

УДК: 519.632.4:519.612

О сходимости неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных эллиптических уравнений

А. А. Фомин^{1,a}, Л. Н. Фомина^{2,b}

¹Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева,
Россия, 650000, г. Кемерово, ул. Весенняя, д. 28

²Кемеровский государственный университет,
650043, г. Кемерово, ул. Красная, д. 6

E-mail: ^a fomin_aa@mail.ru, ^b lubafomina@mail.ru

Получено 23.05.2017.

Принято к публикации 31.10.2017.

Работа посвящена теоретическому обоснованию неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных уравнений, которые возникают при аппроксимации двумерных эллиптических дифференциальных уравнений на регулярной сетке. Высокая эффективность этого метода практически подтверждена при решении сложных тестовых задач, а также задач течения и теплообмена вязкой несжимаемой жидкостью. Однако теоретические положения, объясняющие высокую скорость сходимости и устойчивость метода, до сих пор оставались за кадром внимания, что и послужило причиной проведения настоящего исследования. В работе подробно излагается процедура эквивалентных и приближенных преобразований исходной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) как в матрично-векторной форме, так и в виде расчетных формул метода. При этом для наглядности изложения материала ключевые моменты преобразований иллюстрируются схемами изменения разностных шаблонов, отвечающих преобразованному уравнению. Конечная цель процедуры преобразований — получение канонической формы записи метода, из которого следует его корректность в случае сходимости решения. На основе анализа структур и элементных составов матричных операторов проводится оценка их норм и, соответственно, доказывается сходимость метода для произвольных начальных векторов.

В специальном случае слабых ограничений на искомое решение производится оценка нормы оператора перехода. Показывается, что с ростом размерности матрицы этого оператора величина его нормы уменьшается пропорционально квадрату (или кубу, в зависимости от версии метода) шага сеточного разбиения области решения задачи. С помощью простых оценок получено необходимое условие устойчивости метода. Также даются рекомендации относительно выбора по порядку величины оптимального итерационного параметра компенсации. Теоретические выводы проиллюстрированы результатами решения тестовых задач. Показано, что при увеличении размерности сеточного разбиения области решения количество итераций, необходимых для достижения заданной точности решения, при прочих равных условиях уменьшается. Также продемонстрировано, что если слабые ограничения на решение нарушены при выборе его начального приближения, то в полном соответствии с полученными теоретическими результатами скорость сходимости метода существенно уменьшается.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, итерационный метод решения, сходимость метода

UDC: 519.632.4:519.612

On the convergence of the implicit iterative line-by-line recurrence method for solving difference elliptical equations

A. A. Fomin^{1,a}, L. N. Fomina^{2,b}

¹T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University,
Vesennaya st. 28, Kemerovo, 650000, Russia

²Kemerovo State University,
Krasnaya st. 6, Kemerovo, 650043, Russia

E-mail: ^a fomin_aa@mail.ru, ^b lubafomina@mail.ru

Received 23.05.2017.

Accepted for publication 31.10.2017.

In the article a theory of the implicit iterative line-by-line recurrence method for solving the systems of finite-difference equations which arise as a result of approximation of the two-dimensional elliptic differential equations on a regular grid is stated. On the one hand, the high effectiveness of the method has confirmed in practice. Some complex test problems, as well as several problems of fluid flow and heat transfer of a viscous incompressible liquid, have solved with its use. On the other hand, the theoretical provisions that explain the high convergence rate of the method and its stability are not yet presented in the literature. This fact is the reason for the present investigation. In the paper, the procedure of equivalent and approximate transformations of the initial system of linear algebraic equations (SLAE) is described in detail. The transformations are presented in a matrix-vector form, as well as in the form of the computational formulas of the method. The key points of the transformations are illustrated by schemes of changing of the difference stencils that correspond to the transformed equations. The canonical form of the method is the goal of the transformation procedure. The correctness of the method follows from the canonical form in the case of the solution convergence. The estimation of norms of the matrix operators is carried out on the basis of analysis of structures and element sets of the corresponding matrices. As a result, the convergence of the method is proved for arbitrary initial vectors of the solution of the problem.

The norm of the transition matrix operator is estimated in the special case of weak restrictions on a desired solution. It is shown, that the value of this norm decreases proportionally to the second power (or third degree, it depends on the version of the method) of the grid step of the problem solution area in the case of transition matrix order increases. The necessary condition of the method stability is obtained by means of simple estimates of the vector of an approximate solution. Also, the estimate in order of magnitude of the optimum iterative compensation parameter is given. Theoretical conclusions are illustrated by using the solutions of the test problems. It is shown, that the number of the iterations required to achieve a given accuracy of the solution decreases if a grid size of the solution area increases. It is also demonstrated that if the weak restrictions on solution are violated in the choice of the initial approximation of the solution, then the rate of convergence of the method decreases essentially in full accordance with the deduced theoretical results.

Keywords: system of linear algebraic equations, iterative method, convergence of method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 857–880 (Russian).

1. Введение

Современные методы решения задач математической физики, как правило, сводятся к разностной аппроксимации многомерных дифференциальных уравнений, которая, в свою очередь, приводит к построению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$A\vec{\Phi} = \vec{f}, \quad (1)$$

матрицы которых имеют большую размерность и разреженно-упорядоченную структуру. Для решения подобных систем в настоящее время широкое распространение получили различные варианты градиентных методов [Ильин, 2000; Самарский, Николаев, 1978; Saad, 1996; Van der Vorst, 1992], которые, однако, сами по себе не характеризуются высокими скоростями сходимости [Saad, 1996], поэтому на практике их применение сопровождается использованием технологии предобуславливания. Также широко применяются методы неполной факторизации, позволяющие строить эффективные итерационные алгоритмы, которые на классе решений $\vec{\Phi} = \text{const}$ являются прямыми [Ильин, 1995; Ильин, 2000; Гинкин и др., 2009].

Как известно, при численном решении краевых эллиптических задач выполнение простых разумных правил разностной аппроксимации дифференциальных операторов позволяет сохранять свойство эллиптичности исходной краевой задачи на уровне разностных схем [Патанкар, 1984]. Иными словами, необходимое условие однозначной разрешимости рассматриваемых задач — удовлетворение принципу максимума — выполняется не только для дифференциальной постановки, но и для соответствующей ей разностной постановки [Самарский, Николаев, 1978; Ильин, 1995; Самарский, Вабищевич, 1999; Самарский, Гулин, 1989]. В связи с этим наиболее перспективными являются те направления разработки новых методов решения разностных эллиптических СЛАУ, в которых на уровне алгоритма учитывается фундаментальное свойство краевых эллиптических задач обязательной чувствительности решения в каждой точке области определения задачи к возмущению в любой иной, включая граничную, точке. Хорошим примером здесь можно считать модифицированный полинейный метод [Зверев, 1998], удачно сочетающий в себе практически одномоментный учет возмущений со всех границ расчетной области и принцип компенсации Н. И. Булеева [Ильин, 1995; Ильин, 2000]. При этом данный метод является прямым на классе линейных по пространственным координатам векторов решений.

Это же фундаментальное свойство краевых эллиптических задач положено в основу неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения разностных эллиптических СЛАУ. Объединение предельно высокой степени неявности и технологии компенсации (в виде так называемой внутренней экстраполяции) позволило построить ряд алгоритмов данного метода [Фомина, 2009; Фомин, Фомина, 2010]. Все они являются прямыми на классе линейных по пространственным координатам векторов решений, а один из них — прямым на классе квадратных по пространству векторов. Их высокая эффективность проиллюстрирована на примерах решения систем линейных уравнений с матрицами положительного типа, которые возникают при разностной аппроксимации тестовых краевых задач на базе дифференциальных уравнений второго порядка [Фомин, Фомина, 2009; Фомин, Фомина, 2010], а также при численном моделировании течений несжимаемой вязкой жидкости [Фомин, Фомина, 2014; Фомин, Фомина, 2015]. Однако вопросы теоретического обоснования этого метода до сих пор не получили в литературе достаточного отражения. Поэтому в целях завершенности изложения неявного итерационного полинейного рекуррентного метода представляется необходимым доказать его сходимость и теоретически обосновать его эффективность в рамках тех условий, при которых он применяется.

2. Формулировка задачи

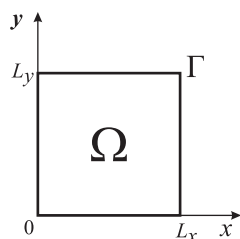


Рис. 1. Схема расчетной области

Пусть корректно определена некоторая стационарная краевая задача в двумерной прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$ (рис. 1). Внутри Ω поведение искомой функции $\Phi(x, y)$ описывается дифференциальным уравнением

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S, \quad (2)$$

где U, V — компоненты скорости течения, ν_x, ν_y — коэффициенты переноса, S — источник. На границе области Γ в общем случае имеют место граничные условия третьего рода:

$$a_\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} + b_\Gamma \Phi = c_\Gamma, \quad (3)$$

где $a_\Gamma, b_\Gamma, c_\Gamma$ — известные величины, а \bar{n} — координатная нормаль к границе.

Область Ω покрывается прямоугольной сеткой, содержащей n узлов по координате x и m узлов по координате y , на базе которой производится разностная аппроксимация (2)–(3) методом контрольного объема [Патанкар, 1984], в результате чего возникают СЛАУ вида (1). Пусть в общем случае во внутренних узлах разностные уравнения строятся по пятиточечному шаблону (рис. 2, а):

$$a_{P_{ij}} \Phi_{ij} = a_{E_{ij}} \Phi_{i+1j} + a_{W_{ij}} \Phi_{i-1j} + a_{N_{ij}} \Phi_{ij+1} + a_{S_{ij}} \Phi_{ij-1} + b_{ij}; \quad (4)$$

на границах области — по четырехточечному шаблону (рис. 2, б, для примера взята граница $y = 0$):

$$a_{P_{i1}} \Phi_{i1} = a_{E_{i1}} \Phi_{i+11} + a_{W_{i1}} \Phi_{i-11} + a_{N_{i1}} \Phi_{i2} + b_{i1}; \quad (5)$$

в углах области — по трехточечному шаблону (рис. 2, в, для примера взят угол $x = 0, y = 0$):

$$a_{P_{11}} \Phi_{11} = a_{E_{11}} \Phi_{21} + a_{N_{11}} \Phi_{12} + b_{11}. \quad (6)$$

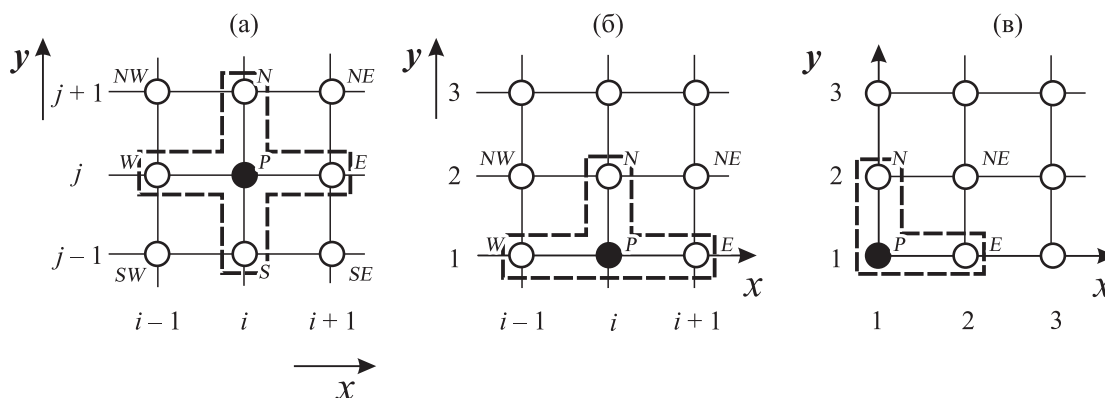


Рис. 2. Типы разностных шаблонов: (а) общий, (б) приграничный, (в) угловой

Здесь и далее выбранная форма записи уравнений предполагает неотрицательность коэффициентов при неизвестных. В дальнейшем при необходимости знак минус перед коэффициентами уравнений и элементами матриц выписывается явно.

В конечном счете для изложения сути неявного итерационного полинейного рекуррентного метода не принципиально, какой вид имеет исходная дифференциальная постановка краевой

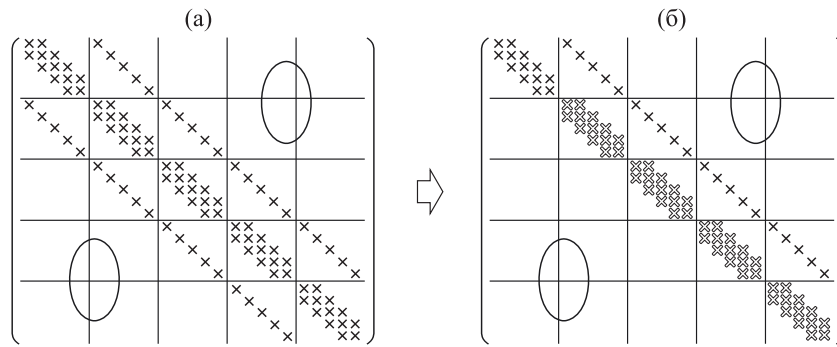


Рис. 3. Клеточная структура матрицы СЛАУ: (а) исходная, (б) окончательно преобразованная

задачи и каким способом она сводится к СЛАУ вида (1). Принципиально лишь то, что матрица A системы должна быть матрицей положительного типа [Ильин, 1995; Ильин, 2000] и иметь ленточную пятидиагональную структуру (рис. 3, а).

