. Процесс взаимодействия

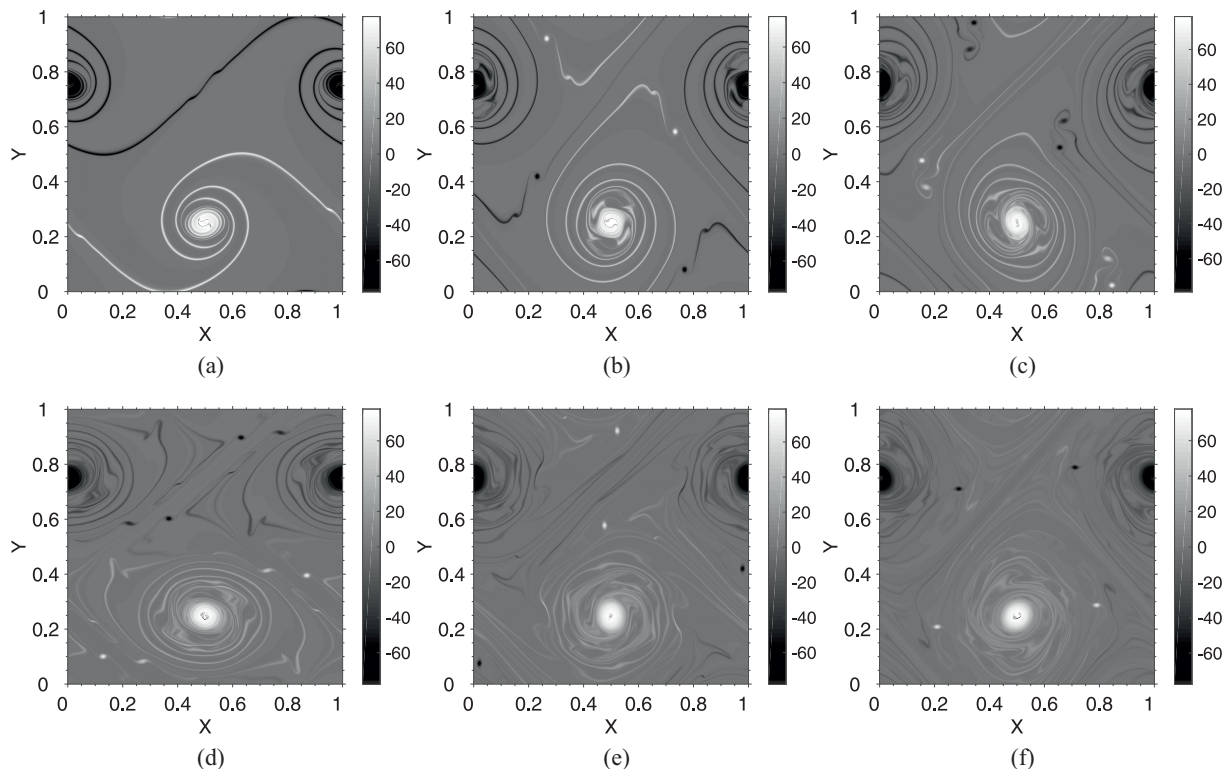


Рис. 8. Поле завихренности в различные моменты времени: (a) $t = 1.054$, (b) $t = 1.581$, (c) $t = 2.108$, (d) $t = 2.635$, (e) $t = 3.162$, (f) $t = 3.689$, число гармоник $l = 1$, результаты расчета на сетке 2048^2 ячеек

двух вихрей сопоставимого размера можно свести к двум исходам. В первом случае один из них «срывает» внешние слои завихренности и деформирует ядро второго настолько, что последний теряет свою округлую форму и, растягиваясь вдоль замкнутой линии тока первого вихря, полностью поглощается.

Во втором случае после «срыва» внешних слоев завихренности ядро разрушаемого вихря уменьшается настолько, что крупномасштабная завихренность перестает оказывать значимое влияние на него, и дальнейшее взаимодействие вихрей прекращается. Так как генерация завихренности на основе механизма деформации вихревых трубок в данном случае отсутствует, то дополнительной «раскрутки» или деформации разрушенного вихря не происходит. Описанное явление широко используется при построении иерархических моделей двумерной турбулентности [Фрик, 1998].