Общее количество неизвестных и, следовательно, размерность матрицы A равны числу $N = n \times m$. Такую матрицу удобно разбить на отдельные квадратные клетки, количество которых (для определенности) пусть будет $n \times n$, тогда размерность каждой клетки — $m \times m$. Если ввести обозначение этих клеток как A_{pq} , то матрица A может быть представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее для наглядности и не в ущерб общности изложения материала выбрана сетка 5×5 . Понятно, что в рамках рассматриваемого случая только клетки A_{pp} , $A_{p,p-1}$ и $A_{p,p+1}$ будут отличны от нуля, все остальные — нулевые; причем A_{pp} — трехдиагональные, а $A_{p,p-1}$ и $A_{p,p+1}$ — диагональные матрицы. В частности, первые две клетки, A_{11} и A_{12} , в верхнем ряду матрицы A соответствуют уравнениям на левой границе области (линия $i = 1$) и имеют следующий вид:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{P_{11}} - a_{N_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{S_{12}} & a_{P_{12}} - a_{N_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{S_{13}} & a_{P_{13}} - a_{N_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{S_{14}} & a_{P_{14}} - a_{N_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{S_{15}} & a_{P_{15}} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -a_{E_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{E_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{E_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{E_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{E_{15}} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм одной итерации метода делится на два этапа: прямой и обратный проходы вдоль так называемой глобальной координаты. В данном случае для определенности в качестве глобальной выбрана координата x ($1 \leq i \leq n$). Цель прямого прохода: с помощью преобразований системы, как эквивалентных, так и приближенных, привести матрицу системы к почти верхнетреугольному виду (рис. 3, б). То есть матрица преобразованной системы, в противовес исходной, должна стать разложимой [Ильин, 1995]. На этом и последующих рисунках черными крестиками обозначены элементы, не изменившиеся после прямого прохода преобразований по отношению к исходной матрице A , а белыми — изменившиеся.

Нетрудно понять, что система с такой четырехдиагональной матрицей последовательно поклеточно разрешима с помощью трехточечных скалярных прогонок вдоль линий $x = \text{const}$,

причем прогонки начинаются вдоль линии с максимальным номером $i = n$ и заканчиваются вдоль линии $i = 1$. Этот обратный проход по индексу i и есть второй этап алгоритма.

В работе [Фомина, 2009] изложены две версии метода: так называемые LR1 и LR2, алгоритмически незначительно отличающиеся друг от друга. Поэтому доказательство сходимости неявного итерационного полилинейного рекуррентного метода будет проведено на примере алгоритма LR1, поскольку для алгоритма LR2 все рассуждения проводятся по аналогии.

3. Прямой ход преобразований

Между собственно уравнениями системы вида (4)–(6), шаблонами дискретизации (рис. 2) и схемой структуры матрицы (рис. 3) легко прослеживается взаимно-однозначное соответствие. Поэтому преобразования уравнений удобно иллюстрировать изменением соответствующих шаблонов и схемы структуры матрицы СЛАУ.

Собственно преобразования прямого хода начинаются с комбинации первых двух уравнений системы:

$$\begin{aligned} a_{P_{11}}\Phi_{11} &= a_{E_{11}}\Phi_{21} + a_{N_{11}}\Phi_{12} + b_{11}, \\ a_{P_{12}}\Phi_{12} &= a_{E_{12}}\Phi_{22} + a_{N_{12}}\Phi_{13} + a_{S_{12}}\Phi_{11} + b_{12}, \end{aligned}$$

с целью исключения Φ_{11} , что позволяет получить уравнение

$$\alpha_{P_{12}}\Phi_{12} = \alpha_{N_{12}}\Phi_{13} + \alpha_{E_{12}}\Phi_{22} + \alpha_{S_{E_{12}}}\Phi_{21} + \beta_{12}, \quad (7)$$

где $\beta_{12} = (a_{S_{12}}/a_{P_{11}})b_{11} + b_{12}$, $\alpha_{P_{12}} = a_{P_{12}} - (a_{S_{12}}/a_{P_{11}})a_{N_{11}}$, $\alpha_{S_{E_{12}}} = (a_{S_{12}}/a_{P_{11}})a_{E_{11}}$, $\alpha_{N_{12}} = a_{N_{12}}$, $\alpha_{E_{12}} = a_{E_{12}}$.

Дальнейшая комбинация (7) с третьим уравнением системы

$$a_{P_{13}}\Phi_{13} = a_{E_{13}}\Phi_{23} + a_{N_{13}}\Phi_{14} + a_{S_{13}}\Phi_{12} + b_{13}$$

с целью исключения Φ_{12} приводит к уравнению

$$\alpha_{P_{13}}\Phi_{13} = \alpha_{N_{13}}\Phi_{14} + \alpha_{E_{13}}^0\Phi_{23} + \alpha_{S_{E_{13}}}^0\Phi_{22} + \left(\frac{a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}\right)\alpha_{S_{E_{12}}}\Phi_{21} + \beta_{13}^0, \quad (8)$$

где $\beta_{13}^0 = (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})\beta_{12} + b_{13}$, $\alpha_{P_{13}} = a_{P_{13}} - (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})a_{N_{12}}$, $\alpha_{S_{E_{13}}}^0 = (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})a_{E_{12}}$, $\alpha_{N_{13}} = a_{N_{13}}$, $\alpha_{E_{13}}^0 = a_{E_{13}}$.

Проведенные преобразования могут быть представлены в виде умножения слева невырожденных матриц $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ на левую и правую части системы уравнений (1):

$$\left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}\right)A\vec{\Phi} = \left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}\right)\vec{f}. \quad (9)$$

При этом только диагональные клетки матриц $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ отличны от нуля, и из них первые клетки в верхнем ряду имеют следующий вид:

$$M_{11(+)}^{(11)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{S_{12}}}{a_{P_{11}}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_{11(+)}^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

остальные диагональные клетки — единичные матрицы. Здесь и далее, как и для матрицы A , нижние индексы обозначают номер клетки.

Матрицы $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ представляют собой частный случай так называемых элементарных нижних треугольных матриц [Самарский, Гулин, 1989]. Как известно, такие матрицы не вырождены, а само преобразование с их помощью будет устойчивым в силу свойства строчного диагонального преобладания элементов исходной матрицы A .

После умножения исходной системы на матрицы $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ преобразованные клетки $(M_{(+)}^{(12)} M_{(+)}^{(11)} A)_{11}$ и $(M_{(+)}^{(12)} M_{(+)}^{(11)} A)_{12}$ приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} (M_{(+)}^{(12)} M_{(+)}^{(11)} A)_{11} &= \begin{pmatrix} a_{P_{11}} & -a_{N_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{P_{12}} & -\alpha_{N_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{P_{13}} & -\alpha_{N_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{S_{14}} & a_{P_{14}} & -a_{N_{14}} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{S_{15}} & a_{P_{15}} \end{pmatrix}, \\ (M_{(+)}^{(12)} M_{(+)}^{(11)} A)_{12} &= \begin{pmatrix} -a_{E_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{SE_{12}} & -\alpha_{E_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{SE_{12}} \left(\frac{a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}} \right) & -\alpha_{SE_{13}}^0 & -\alpha_{E_{13}}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{E_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{E_{15}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На рис. 4 представлена схема проведенных преобразований на уровне комбинации разностных шаблонов (рис. 4, а) и изменения структуры матрицы системы (рис. 4, б). Понятно, что если продолжать и далее действовать по той же схеме преобразований, то количество слагаемых, связанных с узлами на линии $i = 2$, будет нарастать от шага к шагу. Поэтому для их ограничения, а точнее для ограничения количества неизвестных в одном уравнении, следует провести неэквивалентное преобразование, а именно: выразить приближенно неизвестное в узле $(2, 1)$ Φ_{21} через Φ_{22} и Φ_{23} . Для этого вводятся понятие приращения решения $\Delta \vec{\Phi}^{k+1} = \vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\Phi}^k$ (k – номер итерации) и, соответственно, итерационная форма записи алгоритма. Тогда задачу исключения в (8) слагаемого с Φ_{21} можно решить с помощью формулы линейной экстраполяции приращения решения:

$$\Delta \Phi_{ij}^{k+1} = \theta (2\Delta \Phi_{ij+1}^{k+1} - \Delta \Phi_{ij+2}^{k+1}), \tag{10}$$

которая в узле $(2, 1)$ может быть переписана как

$$\Phi_{21}^{k+1} = \Phi_{21}^k + \theta [(2\Phi_{22}^{k+1} - \Phi_{23}^{k+1}) - (2\Phi_{22}^k - \Phi_{23}^k)].$$

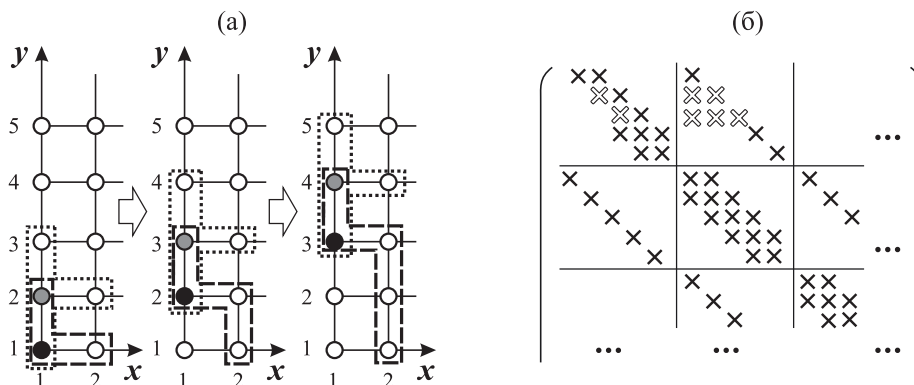


Рис. 4. Первые два шага преобразования СЛАУ: (а) разностные шаблоны, (б) структура матрицы

Здесь $\theta \in [0, 1]$ — параметр компенсации [Ильин, 1995; Ильин, 2000]. Формула (10) определяет суть алгоритма LR1. Для второго алгоритма LR2 вместо (10) используется квадратичная экстраполяция приращения решения, которая, с одной стороны, повышает точность предсказания поведения решения и, как следствие, скорость сходимости метода, но, с другой стороны, как показал вычислительный эксперимент [Фомин, Фомина, 2009], может некритично понижать устойчивость итерационного процесса. В остальном эти алгоритмы совпадают.

Уравнение (8) с учетом (10) примет вид

$$\alpha_{P_{13}} \Phi_{13}^{k+1} = \alpha_{N_{13}} \Phi_{14}^{k+1} + \alpha_{E_{13}} \Phi_{23}^{k+1} + \alpha_{SE_{13}} \Phi_{22}^{k+1} + \beta_{13}, \quad (11)$$

где $\beta_{13} = b_{13} + (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})\beta_{12} + \eta_{12}^\alpha [\Phi_{21}^k - \theta(2\Phi_{22}^k - \Phi_{23}^k)]$, $\alpha_{P_{13}} = a_{P_{13}} - (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})\alpha_{N_{12}}$, $\alpha_{N_{13}} = a_{N_{13}}$, $\alpha_{SE_{13}} = (a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}})\alpha_{E_{12}} + 2\theta\eta_{12}^\alpha$, $\alpha_{E_{13}} = a_{E_{13}} - \theta\eta_{12}^\alpha$; $\eta_{12}^\alpha = a_{S_{13}}(\alpha_{SE_{12}}/\alpha_{P_{12}})$.

В матрично-векторной форме записи проведенные приближенные преобразования эквивалентны введению матриц $L_{(+)}^{(12)}$ и $B_{(+)}^{(12)}$, у которых вторые клетки в первом ряду имеют следующий вид:

$$B_{12(+)}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\eta_{12}^\alpha & \eta_{12}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{12(+)}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\eta_{12}^\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

все остальные клетки — нулевые. При этом матричное уравнение (9) примет вид

$$\left[\left(\prod_{j=2}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) A + (\theta B_{(+)}^{(12)} - L_{(+)}^{(12)}) \right] \vec{\Phi}^{k+1} = (\theta B_{(+)}^{(12)} - L_{(+)}^{(12)}) \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=2}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) \vec{f}. \quad (12)$$

В силу того, что добавление матрицы $(\theta B_{(+)}^{(12)} - L_{(+)}^{(12)})$ к $\left(\prod_{j=2}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) A$ не изменило элементы клеток главной диагонали последней, сохранив при этом строчное диагональное преобладание (см. формулы в (11)), квадратная скобка в (12) суть невырожденная матрица [Фаддеев, Фаддеева, 1963]. Следовательно, проведенные эквивалентно-приближенные преобразования не изменили первоначального свойства невырожденности матрицы A .

Поскольку структура уравнения (11) совпадает со структурой уравнения (7), то (11) можно аналогичным образом скомпоновать с четвертым уравнением системы (1) и снова получить уравнение, совпадающее по структуре с (11). И так далее.

Для произвольного $j = J > 3$ преобразованное уравнение будет иметь вид

$$\alpha_{P_{1j}} \Phi_{1j}^{k+1} = \alpha_{N_{1j}} \Phi_{1j+1}^{k+1} + \alpha_{E_{1j}} \Phi_{2j}^{k+1} + \alpha_{SE_{1j}} \Phi_{2j-1}^{k+1} + \beta_{1j}, \quad (13)$$

где $\beta_{1j} = b_{1j} + (a_{S_{1j}}/\alpha_{P_{1j-1}})\beta_{1j-1} + \eta_{1j-1}^\alpha [\Phi_{2j-2}^k - \theta(2\Phi_{2j-1}^k - \Phi_{2j}^k)]$, $\alpha_{P_{1j}} = a_{P_{1j}} - (a_{S_{1j}}/\alpha_{P_{1j-1}})\alpha_{N_{1j-1}}$, $\alpha_{SE_{1j}} = (a_{S_{1j}}/\alpha_{P_{1j-1}})\alpha_{E_{1j-1}} + 2\theta\eta_{1j-1}^\alpha$, $\alpha_{N_{1j}} = a_{N_{1j}}$, $\alpha_{E_{1j}} = a_{E_{1j}} - \theta\eta_{1j-1}^\alpha$; $\eta_{1j-1}^\alpha = a_{S_{1j}}(\alpha_{SE_{1j-1}}/\alpha_{P_{1j-1}})$.

И, соответственно, на этот момент преобразований система в матрично-векторной форме записи примет следующий вид:

$$\left[\left(\prod_{j=J-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) A + \Delta_{(+)}^{(1J-1)} \right] \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{(+)}^{(1J-1)} \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=J-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) \vec{f}, \quad (14)$$

где для компактности записи и удобства восприятия введено обозначение

$$\Delta_{(+)}^{(1j-1)} = (\theta B_{(+)}^{(1j-1)} - L_{(+)}^{(1j-1)}) + \sum_{s=J-1}^3 \left(\prod_{j=J-1}^s M_{(+)}^{(1j)} \right) (\theta B_{(+)}^{(1s-1)} - L_{(+)}^{(1s-1)}).$$

При подходе к верхней границе $j = m$ имеют место два уравнения: исходное, неизвестные которого теперь уже трактуются как принадлежащие $k + 1$ слою итераций:

$$a_{P_{1m}} \Phi_{1m}^{k+1} = a_{E_{1m}} \Phi_{2m}^{k+1} + a_{S_{1m}} \Phi_{1m-1}^{k+1} + b_{1m},$$

и уравнение (13), записанное для $j = m - 1$ как

$$\alpha_{P_{1m-1}} \Phi_{1m-1}^{k+1} = \alpha_{N_{1m-1}} \Phi_{1m}^{k+1} + \alpha_{E_{1m-1}} \Phi_{2m-1}^{k+1} + \alpha_{S_{E_{1m-1}}} \Phi_{2m-2}^{k+1} + \beta_{1m-1}.$$

Их эквивалентно-приближенное преобразование с целью исключения Φ_{1m-1}^{k+1} и Φ_{2m-2}^{k+1} приводит к уравнению

$$\alpha_{P_{1m}} \Phi_{1m}^{k+1} = \alpha_{E_{1m}} \Phi_{2m}^{k+1} + \alpha_{S_{E_{1m}}} \Phi_{2m-1}^{k+1} + \beta_{1m}, \tag{15}$$

где $\beta_{1m} = b_{1m} + (a_{S_{1m}}/\alpha_{P_{1m-1}})\beta_{1m-1} + \eta_{1m-1}^\alpha [\Phi_{2m-2}^k - \theta(2\Phi_{2m-1}^k - \Phi_{2m}^k)]$, $\alpha_{E_{1m}} = a_{E_{1m}} - \theta\eta_{1m-1}^\alpha$, $\alpha_{P_{1m}} = a_{P_{1m}} - (a_{S_{1m}}/\alpha_{P_{1m-1}})\alpha_{N_{1m-1}}$, $\alpha_{S_{E_{1m}}} = (a_{S_{1m}}/\alpha_{P_{1m-1}})\alpha_{E_{1m-1}} + 2\theta\eta_{1m-1}^\alpha$; $\eta_{1m-1}^\alpha = a_{S_{1m}}(\alpha_{S_{E_{1m-1}}}/\alpha_{P_{1m-1}})$.

Сама же преобразованная система при этом будет иметь вид

$$\left[\left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) A + \Delta_{(+)}^{(1m-1)} \right] \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{(+)}^{(1m-1)} \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} \right) \vec{f}, \tag{16}$$

где $\Delta_{(+)}^{(1m-1)} = \sum_{s=m}^3 \left(\prod_{j=m}^s M_{(+)}^{(1j)} \right) (\theta B_{(+)}^{(1s-1)} - L_{(+)}^{(1s-1)})$, причем для компактности записи введена матрица $M_{(+)}^{(1m)} \equiv E$, где E — единичная матрица.

Точно такие же преобразования исходной системы (1) на линии $i = 1$, но при уменьшении индекса j от m до 1, позволяют записать при произвольном $j = J < m - 2$ очередное преобразованное уравнение:

$$\gamma_{P_{1j}} \Phi_{1j}^{k+1} = \gamma_{E_{1j}} \Phi_{2j}^{k+1} + \gamma_{S_{1j}} \Phi_{1j-1}^{k+1} + \gamma_{NE_{1j}} \Phi_{2j+1}^{k+1} + \delta_{1j}, \tag{17}$$

где $\delta_{1j} = b_{1j} + (a_{N_{1j}}/\gamma_{P_{1j+1}})\delta_{1j+1} + \eta_{1j+1}^\gamma [\Phi_{2j+2}^k - \theta(2\Phi_{2j+1}^k - \Phi_{2j}^k)]$, $\gamma_{P_{1j}} = a_{P_{1j}} - (a_{N_{1j}}/\gamma_{P_{1j+1}})\gamma_{S_{1j+1}}$, $\gamma_{NE_{1j}} = (a_{N_{1j}}/\gamma_{P_{1j+1}})\gamma_{E_{1j+1}} + 2\theta\eta_{1j+1}^\gamma$, $\gamma_{S_{1j}} = a_{S_{1j}}$, $\gamma_{E_{1j}} = a_{E_{1j}} - \theta\eta_{1j+1}^\gamma$; $\eta_{1j+1}^\gamma = a_{N_{1j}}(\gamma_{NE_{1j+1}}/\gamma_{P_{1j+1}})$; а в матрично-векторной форме — всю преобразованную на этот момент систему

$$\left[\left(\prod_{j=J+1}^m M_{(-)}^{(1j)} \right) A + \Delta_{(-)}^{(1J+1)} \right] \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{(-)}^{(1J+1)} \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=J+1}^m M_{(-)}^{(1j)} \right) \vec{f}. \tag{18}$$

Здесь $\Delta_{(-)}^{(1J+1)} = (\theta B_{(-)}^{(1J+1)} - L_{(-)}^{(1J+1)}) + \sum_{s=J+1}^{m-2} \left(\prod_{j=J+1}^s M_{(-)}^{(1j)} \right) (\theta B_{(-)}^{(1s+1)} - L_{(-)}^{(1s+1)})$, а матрицы $M_{(-)}^{(1j)}$, $B_{(-)}^{(1j)}$, $L_{(-)}^{(1j)}$ введены по аналогии с $M_{(+)}^{(1j)}$, $B_{(+)}^{(1j)}$, $L_{(+)}^{(1j)}$.

Для примера можно выписать первые диагональные клетки матриц $M_{(-)}^{(1m)}$ и $M_{(-)}^{(1m-1)}$:

$$M_{11(-)}^{(1m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a_{N_{1m-1}}}{a_{P_{1m}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_{11(-)}^{(1m-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_{N_{1m-2}}}{\gamma_{P_{1m-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

другие диагональные клетки $M_{(-)}^{(1m)}$ и $M_{(-)}^{(1m-1)}$ — единичные матрицы, а все остальные — нулевые. Соответственно, вторые клетки в первом ряду матриц $B_{(-)}^{(1m-1)}$ и $L_{(-)}^{(1m-1)}$ имеют следующий вид:

$$B_{12(-)}^{(1m-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{1m-1}^\gamma & -2\eta_{1m-1}^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{12(-)}^{(1m-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{1m-1}^\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а все остальные клетки этих матриц — нулевые.

При достижении эквивалентно-приближенных преобразований нижней границы ($j = 1$) система уравнений в матрично-векторной форме запишется как

$$\left[\left(\prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(1j)} \right) A + \Delta_{(-)}^{(12)} \right] \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{(-)}^{(12)} \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(1j)} \right) \vec{f}, \quad (19)$$

где $\Delta_{(-)}^{(12)} = \sum_{s=1}^{m-2} \left(\prod_{j=1}^s M_{(-)}^{(1j)} \right) (\theta B_{(-)}^{(1s+1)} - L_{(-)}^{(1s+1)})$ и введена матрица $M_{(-)}^{(11)} \equiv E$.

Сравнение исходного уравнения системы (1) в узле (1, J),

$$a_{P_{1J}} \Phi_{1J}^{k+1} = a_{E_{1J}} \Phi_{2J}^{k+1} + a_{N_{1J}} \Phi_{1J+1}^{k+1} + a_{S_{1J}} \Phi_{1J-1}^{k+1} + b_{1J}, \quad (20)$$

с уравнениями (13) и (17) для того же узла говорит о совпадении коэффициентов при Φ_{1J+1}^{k+1} в (20) и (13) и при Φ_{1J-1}^{k+1} в (20) и (17). Следовательно, сумма (13) и (17) за вычетом (20) позволяет «зеркалировать» шаблон исходного уравнения, оставляя при этом главный элемент в узле (1, J) (рис. 5, а):

$$p_{P_{1J}} \Phi_{1J}^{k+1} = p_{E_{1J}} \Phi_{2J}^{k+1} + p_{SE_{1J}} \Phi_{2J-1}^{k+1} + p_{NE_{1J}} \Phi_{2J+1}^{k+1} + q_{1J}, \quad (21)$$

где $q_{1J} = \beta_{1J} + \delta_{1J} - b_{1J}$, $p_{P_{1J}} = \alpha_{P_{1J}} + \gamma_{P_{1J}} - a_{P_{1J}}$, $p_{E_{1J}} = a_{E_{1J}} - \theta(\eta_{1J-1}^\alpha + \eta_{1J+1}^\gamma)$, $p_{SE_{1J}} = \alpha_{SE_{1J}}$, $p_{NE_{1J}} = \gamma_{NE_{1J}}$.

Далее в лемме 3.1 будет показано, что коэффициенты при неизвестных уравнения (21) положительны и сохраняют свойство строчного диагонального преобладания. В матрично-векторной форме система примет вид

$$\left[\left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} + \prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(1j)} - E \right) A + \left(\Delta_{(+)}^{(1m-1)} + \Delta_{(-)}^{(12)} \right) \right] \vec{\Phi}^{k+1} = \left(\Delta_{(+)}^{(1m-1)} + \Delta_{(-)}^{(12)} \right) \vec{\Phi}^k + \left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} + \prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(1j)} - E \right) \vec{f}. \quad (22)$$

Комбинация (21) с пятиточечным уравнением типа (4), записанным для узла (2, J) и $k + 1$ итерации, с целью исключения Φ_{1J}^{k+1} позволяет получить четырехточечное «граничное» уравнение на линии $i = 2$, структура которого совпадает со структурой граничного уравнения (20) на линии $i = 1$ (рис. 6, а):

$$\bar{a}_{P_{2J}} \Phi_{2J}^{k+1} = \bar{a}_{E_{2J}} \Phi_{3J}^{k+1} + \bar{a}_{N_{2J}} \Phi_{2J+1}^{k+1} + \bar{a}_{S_{2J}} \Phi_{2J-1}^{k+1} + \bar{b}_{2J}, \quad (23)$$

где $\bar{b}_{2J} = b_{2J} + \bar{\eta}_{2J} q_{1J}$, $\bar{a}_{P_{2J}} = a_{P_{2J}} - \bar{\eta}_{2J} p_{E_{1J}}$, $\bar{a}_{S_{2J}} = a_{S_{2J}} + \bar{\eta}_{2J} p_{SE_{1J}}$, $\bar{a}_{N_{2J}} = a_{N_{2J}} + \bar{\eta}_{2J} p_{NE_{1J}}$, $\bar{a}_{E_{2J}} = a_{E_{2J}}$; $\bar{\eta}_{2J} = a_{W_{2J}} / p_{P_{1J}}$.