По мере распада турбулентности происходит уменьшение завихренности между большими вихрями и ее концентрация в крупных образованиях округлой формы. В диапазоне средних масштабов наиболее активно происходит слияние одинаково закрученных вихрей [Ayrton, 1919]. Наряду с крупными вихрями образуются и мелкие, которые имеют характер когерентных структур. Данный термин в литературе толкуется двояко: с одной стороны, им обозначаются образования, имеющие размер, больший интегрального масштаба турбулентности, с другой — уединенные сгустки завихренности, слабо взаимодействующие с вихрями других масштабов. Так или иначе, эти структуры существуют достаточно долго, $t \gtrsim 100u/l$, выживая в процессе филаментации. Многие исследователи считают [Davidson, 2004], что появление когерентных структур связано со специфическими свойствами начальных условий. Таким образом, двумерная турбулентность «запоминает» гораздо больше в сравнении с ее трехмерным аналогом и базовыми гипотезами теории Бэтчелора.

Феноменологическое описание процесса эволюции турбулентности следует дополнить, рассмотрев спектральные характеристики кинетической энергии и энстрофии, получаемые с помощью быстрого преобразования Фурье, одной из эффективных реализаций которого является алгоритм FFT Intel MKL [Intel MKL Manual, 2010]. Результатом работы этого алгоритма являются матрицы фаз и амплитуд фурье-компонент, по которым восстанавливается одномерный спектр $E(k)$ в диапазоне

$$k \in [k^{\min}, k^{\max}], \text{ где } k^{\min} = \sqrt{(k_X^{\min})^2 + (k_Y^{\min})^2}, \quad k^{\max} = 1/2 \sqrt{(k_X^{\max})^2 + (k_Y^{\max})^2}; \quad (21)$$

в свою очередь, $k_X^{\min} = 2\pi/(L_X - \Delta x)$, $k_Y^{\min} = 2\pi/(L_Y - \Delta y)$, $k_X^{\max} = 2\pi/\Delta x$, $k_Y^{\max} = 2\pi/\Delta y$, Δx , Δy — пространственный шаг сетки в соответствующем направлении.

Преобразование Фурье, используемое в Intel MKL, имеет следующий общий вид:

$$z_{k_1, k_2, \dots, k_d} = \sigma \times \sum_{j_d=0}^{n_d-1} \dots \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} w_{j_1, j_2, \dots, j_d} \exp \left(\beta i 2\pi \sum_{l=1}^d j_l k_l / n_l \right),$$

где $k_l = 0, \dots, n_l - 1$ ($l = 1, \dots, d$), σ — коэффициент масштабирования, в настоящем расчете принимаемый $\sigma = 1/(n_X n_Y)$. Множитель β в показателе экспоненты выбирается как $\beta = -1$ для прямого преобразования.

После выполнения двумерного пространственного преобразования Фурье необходимо ограничить диапазон волновых чисел (пространственных частот), воспользовавшись результатами теоремы Котельникова (теорема отсчетов), находящей широкое применение в области цифровой обработки сигналов. В данном случае кинетическая энергия представляет собой непрерывную периодическую по двум направлениям функцию. Спектр сигнала (физической величины),

восстановленного по своим дискретным отсчетам (сеточным значениям), ограничен конечной частотой, равной половине частоты дискретизации. Эта частота называется частотой Найквиста. Соотношение нижней граничной частоты и частоты Найквиста определяет интервал, в котором возможно вычисление частот фурье-спектра. В случае если в спектре сигнала присутствуют гармоники с частотой, превышающей частоту Найквиста, в спектре появляются «паразитные» частоты. Множитель $1/2$ в выражении для максимального волнового числа k^{\max} (21) возникает как следствие теоремы Котельникова. В каждом расчете размер массива уровней волнового числа выбирался как $\min(n_X, n_Y)$.