Для выражения проведенного преобразования в матрично-векторной форме следует обратить внимание на то, что первая клетка первого ряда матрицы в квадратных скобках левой

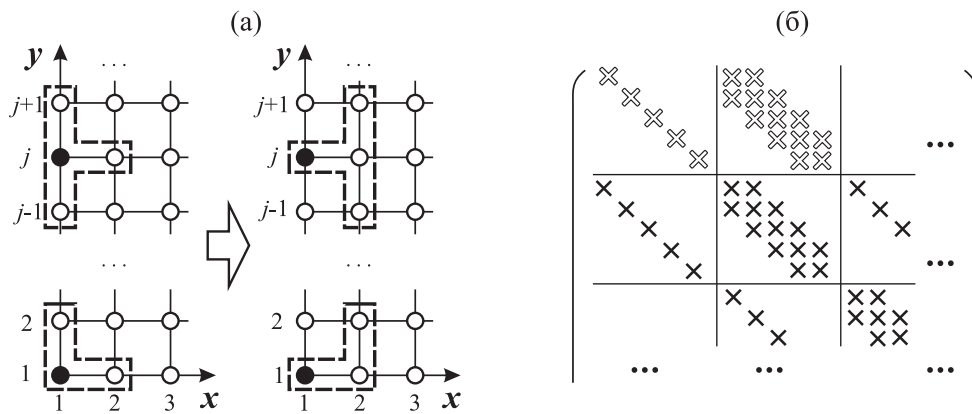


Рис. 5. Шаг «зеркалирования» преобразования СЛАУ: (а) разностные шаблоны, (б) структура матрицы

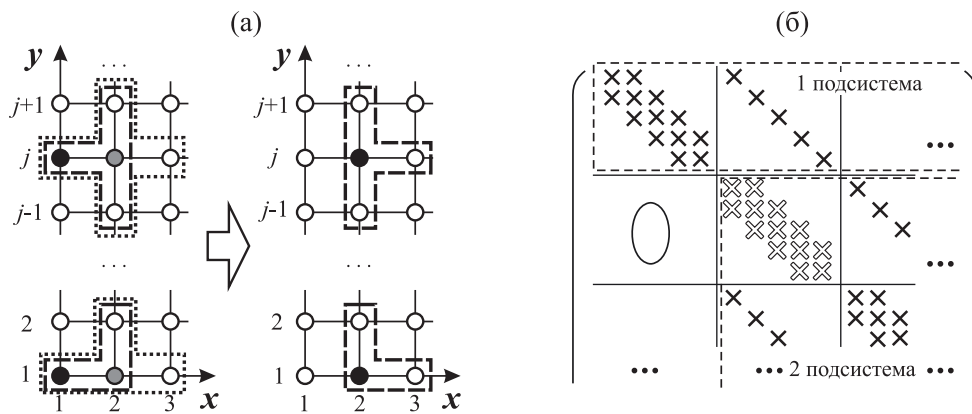


Рис. 6. Переход к «граничным» уравнениям на линии $i = 2$: (а) разностные шаблоны, (б) структура матрицы

части (22) имеет диагональную структуру (рис. 5, б). Следовательно, к ней просто найти обратную клетку, которую, в свою очередь, необходимо умножить на первую клетку второго ряда исходной матрицы A и с противоположным знаком поместить в первую клетку второго ряда единичной матрицы E . Таким образом будет сформирована матрица $H^{(2)}$, умножение которой слева на (22) позволит получить «граничные» уравнения на линии $i = 2$. Ниже для примера приводится первая клетка второго ряда $H^{(2)}$:

$$H_{21}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{aw_{21}}{ap_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{aw_{22}}{\alpha p_{12} + \gamma p_{12} - ap_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aw_{23}}{\alpha p_{13} + \gamma p_{13} - ap_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{aw_{2m-1}}{\alpha p_{1m-1} + \gamma p_{1m-1} - ap_{1m-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{aw_{2m}}{ap_{1m}} \end{pmatrix}.$$

При этом все диагональные клетки матрицы $H^{(2)}$ — единичные матрицы, а все оставшиеся клетки — нулевые.

Для завершения преобразований уравнений на линии $i = 2$ необходимо «вернуть на место» исходные граничные уравнения линии $i = 1$, чтобы на обеих линиях, $i = 1$ и $i = 2$, располагались

однотипные по структуре (шаблонам) уравнения. Для этого вводятся две матрицы «разделения» рядов клеток: $E_{(0)}^{(2)}$ — почти единичная, у которой только диагональная клетка $E_{22(0)}^{(2)}$ — нулевая; $E_{(p)}^{(2)}$ — почти нулевая, у которой только диагональная клетка $E_{22(p)}^{(2)}$ — единичная матрица; соответственно, $E_{(0)}^{(2)} + E_{(p)}^{(2)} = E$. Тогда преобразованная система, матрица которой соответствует структуре на рис. 6, б, запишется как

$$(M_H^{(2)} A + \Delta_H^{(2)}) \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_H^{(2)} \vec{\Phi}^k + M_H^{(2)} \vec{f}, \quad (24)$$

где $M_H^{(2)} = E_{(0)}^{(2)} + E_{(p)}^{(2)} H^{(2)} \left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(1j)} + \prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(1j)} - E \right)$, $\Delta_H^{(2)} = E_{(p)}^{(2)} H^{(2)} (\Delta_{(+)}^{(1m-1)} + \Delta_{(-)}^{(12)})$.

Из вида этой структуры сразу следует вывод о том, что исходная система уравнений разделилась на две подсистемы, первая из которых определяется элементами клеток первого ряда матрицы системы (24), а вторая — остальными ее элементами. При этом, что важно, решение второй подсистемы находится независимо от решения первой.

Здесь необходимо заметить, что все проведенные преобразования исходной системы представляют собой линейные комбинации уравнений, в которых в качестве сомножителей всегда используются положительные коэффициенты меньше единицы в силу изначального свойства построчного диагонального преобладания матрицы СЛАУ (1). Следовательно, проводимые преобразования устойчивы.

Лемма 3.1. Для рассмотренных преобразований СЛАУ (1) всегда $\exists \theta_* \in [0, 1] : \forall \theta \in [0, \theta_*]$ на каждом этапе преобразований СЛАУ ее матрица сохраняет свойства построчного диагонального преобладания и противоположности знаков диагональных и внедиагональных элементов.

Доказательство. При прямом проходе по оси y (увеличение j) справедливы следующие неравенства.

1. Для $j = 1$: утверждения леммы выполнены по определению матрицы исходной системы (1).
2. Для $j = 2$: по определению коэффициентов α (см. (7))

$$\alpha_{P_{12}} = a_{P_{12}} - a_{N_{11}} a_{S_{12}} / a_{P_{11}} \geq a_{N_{12}} + a_{E_{12}} + a_{S_{12}} (1 - a_{N_{11}} / a_{P_{11}}) \geq 0, \\ \alpha_{N_{12}} = a_{N_{12}} \geq 0, \quad \alpha_{E_{12}} = a_{E_{12}} \geq 0, \quad \alpha_{S_{E_{12}}} = a_{E_{11}} a_{S_{12}} / a_{P_{11}} \geq 0.$$

Строчное диагональное преобладание следует из естественного неравенства

$$a_{P_{12}} \geq a_{N_{12}} + a_{E_{12}} + a_{S_{12}} (a_{E_{11}} + a_{N_{11}}) / a_{P_{11}}, \quad \text{или} \\ a_{P_{12}} - a_{S_{12}} a_{N_{11}} / a_{P_{11}} \geq a_{N_{12}} + a_{E_{12}} + a_{S_{12}} a_{E_{11}} / a_{P_{11}}, \quad \text{или} \\ \alpha_{P_{12}} \geq \alpha_{N_{12}} + \alpha_{E_{12}} + \alpha_{S_{E_{12}}}.$$

3. Для $j > 2$: по определению коэффициентов α (см. (13))

$$\alpha_{P_{1j+1}} = a_{P_{1j+1}} - \alpha_{N_{1j}} a_{S_{1j+1}} / \alpha_{P_{1j}} \geq a_{N_{1j+1}} + a_{E_{1j+1}} + a_{S_{1j+1}} (1 - \alpha_{N_{1j}} / \alpha_{P_{1j}}) > 0, \\ \alpha_{N_{1j+1}} = a_{N_{1j+1}} \geq 0, \quad \alpha_{S_{E_{1j+1}}} = \alpha_{E_{1j}} a_{S_{1j+1}} / \alpha_{P_{1j}} + 2\theta \alpha_{S_{E_{1j}}} a_{S_{1j+1}} / \alpha_{P_{1j}} \geq 0.$$

Что касается коэффициента $\alpha_{E_{1j+1}}$, то для него справедливо неравенство $\alpha_{E_{1j+1}} = a_{E_{1j+1}} - \theta \alpha_{S_{E_{1j}}} a_{S_{1j+1}} / \alpha_{P_{1j}} \geq 0$, поскольку в случае $\alpha_{S_{E_{1j}}} = 0$ и/или $a_{S_{1j+1}} = 0$ оно очевидно. В остальных же случаях для выполнения неравенства можно потребовать, например, чтобы $\theta \in [0, \theta_*]$, где $\theta_* \leq 0.5 \min_j \left[\frac{a_{E_{1j+1}} \alpha_{P_{1j}}}{\alpha_{S_{E_{1j}}} a_{S_{1j+1}}}, 1 \right]$. При этом в силу неотрицательности входящих в условие для θ_* коэффициентов значение θ_* будет всегда находиться в пределах от 0 до 1. Множитель 0.5 выбран для обеспечения положительности коэффициента $\alpha_{P_{1j}}$ (см. (21)).

Строчное диагональное преобладание следует из неравенства

$$\begin{aligned} a_{P_{1j}} &\geq a_{N_{1j}} + a_{E_{1j}} + a_{S_{1j}}(\alpha_{E_{1j-1}} + \alpha_{N_{1j-1}} + \theta\alpha_{S_{E_{1j-1}}})/\alpha_{P_{1j-1}}, \quad \text{или} \\ a_{P_{1j}} - a_{S_{1j}}\alpha_{N_{1j-1}}/\alpha_{P_{1j-1}} &\geq a_{N_{1j}} + a_{E_{1j}} - \theta a_{S_{1j}}\alpha_{S_{E_{1j-1}}}/\alpha_{P_{1j-1}} + 2\theta a_{S_{1j}}\alpha_{S_{E_{1j-1}}}/\alpha_{P_{1j-1}} + a_{S_{1j}}\alpha_{E_{1j-1}}/\alpha_{P_{1j-1}}, \quad \text{или} \\ \alpha_{P_{1j}} &\geq \alpha_{N_{1j}} + \alpha_{E_{1j}} + \alpha_{S_{E_{1j}}}. \end{aligned}$$

Для преобразованных коэффициентов $\gamma_{P_{1j}}, \gamma_{E_{1j}}, \gamma_{S_{1j}}, \gamma_{NE_{1j}}$ встречного прохода по оси u (уменьшение j) доказательство проводится по аналогии.

Исходя из определения коэффициентов $p_{P_{1j}}, p_{E_{1j}}, p_{SE_{1j}}, p_{NE_{1j}}$, можно записать

$$\begin{aligned} p_{P_{1j}} &= a_{P_{1j}} - a_{S_{1j}}\alpha_{N_{1j-1}}/\alpha_{P_{1j-1}} - a_{N_{1j}}\gamma_{S_{1j+1}}/\gamma_{P_{1j+1}}, \\ p_{E_{1j}} + p_{SE_{1j}} + p_{NE_{1j}} &= a_{E_{1j}} + a_{S_{1j}}(\alpha_{E_{1j-1}} + \theta\alpha_{S_{E_{1j-1}}})/\alpha_{P_{1j-1}} + a_{N_{1j}}(\gamma_{E_{1j+1}} + \theta\gamma_{NE_{1j+1}})/\gamma_{P_{1j+1}}. \end{aligned}$$

Откуда следует $p_{P_{1j}} \geq 0$ (положительность $p_{SE_{1j}}$ и $p_{NE_{1j}}$ тривиальна) и $p_{P_{1j}} \geq p_{E_{1j}} + p_{SE_{1j}} + p_{NE_{1j}}$. Справедливость последнего неравенства вытекает из его эквивалентности неравенству

$$a_{P_{1j}} \geq a_{E_{1j}} + a_{S_{1j}}(\alpha_{N_{1j-1}} + \alpha_{E_{1j-1}} + \theta\alpha_{S_{E_{1j-1}}})/\alpha_{P_{1j-1}} + a_{N_{1j}}(\gamma_{S_{1j+1}} + \gamma_{E_{1j+1}} + \theta\gamma_{NE_{1j+1}})/\gamma_{P_{1j+1}},$$

которое выполняется в силу условия $0 \leq \theta \leq 1$.

И наконец, утверждение леммы для коэффициентов $\bar{a}_{P_{2j}}, \bar{a}_{E_{2j}}, \bar{a}_{N_{2j}}, \bar{a}_{S_{2j}}$ следует из (23) с учетом вышеизложенных результатов для коэффициентов промежуточных стадий преобразований. ■

В силу доказанной леммы матрица второй подсистемы системы (24) (рис. 6, б) продолжает оставаться матрицей положительного типа. При этом сама вторая подсистема замкнута и содержит по отношению к исходной системе (1) меньшее количество неизвестных, которые определены в узлах линий $i = 2, 3, \dots, n$. Следовательно, ко второй подсистеме системы (24), если принять ее за новую исходную систему уравнений, могут быть применены точно такие же преобразования на линии $i = 3$, что и к системе (1) на линии $i = 2$. И так далее для линий $i = 4, 5, \dots, n$. В общем случае после всех преобразований на произвольной линии $i = I > 2$ вновь образованное «граничное» по i уравнение запишется как

$$\bar{a}_{P_{IJ}}\Phi_{IJ}^{k+1} = \bar{a}_{E_{IJ}}\Phi_{I+1J}^{k+1} + \bar{a}_{N_{IJ}}\Phi_{IJ+1}^{k+1} + \bar{a}_{S_{IJ}}\Phi_{IJ-1}^{k+1} + \bar{b}_{IJ}, \quad (25)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (13), (17), (21), (23) с естественной индексной заменой $2 \rightarrow I$ и $1 \rightarrow I - 1$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{P_{IJ}} &= a_{P_{IJ}} - \bar{\eta}_{IJ}p_{E_{I-1J}}, \quad \bar{a}_{N_{IJ}} = a_{N_{IJ}} + \bar{\eta}_{IJ}p_{NE_{I-1J}}, \quad \bar{a}_{S_{IJ}} = a_{S_{IJ}} + \bar{\eta}_{IJ}p_{SE_{I-1J}}, \quad \bar{a}_{E_{IJ}} = a_{E_{IJ}}, \\ \bar{b}_{IJ} &= b_{IJ} + \bar{\eta}_{IJ}q_{I-1J}, \quad \bar{\eta}_{IJ} = a_{W_{IJ}}/p_{P_{I-1J}}; \\ p_{P_{I-1J}} &= \alpha_{P_{I-1J}} + \gamma_{P_{I-1J}} - a_{P_{I-1J}}, \quad p_{E_{I-1J}} = \bar{a}_{E_{I-1J}} - \theta(\eta_{I-1J-1}^\alpha + \eta_{I-1J+1}^\gamma), \quad p_{SE_{I-1J}} = \alpha_{SE_{I-1J}}, \\ p_{NE_{I-1J}} &= \gamma_{NE_{I-1J}}, \quad q_{I-1J} = \beta_{I-1J} + \delta_{I-1J} - b_{I-1J}; \\ \alpha_{P_{I-1J}} &= \bar{a}_{P_{I-1J}} - (\bar{a}_{S_{I-1J}}/\alpha_{P_{I-1J-1}})\alpha_{N_{I-1J-1}}, \quad \alpha_{N_{I-1J}} = \bar{a}_{N_{I-1J}}, \\ \alpha_{SE_{I-1J}} &= (\bar{a}_{S_{I-1J}}/\alpha_{P_{I-1J-1}})\alpha_{E_{I-1J-1}} + 2\theta\eta_{I-1J-1}^\alpha, \quad \alpha_{E_{I-1J}} = \bar{a}_{E_{I-1J}} - \theta\eta_{I-1J-1}^\alpha, \\ \beta_{I-1J} &= \bar{b}_{I-1J} + (\bar{a}_{S_{I-1J}}/\alpha_{P_{I-1J-1}})\beta_{I-1J-1} + \eta_{I-1J-1}^\alpha [\Phi_{IJ-2}^k - \theta(2\Phi_{IJ-1}^k - \Phi_{IJ}^k)]; \\ \gamma_{P_{I-1J}} &= \bar{a}_{P_{I-1J}} - (\bar{a}_{N_{I-1J}}/\gamma_{P_{I-1J+1}})\gamma_{S_{I-1J+1}}, \quad \gamma_{S_{I-1J}} = \bar{a}_{S_{I-1J}}, \\ \gamma_{NE_{I-1J}} &= (\bar{a}_{N_{I-1J}}/\gamma_{P_{I-1J+1}})\gamma_{E_{I-1J+1}} + 2\theta\eta_{I-1J+1}^\gamma, \quad \gamma_{E_{I-1J}} = \bar{a}_{E_{I-1J}} - \theta\eta_{I-1J+1}^\gamma, \\ \delta_{I-1J} &= \bar{b}_{I-1J} + (\bar{a}_{N_{I-1J}}/\gamma_{P_{I-1J+1}})\delta_{I-1J+1} + \eta_{I-1J+1}^\gamma [\Phi_{IJ+2}^k - \theta(2\Phi_{IJ+1}^k - \Phi_{IJ}^k)]; \\ \eta_{I-1J+1}^\gamma &= \bar{a}_{N_{I-1J}}(\gamma_{NE_{I-1J+1}}/\gamma_{P_{I-1J+1}}), \quad \eta_{I-1J-1}^\alpha = \bar{a}_{S_{I-1J}}(\alpha_{SE_{I-1J-1}}/\alpha_{P_{I-1J-1}}). \end{aligned}$$

А соответствующая матрично-векторная запись системы примет вид

$$(M_{\Sigma}^{(l)} A + \Delta_{\Sigma}^{(l)}) \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{\Sigma}^{(l)} \vec{\Phi}^k + M_{\Sigma}^{(l)} \vec{f}, \quad (26)$$

где $M_{\Sigma}^{(l)} = \prod_{i=l}^2 M_H^{(i)}$, $\Delta_{\Sigma}^{(l)} = \Delta_H^{(l)} + \sum_{l=2}^{l-1} \left(\prod_{i=l}^{l+1} M_H^{(i)} \right) \Delta_H^{(l)}$, правые части которых, в свою очередь, вычисляются по (24) с учетом (16) и (19) с естественной заменой первого верхнего индекса $2 \rightarrow i$ и $1 \rightarrow i-1$:

$$M_H^{(i)} = E_{(0)}^{(i)} + E_{(p)}^{(i)} H^{(i)} \left(\prod_{j=m-1}^1 M_{(+)}^{(i-1j)} + \prod_{j=2}^m M_{(-)}^{(i-1j)} - E \right), \quad (27)$$

$$\Delta_H^{(i)} = E_{(p)}^{(i)} H^{(i)} \left[\sum_{s=m}^3 \left(\prod_{j=m}^s M_{(+)}^{(i-1j)} \right) (\theta B_{(+)}^{(i-1s-1)} - L_{(+)}^{(i-1s-1)}) + \sum_{s=1}^{m-2} \left(\prod_{j=1}^s M_{(-)}^{(i-1j)} \right) (\theta B_{(-)}^{(i-1s+1)} - L_{(-)}^{(i-1s+1)}) \right]. \quad (28)$$

При подходе к правой границе области Ω преобразования на двух последних линиях, $i = n-1$ и $i = n$, приведут к трехточечным разностным уравнениям за счет естественно усеченных исходных граничных уравнений на линии $i = n$ (рис. 7, а):

$$\bar{a}_{p_{nJ}} \Phi_{nJ}^{k+1} = \bar{a}_{N_{nJ}} \Phi_{nJ+1}^{k+1} + \bar{a}_{S_{nJ}} \Phi_{nJ-1}^{k+1} + \bar{b}_{nJ}. \quad (29)$$

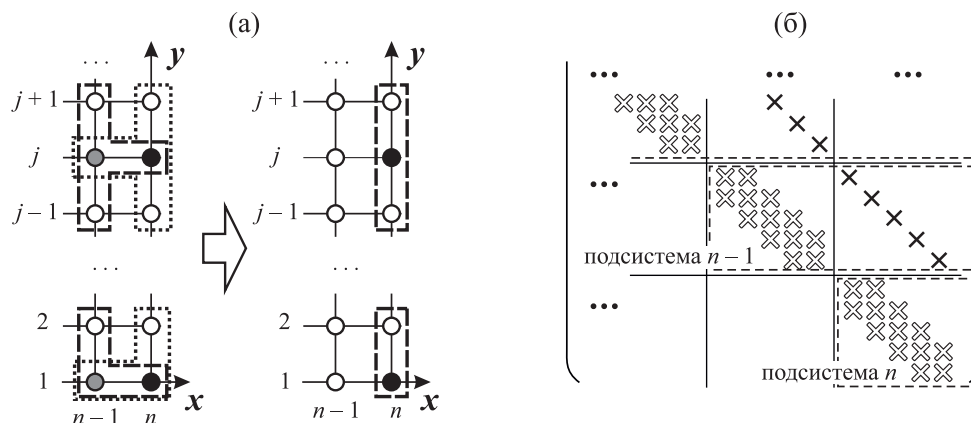


Рис. 7. Завершение прямого прохода преобразований СЛАУ на правой границе области: (а) разностные шаблоны, (б) структура матрицы

А итоговый вид всей преобразованной системы уравнений будет следующий:

$$(M_{\Sigma}^{(n)} A + \Delta_{\Sigma}^{(n)}) \vec{\Phi}^{k+1} = \Delta_{\Sigma}^{(n)} \vec{\Phi}^k + M_{\Sigma}^{(n)} \vec{f}, \quad (30)$$

где $M_{\Sigma}^{(n)} = \prod_{l=n}^2 M_H^{(l)}$, $\Delta_{\Sigma}^{(n)} = \Delta_H^{(n)} + \sum_{l=2}^{n-1} \left(\prod_{i=n}^{l+1} M_H^{(i)} \right) \Delta_H^{(l)}$.

Проведенные выкладки говорят о том, что матрица $M_{\Sigma}^{(n)}$ представляет собой линейную комбинацию эквивалентных невырожденных преобразований (все приближенные преобразования «сидят» в $\Delta_{\Sigma}^{(n)}$), следовательно, существует $(M_{\Sigma}^{(n)})^{-1}$. Тогда систему (30) можно переписать в виде

$$(M_{\Sigma}^{(n)})^{-1} \Delta_{\Sigma}^{(n)} (\vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\Phi}^k) = \vec{f} - A \vec{\Phi}^{k+1},$$

откуда следует, что в случае сходимости $\vec{\Phi}^k$ к предельному значению при $k \rightarrow \infty$ решения систем (1) и (30) совпадают.

4. Оценка оптимального значения параметра компенсации и необходимое условие устойчивости

С помощью формулы определения приращения решения (10) в силу ее приближенности нельзя заранее точно узнать итоговое значение приращения $\Delta\Phi_{ij}$ (если бы можно было — решение определялось бы за одну итерацию), то есть по этой формуле предсказывается приближенное значение приращения:

$$\Delta\tilde{\Phi}_{ij}(\theta) = 2\theta\Delta\Phi_{ij+1} - \theta\Delta\Phi_{ij+2}. \quad (31)$$

Здесь верхний индекс номера итерации k опущен, чтобы не загромождать выкладки.

Для оценки привнесенной в $\Delta\tilde{\Phi}_{ij}$ ошибки функции $\Delta\Phi_{ij+2}$ и $\Delta\Phi_{ij+1}$ раскладываются в ряд Тейлора в окрестности точки (ij) :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{ij+1} &= \Delta\Phi_{ij} + h(\Delta\Phi)'_{ij} + 0.5h^2(\Delta\Phi)''_{ij} + O(h^3), \\ \Delta\Phi_{ij+2} &= \Delta\Phi_{ij} + 2h(\Delta\Phi)'_{ij} + 2h^2(\Delta\Phi)''_{ij} + O(h^3); \end{aligned} \quad (32)$$

откуда при исключении $(\Delta\Phi)'_{ij}$ получается выражение для $\Delta\Phi_{ij}$:

$$\Delta\Phi_{ij} = (2\Delta\Phi_{ij+1} - \Delta\Phi_{ij+2}) + h^2(\Delta\Phi)''_{ij} + O(h^3). \quad (33)$$

Параметр θ вводится для устранения разницы между (31) и (33) и тем самым минимизации выражения в квадратных скобках при вычислении β_{ij} и δ_{ij} в (25). Следовательно, оптимальное значение параметра компенсации θ_{opt} должно быть таким, чтобы

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{ij} &= \Delta\tilde{\Phi}_{ij}(\theta_{opt}) \quad \text{или} \\ (2\Delta\Phi_{ij+1} - \Delta\Phi_{ij+2}) + h^2(\Delta\Phi)''_{ij} + O(h^3) &= \theta_{opt}(2\Delta\Phi_{ij+1} - \Delta\Phi_{ij+2}), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\theta_{opt} = 1 - [-(\Delta\Phi)''_{ij} / (2\Delta\Phi_{ij+1} - \Delta\Phi_{ij+2})]h^2 + O(h^3)$. Поскольку речь идет только о порядке величины θ в зависимости от h , то окончательно можно записать

$$1 - \theta_{opt} = O(h^2). \quad (34)$$

В силу того, что компенсация по определению не может быть более чем полной, то есть $\theta \leq 1$ [Ильин, 1995; Ильин, 2000], из (34) следует, что $\theta_{opt} \in [1 - O(h^2), 1]$.