Реализацию спектральных характеристик двумерной турбулентности подтверждает асимптотическое поведение кинетической энергии и энстрофии, которые в инерционном интервале подчиняются закономерностям $E \propto k^{-3}$, $\omega^2/2 \propto k^{-1}$ (рис. 9). При переходе к более подробным сеткам наблюдается удовлетворительное отображение разрешаемого диапазона волновых чисел при его расширении в коротковолновую область. Более сложная эволюция спектра имеет место для энстрофии $\omega^2/2$: на грубых сетках ее каскад в инерционном интервале не наблюдается, однако некоторое подобие спектров имеет место в диапазоне сеток 512^2 – 2048^2 . Каскад энстрофии в двумерном случае связан с тем, что сгустки завихренности непрерывно подвергаются процессу нитеобразования (филаментации), что приводит к росту $(\nabla\omega)^2$ и сосредоточению завихренности в мелкомасштабных структурах.

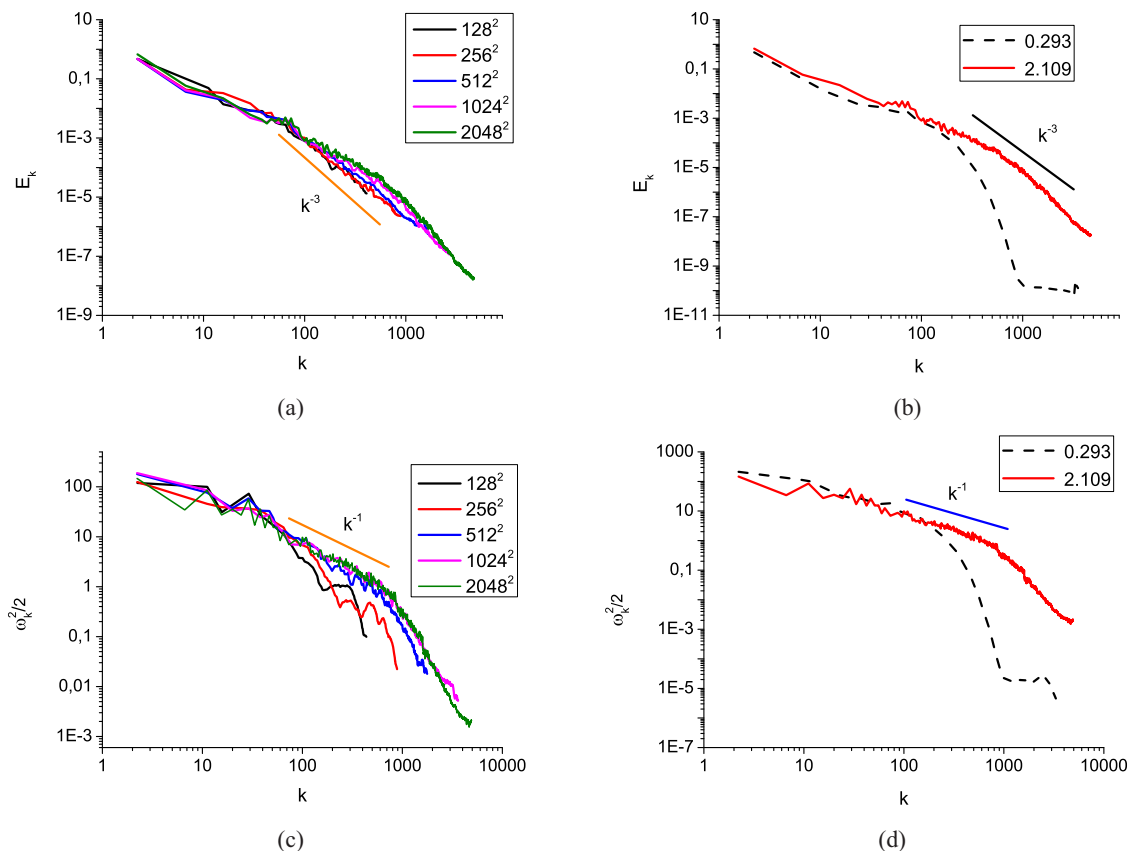


Рис. 9. Фурье-спектр кинетической энергии: (а) рассчитанный на последовательности сеток при $t = 2.109$, (б) сравнение энергетического спектра при $t = 0.293$ и $t = 2.109$; фурье-спектр энстрофии: (с) полученный при последовательном сгущении сетки, (д) полученный в моменты времени $t = 0.293$ и $t = 2.109$. Результаты на рис. б и д получены на сетке 2048^2 . Сплошные линии на графиках кинетической энергии и энстрофии указывают наклон асимптотик k^{-3} и k^{-1} соответственно. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