С другой стороны, формулы (31)–(32) могут быть применены для выявления диапазона изменения θ с точки зрения устойчивости итерационного процесса. Действительно, (31) с учетом (32) на $k + 1$ итерации можно переписать в виде

$$\Phi_{ij}^{k+1} = \Phi_{ij}^k + \theta\Delta\Phi_{ij}^{k+1} + O(h^2),$$

откуда следует, что для подавления произвольного возмущения, связанного с вычислением $\Delta\Phi_{ij}^{k+1}$, с точностью до $O(h^2)$ необходимо выполнение условия

$$|\theta| \leq 1. \quad (35)$$

Для иллюстрации данного вывода в единичной квадратной области была решена тестовая задача (2)–(3) при следующих условиях [Фомина, 2009; Фомин, Фомина, 2009]:

$$\begin{aligned} U &= V = 0, \\ v_x &= 1 + 2[(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2], \quad v_y = 1 + 2[0.5 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.5)^2]. \end{aligned}$$

При этом источник S рассчитывался исходя из аналитического решения задачи $u(x, y) = 256[x(1-x)y(1-y)]^2$. На границах области Ω использованы условия Дирихле. Разностная сетка равномерная: 101×101 . Начальное приближение решения $\Phi_{ij}^0 = 1$. Сходимость метода контролировалась по значению отношения норм векторов невязок $\|R^k\|_2 / \|R^0\|_2$, где R^k — текущая невязка, а R^0 — начальная. Итерационный процесс прекращался при выполнении условия $\|R^k\|_2 / \|R^0\|_2 < 5 \times 10^{-14}$.

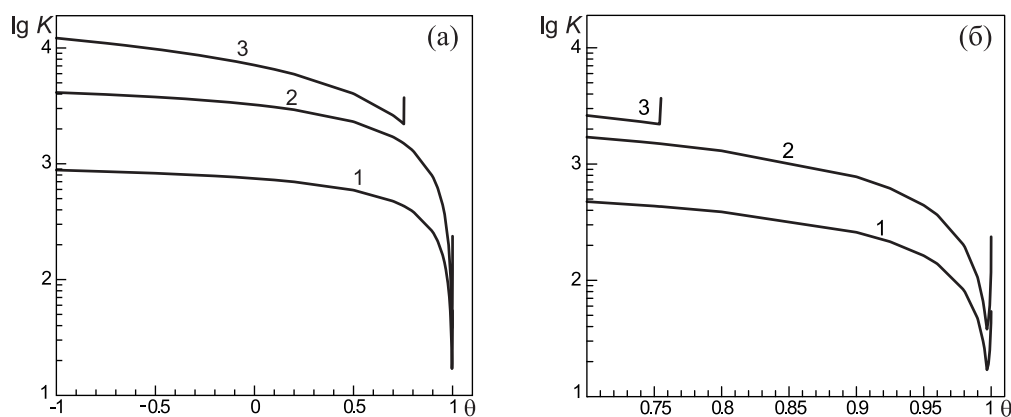


Рис. 8. Зависимость количества итераций K , необходимых для сходимости метода, от параметра компенсации для разных методов: 1 — LR1, 2 — модифицированный полинейный метод [Зверев, 1998], 3 — явный метод Булеева [Ильин, 1995]; (а) $\theta \in [-1, 1]$, (б) увеличенный фрагмент в окрестности θ_{opt}

На рис. 8 приведены результаты для трех методов, использующих механизм компенсации, которые подтверждают справедливость условия (35), причем для методов LR1 и модифицированного полинейного потеря устойчивости наступает сразу же, как только выполнится условие $|\theta| > 1$. Что касается явного метода Булеева, то здесь диапазон устойчивости оказался несколько уже: $-1 \leq \theta \leq 0.755$. Понятно, что диапазон изменения θ от -1 до 0 представляет собой чисто теоретический интерес. Для практических расчетов параметр θ необходимо выбирать из отрезка $[0, 1]$, трактуя его предельные значения по Н. И. Булееву [Ильин, 1995; Ильин, 2000] от отсутствия компенсации ($\theta = 0$) до полной компенсации ($\theta = 1$).

Графики на рис. 8, б также хорошо иллюстрируют оценку (34), поскольку согласно ей в рассматриваемой задаче θ_{opt} для LR1 должен находиться в районе $\sim 10^{-4}$, левее 1.

5. Сходимость метода

Итерационный метод (30) можно переписать в виде

$$\vec{\Phi}^{k+1} = G_\theta \vec{\Phi}^k + (M_\Sigma^{(n)} A + \Delta_\Sigma^{(n)})^{-1} M_\Sigma^{(n)} \vec{f}, \quad (36)$$

где $G_\theta = (M_\Sigma^{(n)} A + \Delta_\Sigma^{(n)})^{-1} \Delta_\Sigma^{(n)}$ — матрица оператора перехода. Доказательство сходимости метода удобно начать с рассмотрения следующих лемм.

Лемма 5.1. Матрица $\Delta_\Sigma^{(n)}$ неотрицательная при $\theta \in [0, 1]$.

Доказательство. По своему определению матрица $\Delta_\Sigma^{(n)}$ представляет собой сумму матриц $\Delta_H^{(i)}$ с матричными коэффициентами в виде произведения матриц $M_H^{(i)}$ (см. (30)). В свою очередь, матрицы $M_H^{(i)}$ состоят из неотрицательных элементов, поскольку являются комбинациями матриц $M_{(+)}^{(ij)}$, $M_{(-)}^{(ij)}$, $H^{(i)}$, $E_{(0)}^{(i)}$, $E_{(p)}^{(i)}$ (см. (27)), содержащих нули, единицы и отношения

положительных коэффициентов преобразуемых уравнений СЛАУ. Поскольку на главных диагоналях матриц $M_{(+)}^{(ij)}$ и $M_{(-)}^{(ij)}$ стоят единицы, то за счет вычитания матрицы E матрица в круглых скобках (27) имеет единичную главную диагональ. Следовательно, для доказательства неотрицательности элементов $\Delta_{\Sigma}^{(n)}$ необходимо доказать неотрицательность элементов $\Delta_H^{(i)}$.

По определению (28) матрицы $\Delta_H^{(i)}$, для выяснения знаков ее элементов необходимо определиться со знаками элементов слагаемых матриц в квадратных скобках (28), поскольку произведение $E_{(p)}^{(i)} H^{(i)}$ есть матрица с неотрицательными элементами. Для этого сначала следует рассмотреть первую сумму в квадратных скобках, точнее три произвольно подряд идущих слагаемых этой суммы в диапазоне индекса $s \in [t, t + 2]$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=t+2}^t \left(\prod_{j=m}^s M_{(+)}^{(i-1,j)} \right) (\theta B_{(+)}^{(i-1s-1)} - L_{(+)}^{(i-1s-1)}) = \\ = \left(\prod_{j=m}^{t+2} M_{(+)}^{(i-1,j)} \right) \times \left[M_{(+)}^{(i-1t+1)} M_{(+)}^{(i-1t)} (\theta B_{(+)}^{(i-1t-1)} - L_{(+)}^{(i-1t-1)}) + \right. \\ \left. + M_{(+)}^{(i-1t+1)} (\theta B_{(+)}^{(i-1t)} - L_{(+)}^{(i-1t)}) + (\theta B_{(+)}^{(i-1t+1)} - L_{(+)}^{(i-1t+1)}) \right]. \end{aligned}$$

По определению матриц $M_{(+)}^{(ij)}$, $B_{(+)}^{(ij)}$, $L_{(+)}^{(ij)}$ и их элементов (см. (25)) нетрудно убедиться, что $(t + 2)$ -й компонент произведения квадратной скобки и произвольного вектора $\vec{\Phi}$ есть сумма

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t}}}{\alpha_{P_{i-1t-1}}} \alpha_{S_{E_{i-1t-1}}} (\Phi_{i-1t-2} - 2\theta\Phi_{i-1t-1} + \theta\Phi_{i-1t}) + \\ + \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \alpha_{S_{E_{i-1t}}} (\Phi_{i-1t-1} - 2\theta\Phi_{i-1t} + \theta\Phi_{i-1t+1}) + \\ + \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \alpha_{S_{E_{i-1t+1}}} (\Phi_{i-1t} - 2\theta\Phi_{i-1t+1} + \theta\Phi_{i-1t+2}). \end{aligned}$$

Если теперь в этой сумме выделить только слагаемые при Φ_{i-1t} , привести подобные и учесть выражение $\alpha_{S_{E_{i-1t+1}}}$ через $\alpha_{S_{E_{i-1t}}}$, то получится следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \left[\alpha_{S_{E_{i-1t+1}}} - 2\theta \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \alpha_{S_{E_{i-1t}}} + \theta \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}} \bar{a}_{S_{i-1t}}}{\alpha_{P_{i-1t}} \alpha_{P_{i-1t-1}}} \alpha_{S_{E_{i-1t-1}}} \right] \Phi_{i-1t} = \\ = \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \left[\frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \alpha_{E_{i-1t}} + 2\theta \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}} - \bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \alpha_{S_{E_{i-1t}}} + \theta \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}} \bar{a}_{S_{i-1t}}}{\alpha_{P_{i-1t}} \alpha_{P_{i-1t-1}}} \alpha_{S_{E_{i-1t-1}}} \right] \Phi_{i-1t} = \\ = \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+2}}}{\alpha_{P_{i-1t+1}}} \frac{\bar{a}_{S_{i-1t+1}}}{\alpha_{P_{i-1t}}} \left[\alpha_{E_{i-1t}} + \theta \frac{\bar{a}_{S_{i-1t}}}{\alpha_{P_{i-1t-1}}} \alpha_{S_{E_{i-1t-1}}} \right] \Phi_{i-1t}. \end{aligned}$$

Видно, что коэффициент при Φ_{i-1t} есть неотрицательная величина (знаки при коэффициентах учитываются явно, а $\theta \geq 0$). В силу произвольности выбора индекса t все коэффициенты первой суммы в квадратных скобках (28) неотрицательные, включая коэффициент при приграничном Φ_{i-12} , который в конечном счете пропорционален разности

$$\alpha_{S_{E_{i-13}}} - 2\theta \frac{\bar{a}_{S_{i-13}}}{\alpha_{P_{i-12}}} \alpha_{S_{E_{i-12}}} = \frac{\bar{a}_{S_{i-13}}}{\alpha_{P_{i-12}}} \alpha_{E_{i-12}} > 0.$$

Аналогичным образом доказывается неотрицательность элементов второй суммарной матрицы в квадратных скобках (28). Следовательно, каждый из элементов $\Delta_H^{(i)}$ и, соответственно, $\Delta_{\Sigma}^{(n)}$ больше или равен нулю, откуда следует, что матрица $\Delta_{\Sigma}^{(n)}$ неотрицательная. ■

Лемма 5.2. Матрицы $(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)})$ и $M_{\Sigma}^{(n)}A$ монотонные $\forall \theta \in [0, \theta_*]$, где $\theta_* \in [0, 1]$.

Доказательство. Как уже было показано в § 3 (лемма 3.1), всегда $\exists \theta_* \in [0, 1] : \forall \theta \in [0, \theta_*]$ эквивалентно-приближенные преобразования прямого прохода метода (30) сохраняют свойство строчного диагонального преобладания и противоположность знаков диагональных и внедиагональных элементов строки матрицы преобразуемой системы. Иными словами, так называемое правило положительности коэффициентов разностного уравнения и условие строчного диагонального преобладания матрицы системы [Ильин, 1995; Ильин, 2000; Патанкар, 1984; Самарский, Гулин, 1989] выполняются на любой (в том числе и на заключительной) стадии преобразований СЛАУ. Следовательно, матрица $(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)})$, как результирующая преобразований прямого прохода, монотонная [Ильин, 1995; Самарский, Гулин, 1989].

По построению матрицы $M_{\Sigma}^{(n)}A$ видно, что она выражает собой набор только эквивалентных преобразований исходной матрицы A . Тогда нетрудно понять, что элементами $M_{\Sigma}^{(n)}A$ являются $\bar{a}_{P_{ij}}, \bar{a}_{E_{ij}}, \bar{a}_{N_{ij}}, \bar{a}_{S_{ij}}$ без учета механизма компенсации, то есть без слагаемых, содержащих множитель θ и вычитаемых элементов матриц $L_{(+)}^{(ij)}$ и $L_{(-)}^{(ij)}$. Причем неучет этих слагаемых должен быть рекуррентным, а не только путем их прямого отбрасывания в формулах для коэффициентов уравнений (25). Поскольку правила положительности коэффициентов выполняются для полной матрицы $(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)})$, то тем более они будут выполняться и для усеченной матрицы $M_{\Sigma}^{(n)}A$, элементы которой согласно вычислительным формулам (25) либо увеличиваются за счет отбрасывания отрицательных слагаемых, либо некритично уменьшаются в силу отбрасывания в сумме положительных слагаемых одного из этих слагаемых.