7. Инкремент неустойчивости одномодового возмущения

Дальнейшее изложение посвящено результатам расчета скорости роста возмущения (инкремента неустойчивости) в сдвиговом слое в зависимости от волнового числа ($Re = 4 \times 10^5$). В силу пространственной периодичности задачи результаты могут быть получены только для дискретного набора гармоник $l = 1 - 10$. Для определения скорости роста возмущения для конкретного волнового числа без анализа соответствующих фурье-образов можно воспользоваться временным смещением кривой роста интеграла энтропии (7) для двух возмущений разной амплитуды: $\delta_1 = 10^{-3}$ и $\delta_2 = 10^{-5}$ ($\delta_1 > \delta_2$). Тогда, считая ζ на линейной стадии экспоненциальной функцией времени, инкремент неустойчивости γ можно определить по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

где Δt — смещение кривой энтропии по оси времени. На рис. 10, а представлено сравнение результатов по схеме «КАБАРЕ», построенных в переменных (γ, α) , где $\alpha = 4\pi l / (L_X r)$ — безразмерное волновое число, с данными других авторов [Липавский и др., 2013] (схема девятого порядка точности), а также линейной теорией [Sandham, Reynolds, 1991]. Максимальная относительная ошибка в сравнении с линейной теорией не превышает 6 %. Такое расхождение может быть вызвано не численными погрешностями, а различиями в характерном числе Маха для течения (при увеличении M происходит резкое подавление скорости роста слоя смещения и величины инкремента неустойчивости). В приведенных расчетах это число составляло $M = 0.1$, в то время как сплошная кривая на рис. 10, а была построена Сэндхэмом и Рейнольдсом для числа Маха $M = 0.01$ и трехмерного сдвигового течения сжимаемой жидкости.

На практике определение временного сдвига кривой энтропии с помощью параллельного переноса не всегда возможно, так как скорость роста возмущения не является постоянной во времени и может зависеть от амплитуды. Определение временного сдвига можно провести, основываясь на кривых производных энтропии от времени $\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\zeta(t)$ (8), выбирая участки одинаковой скорости изменения. Данные графики, параболически сглаженные по 20 точкам, для гармоники с номером $l = 6$ представлены на рис. 10, б.

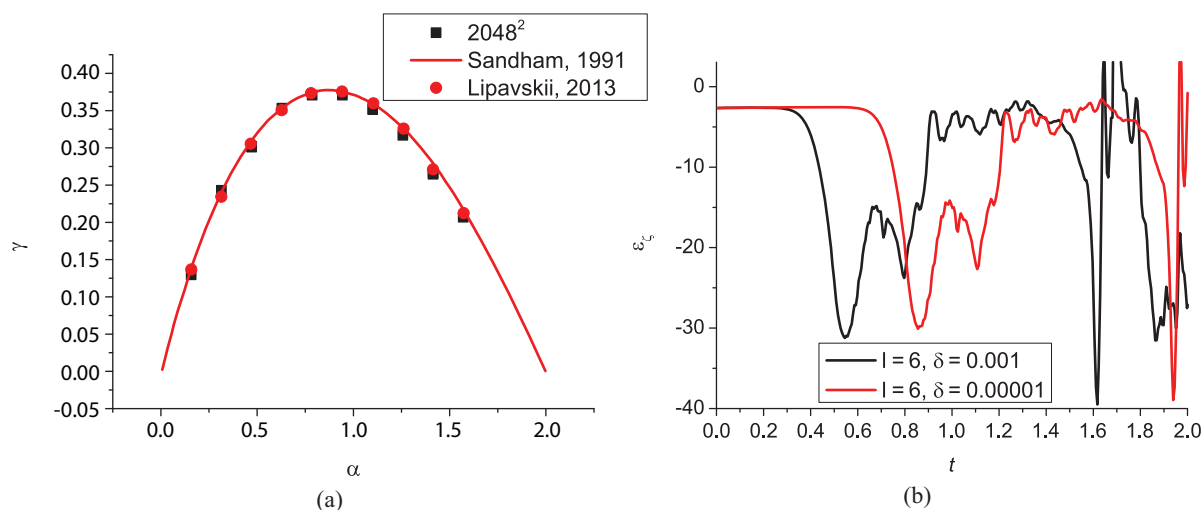


Рис. 10. (а) Зависимость инкремента неустойчивости γ от безразмерного волнового числа α , а также сравнение с результатами [Sandham, Reynolds, 1991] (сплошная кривая) и [Липавский и др., 2013] (круглые точки); (б) скорость изменения интеграла энтропии как функция времени для самой быстрорастущей гармоники $l = 6$. Цветная версия рисунка доступна на сайте журнала

Таблица 3. Характерные параметры одномодовых возмущений и их реализуемость в расчете

l	1	1	1	1	1	1	1
δ	0.01	0.008	0.006	0.005	0.001	10^{-4} (6)	10^{-5} (6)
l	2	2	2	3	3	4	4
δ	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5} (4)	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}
l	5	5	6	6	7	7	8
δ	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}
l	8	9	9	10	10		
δ	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-5}		

Следует отметить, что не всегда изначально задаваемое возмущение получает дальнейшее развитие: в определенных случаях (медленно растущие первая и вторая гармоники и относительно малые амплитуды возмущений $\delta_2 \propto 10^{-5}$) происходит его подавление другими быстро-растущими модами. Развитие такого возмущения приводит к появлению растущего участка на интегральной кривой энтропии и изменению ее дальнейшего поведения, даже если разница амплитуд составляет $|\delta_1 - \delta_2| \approx 10^{-3}$. Сводные результаты в случае одномодового возмущения представлены в таблице 3. Тесты, в которых генерируемая мода не совпадает с начальной, отмечены жирным шрифтом, а рядом в скобках указывается фактическая гармоника. Примечательным фактом является генерация самой быстрой ($l = 6$) дискретной моды при пробном моделировании достаточно сильной ($\delta = 0.05$) основной гармоники на грубой сетке 128^2 ячеек.

В факте существования волнового числа, дающего самое быстрорастущее возмущение, заключается одно из основных отличий данной постановки от классической, что обусловлено наличием процессов диффузии и вязкой диссипации. В частности, для классической постановки, можно показать, что не существует длины волны, соответствующей максимальному инкременту неустойчивости. Иными словами, рассматриваемая модель приводит к «ультрафиолетовой катастрофе» [Cushman-Roisin, 2005]. Эволюция слоя двойной вихревой пелены на начальных этапах является примером абсолютной неустойчивости [Drazin, Reid, 2004] в силу того, что начальное течение состоит из двух слоев жидкости, для которых отношение скоростей [Huerre, Monkewitz, 1985] превосходит 0.136.

В заключение рассмотрим зависимость γ от числа Рейнольдса $Re_{\delta_{\omega,0}}$ (11), вычисленного по начальной толщине слоя завихренности ($l = 1$ и число Маха $M = 0.2$). В рассматриваемом случае она составляет $\delta_{\omega,0} = 40$. На рис. 11 показано сравнение полученной зависимости (черные

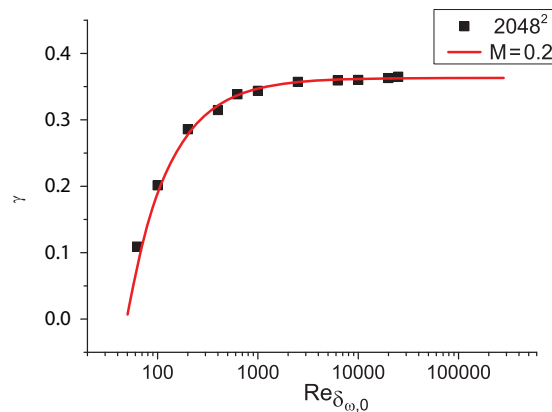


Рис. 11. Зависимость инкремента неустойчивости от числа Рейнольдса $Re_{\delta_{\omega,0}}$, полученная на сетке 2048^2 (черные точки), а также сравнение с результатами [Sandham, Reynolds, 1991] (сплошная кривая)

точки) с результатами [Sandham, Reynolds, 1991] при том же $M = 0.2$. Некоторые различия, вероятно, связаны со способом определения γ и приходятся на участок резкого роста при небольших числах $Re_{\delta_{\omega,0}}$.