С другой стороны, использование в матрицах $M_{(+)}^{(ij)}$ и $M_{(-)}^{(ij)}$ элементов в диапазоне от 0 до 1 гарантирует сохранение свойства строчного диагонального преобладания в результирующей матрице при их последовательном умножении на исходную матрицу A . Следовательно, матрица $M_{\Sigma}^{(n)}A$ также и по той же причине, что и матрица $(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)})$, является монотонной. ■

С учетом вышеизложенного доказательство сходимости неявного итерационного полинейного рекуррентного метода не представляет особого труда.

Теорема 5.1. Пусть система линейных алгебраических уравнений (1) есть разностная аппроксимация краевой задачи в области Ω , покрытой регулярной сеткой. При этом A — ленточная пятидиагональная матрица положительного типа. Тогда итерационный метод (36) сходится $\forall \theta \in [0, \theta_*]$, где $\theta_* \in [0, 1]$.

Доказательство. Очевидное тождество

$$M_{\Sigma}^{(n)}A \equiv (M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)}) - \Delta_{\Sigma}^{(n)}$$

может трактоваться как регулярное разложение матрицы $M_{\Sigma}^{(n)}A$ [Ильин, 1995], так как согласно рассмотренным леммам матрицы $M_{\Sigma}^{(n)}A$ и $(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)})$ — монотонные, а $\Delta_{\Sigma}^{(n)}$ — неотрицательная. Тогда, по теореме Варги [Varga, 1963], можно сразу записать оценку спектрального радиуса G_{θ} :

$$\rho(G_{\theta}) = \rho\left(\left(M_{\Sigma}^{(n)}A + \Delta_{\Sigma}^{(n)}\right)^{-1} \Delta_{\Sigma}^{(n)}\right) < 1. \quad \blacksquare$$

Замечание 5.1. Теорема 5.1 доказывает только сходимость метода, но не оценивает коэффициент подавления ошибки оператора перехода.

6. Об оценке нормы оператора перехода в специальном случае

Пусть множество $\mathbb{R}_L^n \subset \mathbb{R}^n$ состоит из векторов $\vec{\Phi}$, которые суть проекции дважды непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе со своими производными функций на конечномерное сеточное пространство произвольного размера, возникающее при покрытии двумерной области регулярной сеткой. Понятно, что для таких векторов, в частности, выполняются условия

$$|\Phi_{ij+1} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{ij-1}| < \text{const} \cdot h^2, \quad |\Phi_{i+1j} - 2\Phi_{ij} + \Phi_{i-1j}| < \text{const} \cdot h^2, \quad (37)$$

где h — шаг разбиения сеточного пространства.

Тогда на основании полученных в работе результатов можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть система линейных алгебраических уравнений (1) есть разностная аппроксимация краевой задачи в области Ω , покрытой регулярной сеткой с шагом h . При этом A — ленточная пятидиагональная матрица положительного типа. Пусть также решение исходной краевой задачи в Ω есть функция, дважды непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе со своими производными. Тогда $\exists k_0$ и $\exists h_0 : \forall k > k_0$ и $\forall h < h_0$ при $\theta = \theta_{opt}$ норма оператора перехода метода (36) удовлетворяет оценке $\|G_\theta\| < O(h^2)$.*

Доказательство. В силу того, что условие данной теоремы является частным случаем условия теоремы 5.1, метод (36) сходится. Следовательно, $\exists k_0 : \forall k > k_0 \vec{\Phi}^k \in \mathbb{R}_L^n$, в противном случае просто не имела бы место сходимость итерационного процесса. Поэтому в последующих рассуждениях рассматриваются только векторы $\vec{\Phi} \in \mathbb{R}_L^n$, включая вектор $\vec{\Phi}^0$ начального приближения решения. Иными словами, множество \mathbb{R}_L^n является областью определения линейного матричного оператора A . Как и ранее, для определенности рассматривается алгоритм LR1.

В § 3 работы было показано, что используемая последовательность линейных эквивалентно-приближенных преобразований системы уравнений сохраняет свойство невырожденности матрицы со строчным диагональным преобладанием на каждом этапе преобразований. Следовательно, итоговая матрица $W_A^{(n)} = (M_\Sigma^{(n)} A + \Delta_\Sigma^{(n)})$ в (30) невырожденная, и для нее существует обратная матрица, которая в силу конечномерности рассматриваемых пространств векторов $\vec{\Phi}$, порожденных сеточным разбиением Ω , является ограниченной [Самарский, Николаев, 1978]. Иными словами, существует такая константа M_0 , что $\left\| (W_A^{(n)})^{-1} \right\| \leq M_0$. Причем M_0 не зависит от сеточного разбиения области Ω . Действительно, при любой сетке структура матрицы $W_A^{(n)}$ остается четырехдиагональной, с ненулевой главной диагональю. Систему уравнений с этой матрицей всегда можно привести к виду, при котором ее коэффициенты при неизвестных на главной диагонали будут иметь порядок $O(1) + O(h^q)$, где $q = 1, 2, 3, \dots$, путем умножения каждого уравнения системы на h в соответствующей степени. При этом коэффициенты на побочных диагоналях не могут иметь более низкий порядок по h (то есть невозможен случай $q < 0$), иначе соответствующим выбором h можно нарушить свойство строчного диагонального преобладания. Тогда оценка первой нормы матричного оператора $W_A^{(n)}$, с учетом того, что в качестве области определения задано множество \mathbb{R}_L^n , будет следующей [Самарский, Гулин, 1989]:

$$\left\| W_A^{(n)} \right\|_1 = \max_{ij} (\bar{a}_{P_{ij}} + \bar{a}_{N_{ij}} + \bar{a}_{S_{ij}} + \bar{a}_{E_{ij}}) \geq \max_{ij} (\bar{a}_{P_{ij}}) = m_0 + O(h^q),$$

где m_0 — const, не зависящая от h , а знаки модуля у коэффициентов \bar{a} опущены по причине их неотрицательности. В силу приведенных рассуждений $\exists h_0 : \forall h < h_0 O(h^q) \leq m_0/2$, тогда справедлива оценка $\left\| W_A^{(n)} \right\|_1 \geq m_0/2 > 0$. Откуда по теореме 1 главы 5 [Самарский, Николаев, 1978] имеет место неравенство

$$\left\| (W_A^{(n)})^{-1} \right\|_1 \leq \frac{2}{m_0} = M_0.$$

С другой стороны, матрицы $M_{(+)}^{(ij)}$, $M_{(-)}^{(ij)}$, $H^{(i)}$ являются по построению ограниченными для любых h , поскольку их элементы есть либо нули, либо единицы, либо положительные отношения меньше единицы, не зависящие от θ и от h в отрицательной степени (см. рассуждения выше), причем в одну строку матрицы располагается не более двух ненулевых элементов. Поэтому сами эти матрицы и их линейные комбинации являются ограниченными в том смысле, что при произвольных h их нормы не могут быть сколь угодно большими величинами. Тогда оценка норм матричных операторов $\Delta_H^{(i)}$, как следует из (28), сводится к оценке норм операторов $(\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)})$ и $(\theta B_{(-)}^{(is)} - L_{(-)}^{(is)})$, элементы которых есть нули либо составляющие формулы компенсации, следующие из соотношения (10).

Для оценки нормы матричного оператора $(\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)})$ удобно рассмотреть первую норму произведения матрицы $(\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)})$ и произвольного вектора $\vec{\Phi} \in \mathbb{R}_L^n$:

$$\left\| (\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)}) \vec{\Phi} \right\|_1 = \max_{i,s} \left\{ \eta_{is}^\alpha |\Phi_{i+1s+1} - 2\theta\Phi_{i+1s} + \theta\Phi_{i+1s-1}| \right\},$$

где $\eta_{is}^\alpha = \bar{a}_{S_{is+1}} (\alpha_{SE_{is}} / \alpha_{P_{is}})$. Подставляя в полученное соотношение $\theta = \theta_{opt}$ из (34) и учитывая, что $\theta_{opt} = 1 - O(h^2) < 1$, можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left\| (\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)}) \vec{\Phi} \right\|_1 &= \max_{i,s} \left\{ \eta_{is}^\alpha |\Phi_{i+1s+1} - 2\theta\Phi_{i+1s} + \theta\Phi_{i+1s-1}| \right\} = \\ &= \max_{i,s} \left\{ \eta_{is}^\alpha |(1-\theta)\Phi_{i+1s+1} + \theta(\Phi_{i+1s+1} - 2\Phi_{i+1s} + \Phi_{i+1s-1})| \right\} \leq \\ &\leq \max_{i,s} \left\{ \eta_{is}^\alpha (1-\theta)|\Phi_{i+1s+1}| + \text{const} \cdot h^2 \theta \eta_{is}^\alpha \right\} \leq \max_{i,s} \left\{ \eta_{is}^\alpha \right\} O(h^2) \left\{ \left\| \vec{\Phi} \right\|_1 + \theta \right\} = O(h^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь учтено, что вектор $\vec{\Phi}$ ограничен, и для него справедлива оценка (37). Иными словами, первая норма матричного оператора $(\theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)})$ ограничена величиной порядка $O(h^2)$, а поскольку в конечномерных пространствах любые две нормы эквивалентны [Самарский, Николаев, 1978], то отсюда сразу следует оценка $\left\| \theta B_{(+)}^{(is)} - L_{(+)}^{(is)} \right\| \leq O(h^2)$. Далее по аналогии можно сразу записать $\left\| \theta B_{(-)}^{(is)} - L_{(-)}^{(is)} \right\| \leq O(h^2)$.

Анализ структуры формулы (28) говорит о том, что в матрице $\Delta_H^{(i)}$: 1) из-за множителя $E_{(p)}^{(i)}$ только i -я строка клеток содержит ненулевые клетки; 2) каждая строка ненулевой клетки содержит не более одного набора составляющих формулы компенсации. Отсюда следует, что $\left\| \Delta_H^{(i)} \right\| \leq O(h^2)$ в силу ограниченности матриц $M_{(+)}^{(ij)}$, $M_{(-)}^{(ij)}$ и $H^{(i)}$.

В итоге, поскольку из (30) следует, что $\Delta_\Sigma^{(n)}$ есть суммарный набор по рядам клеток линейных комбинаций соответствующих ненулевым рядам клеток из матриц $\Delta_H^{(i)}$ и ограниченных матричных коэффициентов в виде произведений $M_H^{(i)}$, то оценка нормы результирующего матричного оператора $\Delta_\Sigma^{(n)}$ не изменится. То есть $\left\| \Delta_\Sigma^{(n)} \right\| \leq O(h^2)$ при $\theta = \theta_{opt}$. Следовательно, оценка нормы оператора перехода G_θ имеет вид

$$\|G_\theta\| = \left\| \left(M_\Sigma^{(n)} A + \Delta_\Sigma^{(n)} \right)^{-1} \Delta_\Sigma^{(n)} \right\| \leq \left\| \left(M_\Sigma^{(n)} A + \Delta_\Sigma^{(n)} \right)^{-1} \right\| \left\| \Delta_\Sigma^{(n)} \right\| \leq M_0 \cdot O(h^2) = O(h^2). \quad (39)$$

Замечание 6.1. Очевидно, что оценка $\|G_\theta\|$ верна и при $\theta \in [\theta_{opt} - O(h^2), 1]$.

Замечание 6.2. Если в качестве элементов множества \mathbb{R}_L^n задать проекции трижды непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе со своими производными функций, тогда вместо (37) для векторов $\vec{\Phi} \in \mathbb{R}_L^n$ справедливы условия

$$|\Phi_{ij+1} - 3\Phi_{ij} + 3\Phi_{ij-1} - \Phi_{ij-2}| < \text{const} \cdot h^3, \quad |\Phi_{i+1j} - 3\Phi_{ij} + 3\Phi_{i-1j} - \Phi_{i-2j}| < \text{const} \cdot h^3.$$

В этой ситуации можно переформулировать теорему 6.1, потребовав, чтобы в качестве решения выступала трижды непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе со своими производными функция. Соответственно, для алгоритма LR2, в котором, в отличие от линейных формул компенсации (10), используются квадратичные формулы вида

$$\Delta\Phi_{ij}^{k+1} = \theta \left(3(\Delta\Phi_{ij+1}^{k+1} - \Delta\Phi_{ij+2}^{k+1}) + \Delta\Phi_{ij+3}^{k+1} \right), \quad (40)$$

по аналогии доказывается, что $1 - \theta_{opt} = O(h^3)$, и оценка нормы оператора перехода при $\theta \in [\theta_{opt} - O(h^3), 1]$ будет следующей: $\|G_\theta\| \leq O(h^3)$.

Для иллюстрации полученных теоретических результатов была решена задача из § 4 алгоритмами LR1 и LR2 на различных равномерных сетках. Итерации прекращались при выполнении условия $\|R^k\|_2 / \|R^0\|_2 < 10^{-10}$. Кривые сходимости итерационных методов представлены на рис. 9. Видно, что для алгоритма LR1 (рис. 9, а) эффект более быстрой сходимости за счет уменьшения сеточного шага выражен в интервале от первой до четвертой–десятой итерации (в зависимости от номера кривой сходимости метода). Далее начинают сказываться ошибки округления, и взаимоположение кривых становится обычным: чем больше размерность матрицы СЛАУ, тем медленнее сходится метод. В то время как для LR2 эффект ускорения сходимости присутствует практически на всем диапазоне изменения номера итерации k (рис. 9, б), ошибки округления не успевают его подавить из-за более высокой степени зависимости нормы оператора перехода G_θ от шага h . То есть в полном соответствии с изложенной теорией, которая не учитывает ошибки округлений, получается, что чем меньше сеточный шаг, тем быстрее (по итерациям) при прочих равных условиях сходится метод.

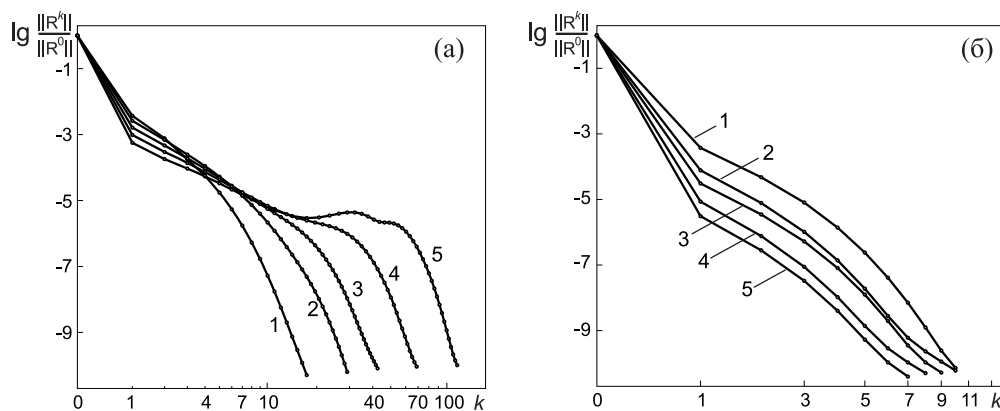


Рис. 9. Зависимость отношений норм невязки от номера итерации: (а) алгоритм LR1, (б) алгоритм LR2. Сетка: 1 – 201×201 , 2 – 501×501 , 3 – 1001×1001 , 4 – 2001×2001 , 5 – 4001×4001

Из доказательства теоремы 6.1 следует, что выбор в качестве начального приближения вектора $\vec{\Phi}^0 \notin \mathbb{R}_L^n$ может привести к замедлению сходимости метода, поскольку при этом на начальных итерациях: 1) условия (37) не будут выполнены; 2) оценка для θ_{opt} , справедливая в предположении дифференцируемости $\vec{\Phi}$, также будет под вопросом. Соответственно, цепочка неравенств (38) оценки нормы оператора перехода метода (36) на начальных итерациях также не будет выполняться, что может послужить причиной замедления сходимости.

Проверить эти рассуждения можно с помощью решения различными методами той же самой задачи из § 4, используя в качестве начального приближения как гладкие ($\vec{\Phi}^0 \in \mathbb{R}_L^n$), так и разрывные ($\vec{\Phi}^0 \notin \mathbb{R}_L^n$) векторы. В качестве сравниваемых были выбраны следующие методы: блочной последовательной релаксации BSOR, бисопряженных градиентов со стабилиза-

цией Bi-CGStab, бисопряженных градиентов со стабилизацией с предобуславливателем на базе явного метода Булеева Bi-CGStab P B [Старченко, 2003], а также LR1 и LR2. Единичная квадратная область решения задачи покрывалась равномерной сеткой 101×101 ; использовались граничные условия Дирихле. Итерационный процесс прекращался при выполнении условия $\|R^k\|_2 / \|R^0\|_2 < 10^{-10}$. Начальные приближения вектора решения имели следующий вид: 1) $\Phi_{ij}^0 = 1$; 2) $\Phi_{ij}^0 = 1 + 10 [10x_i y_j (1 - x_i)(1 - y_j)]^4$; 3) $\Phi_{ij}^0 = 0.001(-1)^{(i+j)}$. Вторым вариантом начального приближения был выбран из соображений резко меняющейся, но в то же время аналитической, то есть гладкой, функции. Для всех вариантов начального приближения решения начальная норма невязки равнялась $\|R^0\|_2 \approx 0.141$. Оптимальные значения параметра компенсации θ_{opt} (для BSOR, итерационного параметра) подбирались экспериментально из условия минимизации количества итераций K , необходимых для сходимости метода. Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица. Количество итераций, необходимых для сходимости метода, в зависимости от вида начального приближения решения

Вариант $\vec{\Phi}^0$	1		2		3	
	θ_{opt}	K	θ_{opt}	K	θ_{opt}	K
LR1	0.99720	12	0.99720	12	0.99750	9
LR2	0.99995	10	0.99995	11	0.99950	30
BSOR	1.93000	201	1.93000	204	1.93000	201
Bi-CGStab	—	178	—	171	—	174
Bi-CGStab P B	0.99920	29	0.99935	27	0.99950	29

Хорошо видна слабая зависимость количества итераций, необходимых для сходимости метода, от вида использованных начальных приближений вектора решения для BSOR, Bi-CGStab, Bi-CGStab P B. Отсутствие ожидаемого замедления сходимости для метода LR1 объясняется, по-видимому, невысокой точностью предсказания поведения приращения решения, искажаемой ошибками округлений, что, впрочем, хорошо согласуется с поведением кривых сходимости этого метода на рис. 9, а. Другое дело — LR2: использование разрывного вектора $\vec{\Phi}^0$ привело к резкому замедлению сходимости данного метода — количество итераций увеличилось в 3 раза, что служит хорошей иллюстрацией к проведенным теоретическим выкладкам.

7. Заключение

В работе представлены результаты теоретического обоснования неявного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных эллиптических уравнений. На основе полученной канонической формы записи метода сделан вывод о его корректности в случае сходимости итерационного процесса. Собственно доказательство сходимости метода при любом начальном приближении решения системы уравнений проведено путем подробного анализа структуры и элементного состава его матричных операторов, возникающих в процессе эквивалентных и приближенных преобразований исходной СЛАУ. Параллельно проведена оценка оптимального значения итерационного параметра компенсации и получено необходимое условие устойчивости метода. Также показано, что в случае слабых ограничений на начальное приближение решения норма оператора перехода ограничена сверху значением, пропорциональным второй (или третьей, в зависимости от варианта метода) степени шага сеточного разбиения области решения

задачи. Иными словами, при соответствующем увеличении размерности матрицы СЛАУ (уменьшении шага сетки) его норма становится сколь угодно малой величиной. Теоретические выводы работы наглядно подтверждены результатами решений тестовых задач.

Список литературы (References)

- Гинкин В. П., Чернов К. Г., Бартнев Ю. Г., Бондаренко Ю. А., Шагалиев Р. М., Щаникова Е. Б.* Метод неполной факторизации для итерационного решения систем разностных уравнений и его адаптация для не М-матриц // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — Саров: Изд-во РФЯЦ–ВНИИЭФ. — 2009. — № 3. — С. 3–17.
- Ginkin V. P., Chernov K. G., Bartenev Yu. G., Bondarenko Yu. A., Shagaliev R. M., Shanikova E. B.* Metod nepolnoj faktorizatsii dlia iteracionnogo resheniia sistem raznostnyh uravneniy i ego adaptacia dlia ne M-matric [Incomplete factorization method for the iterative solution of systems of difference equations and its adaptation for non M-matrices] // Voprosy atomnoy nauki i tehniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov. — Sarov: Izd-vo RFAC–VNIIEF. — 2009. — No. 3. — P. 3–17 (in Russian).
- Зверев В. Г.* Модифицированный полинейный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1998. — Т. 38, № 9. — С. 1553–1562.
- Zverev V. G.* Modificirovannyj polinejnij metod resheniia raznostnyh ellipticheskikh uravnenij [Modified line-by-line method for difference elliptic equations] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 38, No. 9. — P. 1490–1499.
- Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. — М.: Физматлит, 1995. — 288 с.
- Il'in V. P.* Metody nepolnoj faktorizacii dlia resheniia algebraicheskikh sistem [Incomplete factorization methods for solving algebraic systems]. — Moscow: Fizmatlit, 1995. — 288 p. (in Russian).
- Ильин В. П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. — Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2000. — 345 с.
- Il'in V. P.* Metody konechnyh raznostej i konechnyh ob'emov dlia ellipticheskikh uravnenij [Finite differences and finite volumes methods for elliptic equations]. — Novosibirsk: Izd-vo instituta matematiki, 2000. — 345 p. (in Russian).
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат. — 1984, 152 с.
- Patankar S. V.* Numerical heat transfer and fluid flow. — Hemisphere Publishing Co. — 1980. (Russ. ed.: Patankar S. Chislennye metody resheniia zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti. — Moscow: Energoatomizdat. — 1984, 152 p.)
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.
- Samarskij A. A., Vabishevich P. N.* Chislennye metody resheniia zadach konvekcii–diffuzii [Numerical methods for solving convection–diffusion problems]. — Moscow: Editorial URSS, 1999. — 248 p. (in Russian).
- Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
- Samarskij A. A., Gulin A. V.* Chislennye metody [Numerical methods]. — Moscow: Nauka, 1989. — 432 p. (in Russian).
- Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.
- Samarskij A. A., Nikolaev E. S.* Metody resheniia setochnyh uravnenij [Methods for solving grid equations]. — Moscow: Nauka, 1978. — 592 p. (in Russian).
- Старченко А. В.* Сравнительный анализ некоторых итерационных методов для численного решения пространственной краевой задачи для уравнений эллиптического типа // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. — Томск: Изд-во ТГУ. — 2003. — № 10. — С. 70–80.
- Starchenko A. V.* Sravnitel'nyj analiz nekotoryh iteracionnyh metodov dlia chislennogo resheniia prostranstvennoj kraevoj zadachi dlia uravnenij ellipticheskogo tipa // Vestnik TGU. Bjul'teten' operativnoi nauchnoi informacii [Comparative analysis of some iterative methods for the numerical solution of the spatial boundary value problem for the equations of elliptic type]. — Tomsk: Izd-vo TGU. — 2003. — No. 10. — P. 70–80 (in Russian).

- Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 656 с.
Faddeev D. K., Faddeeva V. N. Vychislitel'nye metody lineinoj algebrы [Computational methods of linear algebra]. — Moscow: Fizmatgiz, 1963. — 656 p. (in Russian).
- Фомин А. А., Фомина Л. Н.* Сравнение эффективности высокоскоростных методов решения разностных эллиптических СЛАУ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2009. — № 2 (6). — С. 71–77.
Fomin A. A., Fomina L. N. Sravnenie effektivnosti vysokoskorostnyh metodov resheniia raznostnyh ellipticheskikh SLAU [The comparison of high-speed methods efficiency for solving a difference elliptical SLAE] // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. — 2009. — No. 2 (6). — P. 71–77 (in Russian).
- Фомин А. А., Фомина Л. Н.* Об одном варианте полинейного рекуррентного метода решения разностных эллиптических уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2010. — № 2 (10). — С. 20–27.
Fomin A. A., Fomina L. N. Ob odnom variante polineinogo rekurrentnogo metoda resheniia raznostnyh ellipticheskikh uravnenij [On one version of the line-by-line recurrence method for solving difference elliptic equations] // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. — 2010. — No. 2 (10). — P. 20–27 (in Russian).
- Фомин А. А., Фомина Л. Н.* Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 4. — С. 363–377.
Fomin A. A., Fomina L. N. Chislennoe modelirovanie techeniia zhidkosti v ploskoj kaverne pri bol'shih chislah Reinol'dsa [Numerical simulation of viscous 2D lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers] // Computational Continuum Mechanics. — 2014. — Vol. 7, No. 4. — P. 363–377 (in Russian).
- Фомин А. А., Фомина Л. Н.* Неявный итерационный полинейный рекуррентный метод в применении к решению задач динамики несжимаемой вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 1. — С. 35–50.
Fomin A. A., Fomina L. N. Neiavnyj iteracionnyj polineinyj rekurrentnyj metod v primenении k resheniju zadach dinamiki neshzhimaemoi viazkoj zhidkosti [The implicit line-by-line recurrence method in application to the solution of problems of incompressible viscous fluid dynamics] // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 1. — P. 35–50 (in Russian).
- Фомина Л. Н.* Использование полинейного рекуррентного метода с переменным параметром компенсации для решения разностных эллиптических уравнений // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 4. — С. 108–120.
Fomina L. N. Ispol'zovanie polineinogo rekurrentnogo metoda s peremennym parametrom kompensacii dlia resheniia raznostnyh ellipticheskikh uravnenij [Application of the line-by-line recurrence method with variable compensation parameter for solving finite-difference elliptical equations] // Computing Technologies. — 2009. — Vol. 14, No. 4. — P. 108–120 (in Russian).
- Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. — NY: PWS Publ., 1996. — 460 p.
- Van der Vorst H. A.* Bi-CGStab: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1992. — Vol. 13, no 2. — P. 631–644.
- Varga R. S.* Matrix iterative analysis. — New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1963. — 334 p.