8. Заключение

Численный метод «КАБАРЕ», реализованный в приближении слабой сжимаемости, был использован для моделирования неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, возникающей в двойном вихревом слое и приводящей к созданию развитого турбулентного течения. На основе анализа интегральных кривых энергии и энтропии, рассчитанных на последовательности сгущающихся сеток, показан процесс сходимости этих зависимостей к точным значениям. Интеграл кинетической энергии, а также скорости ее диссипации представляет собой монотонно убывающую функцию, на которую накладываются высокочастотные осцилляции. Установлено, что усредненное поведение $E = E(t)$ определяется вязкой диссипацией, тогда как существование колебаний связано с эффектом сжимаемости среды. Средние значения скорости диссипации $\bar{\epsilon}$, рассчитанные на участке асимптотического спада, хорошо согласуются с результатами теории однородной изотропной турбулентности, связывающей скорость диссипации кинетической энергии с интегральной энтропией. Большие значения числа Рейнольдса $Re = 4 \times 10^5$ в расчете приводят к тому, что доля диссипации, вследствие дилатации, оказывается сопоставимой с общими потерями энергии.

Качество моделирования тонких слоев завихренности определяется значением интеграла палинстрофии. Исследование его поведения на последовательности сеток в широком диапазоне Re показывает хорошее согласие с методами высокого порядка точности [Липавский и др., 2013; Sandham, Reynolds, 1991], а обращение к общей феноменологии позволяет отследить процесс потери точности решения. В частности, на самой мелкой сетке 2048^2 для основной гармоники $l = 1$ он имеет место при $Re \approx 10^6$, а для самой быстрорастущей моды — гораздо раньше, при $Re = 2.5 \times 10^5$.

Картины эволюции при различном сеточном разрешении позволяют отследить явление «недоразрешенности» слоев, связанное с появлением «паразитного» вихря, а также свидетельствуют о в целом правильном отображении черт двумерной турбулентности, обладающей прямым каскадом завихренности от больших вихрей к малым и обратным потоком энергии от малых масштабов к большим. С помощью расчета относительной ошибки показан процесс сеточной сходимости схемы по полю завихренности. Реализацию спектральных характеристик двумерной турбулентности подтверждает асимптотическое поведение кинетической энергии и энтропии, которые в инерционном интервале подчиняются закономерностям $E \propto k^{-3}$, $\omega^2/2 \propto k^{-1}$. К сожалению, на основе анализа скоростей диссипации интегральных величин и спектральных характеристик не удалось убедительно показать влияние схемной диссипации.

Расчет инкремента неустойчивости одномодового возмущения по смещению интегральной кривой энтропии для дискретного набора гармоник позволяет удовлетворительно предсказать дисперсионное соотношение в сравнении с методами высокого порядка точности. Расхождение полученных результатов, вероятно, связано с отличием чисел Маха M , для которых проводятся расчеты. Использование приближения слабой сжимаемости не позволяет проводить расчет при слишком малых M на мелких сетках в связи с резким ростом объема вычислений. С другой стороны, увеличение числа Маха требует изменения уравнения состояния с включением дополнительной переменной температуры.

По результатам исследования можно отметить, что использованная реализация способна успешно описывать основные характеристики двумерной турбулентности. Это обусловлено слабыми диссипативными свойствами схемы и хорошей вихреразрешающей способностью.

Список литературы (References)

- Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. Н. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — 481 с.
Goloviznin V. M., Zaytsev M. A., Karabasov S. A., Korotkin, I. N. Novyye algoritmy vychislitel'noy gidrodinamiki dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh kompleksov [Novel Algorithms of Computational Hydrodynamics for Multicore Computing]. — Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta [Moscow University Press], 2013. — 481 p. (in Russian).
- Глотов В. Ю. Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума: дисс. канд. физ.-мат. наук. — М.: ИБРАЭ РАН, 2014. — 134 с.
Glotov V. Yu. Matematicheskaya model' svobodnoy turbulentnosti na osnove printsipa maksimuma: diss. kand. fiz.-mat. nauk. — Moscow: IBRAE RAN, 2014. — 134 p. (in Russian).
- Глотов В. Ю., Головизнин В. М. Схема «КАБАРЕ» для двумерной несжимаемой жидкости в переменных функция тока–завихренность // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 9. — С. 89–104.
Glotov V. Y., Goloviznin V. M. Cabaret scheme for two-dimensional incompressible fluid in terms of the stream function-vorticity variables // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2012. — Vol. 4, No. 2. — P. 144–154.
- Елизарова Т. Г., Широков И. А. Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2013. — Т. 63. — 16 с.
Elizarova T. G., Shirokov I. A. Laminarnyy i turbulentnyy rezhimy raspada vikhrya Teylora–Grina [Laminar and turbulent regimes of the Taylor–Green vortex decay] // *Preprinty IPM im. M. V. Keldysya*. — 2013. — Vol. 63. — 16 p. (in Russian).
- Липавский М. В., Толстых А. И., Чигерёв Е. Н. О численном моделировании неустойчивости сдвиговых слоев на основе схемы с мультиоператорными аппроксимациями девятого порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 417–432.
Lipavskii M. V., Tolstykh A. I., Chigirev E. N. Numerical simulation of shear layer instability using a scheme with ninth-order multioperator approximations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2013. — Vol. 53, No. 3. — P. 296–310.
- Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть II. — Пермь: ПГТУ, 1998. — 138 с.
Frik P. G. Turbulentnost': modeli i podkhody. Kurs lektsiy. Chast' II. — Perm': PGU, 1998 — 138 p. (in Russian).
- Ayrton H. On a new method of driving off poisonous gases // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1919. — Vol. 96, No. 676. — P. 249–256.
- Batchelor G. K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // *Physics of Fluids*. — 1969. — Vol. 12, No. 12. — P. 233–239.
- Berger M., Helzer C. A simplified h-box method for embedded boundary grids // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2012. — Vol. 34, No. 2. — P. A861–A888.
- Brown D. L. Performance of under-resolved two-dimensional incompressible flow simulations // *Journal of Computational Physics*. — 1995. — Vol. 122, No. 1. — P. 165–183.
- Cortesi A. B., Smith B. L., Yadigaroglu G., Banerjee S. Numerical investigation of the entrainment and mixing processes in neutral and stably-stratified mixing layers // *Physics of Fluids*. — 1999. — Vol. 11, No. 1. — P. 162–185.
- Cushman-Roisin B. Kelvin–Helmholtz instability as a boundary-value problem // *Environmental Fluid Mechanics*. — 2005. — Vol. 5, No. 6. — P. 507–525.

- Davidson P.* Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers. — Oxford: OUP, 2004. — 678 p.
- DeBonis J.* Solutions of the Taylor-Green Vortex Problem Using High-Resolution Explicit Finite Difference Methods // Aerospace Sciences Meetings, American Institute of Aeronautics and Astronautics. — 2013. — P. 1–28.
- De Silva I. P. D., Fernando H. J. S., Eaton F., Hebert D.* Evolution of Kelvin–Helmholtz billows in nature and laboratory // Earth and Planetary Science Letters. — 1996. — Vol. 143. — P. 217–231.
- Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. Second edition. — Cambridge University Press, 2004. — 619 p.
- Gramer L.* Kelvin–Helmholtz instabilities // GFD-II. — 2007.
- Holzer M., Siggia E. D.* Turbulent mixing of a passive scalar // Physics of Fluids. — 1994. — Vol. 6, No. 5. — P. 1820–1837.
- Huerre P., Monkewitz P. A.* Absolute and convective instabilities in free shear layers // Journal of Fluid Mechanics. — 1985. — Vol. 159, No. 10. — P. 151–168.
- Intel Corporation.* Intel Math Kernel Library Reference Manual. — 2010. — July. — Document Number: 630813-036US.
- Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Physics of Fluids. — 1967. — Vol. 10, No. 7. — P. 1417–1423.
- Kulikov Y. M., Son E. E.* The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 774, No. 1. — P. 012094.
- Pozrikidis C.* Introduction to theoretical and computational fluid dynamics. — 2nd ed. // OUP. — 2011. — 1296 p.
- Sandham N. D., Reynolds W. C.* Three-dimensional simulations of large eddies in the compressible mixing layer // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 224. — P. 133–158.
- Smyth W. D.* Secondary kelvin-helmholtz instability in weakly stratified shear flow // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — 12. — Vol. 497. — P. 67–98.