**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 Т. 9 № 5 С. 825–836**

Ки&М

DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-825-836

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 330.42

Гипергеометрические функции в модели общего равновесия многосекторной экономики с монополистической конкуренцией

В. М. Гончаренко[1,a], А. Б. Шаповал[1,2,b]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Россия, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20
[2]Лаборатория исследования социальных отношений и многообразия общества
Российской экономической школы,
Россия, 143026, г. Москва, ул. Новая, д. 100а
E-mail: [a] vgoncharenko@nes.ru, [b] abshapoval@gmail.com

Получено 16.06.2017, после доработки — 17.09.2017.
Принято к публикации 20.09.2017.

В статье показано, что базовые свойства некоторых моделей монополистической конкуренции описываются с помощью семейств гипергеометрических функций. Результаты получены построением модели общего равновесия в многосекторной экономике, производящей дифференцированное благо в n высокотехнологичных секторах, в которых однопродуктовые фирмы конкурируют монополистически, используя одинаковые технологии. Однородный (традиционный) сектор характеризуется совершенной конкуренцией. Работники мотивированы найти работу в высокотехнологичных секторах, так как заработная плата там выше, однако рискуют остаться безработными. Безработица сохраняется в равновесии за счет несовершенства рынка труда. Заработная плата устанавливается фирмами в высокотехнологичных секторах в результате переговоров с работниками. Предполагается, что индивиды однородны как потребители, обладая одинаковыми предпочтениями, которые задаются сепарабельной функцией полезности общего вида. В статье найдены условия, при которых общее равновесие в построенной модели существует и единственно. Условия сформулированы в терминах эластичности замещения $\mathfrak{S}$ между разновидностями дифференцированного блага, которая усреднена по всем потребителям. Найденное равновесие симметрично относительно разновидностей дифференцированного блага. Равновесные переменные представимы в виде неявных функций, свойства которых связаны с введенной авторами эластичностью $\mathfrak{S}$. Полное аналитическое описание равновесных переменных возможно для известных частных случаев функции полезности потребителей, например в случае степенных предпочтений, которые некорректно описывают отклик экономики на изменение размера рынков. Чтобы упростить возникающие неявные функции, мы вводим функции полезности, заданные двумя однопараметрическими семействами гипергеометрических функций. Одно из семейств описывает проконкурентный, а другое — антиконкурентный отклик цен на увеличение размера экономики. Изменение параметра каждого из семейств соответствует перебору всех допустимых значений эластичности $\mathfrak{S}$. В этом смысле гипергеометрические функции исчерпывают естественные функции полезности. Установлено, что с увеличением эластичности замещения между разновидностями дифференцированного блага разница между высокотехнологичным и однородным секторами стирается. Показано, что при большом размере экономики индивиды в равновесии потребляют малое количество каждого товара, как и в случае степенных препочтений. Именно это обстоятельство позволяет приблизить используемые гипергеометрические функции суммой степенных функций в окрестности равновесных значений аргумента. Таким образом, переход от степенных функций полезности к гипергеометрическим, которые аппроксимируются суммой двух степенных функций, с одной стороны, сохраняет все возможности настройки параметров, а с другой — позволяет полностью описать эффекты, связанные с изменением размера секторов экономики.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, монополистическая конкуренция, общая функция полезности, эластичность замещения

В. М. Гончаренко выполнил свою часть работы в ходе проведения исследования (№ 17-01-0098) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)» в 2017–2018 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». А. Б. Шаповал выражает свою признательность за поддержку Министерству образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ, договор № 14.U04.31.0002.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2017 VOL. 9 NO. 5 P. 825–836
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-825-836

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 330.42

Hypergeometric functions in model of General equilibrium of multisector economy with monopolistic competition

V. M. Goncharenko[1,a], A. B. Shapoval[1,2,b]

[1]National Research University Higher School of Economics,
Myasnitskaya st. 20, Moscow, 101000, Russia
[2]New Economic School, CSDSI,
Novaya st. 100a, Moscow, 143026, Russia
E-mail: [a] vgoncharenko@nes.ru, [b] abshapoval@gmail.com

Received 16.06.2017, after completion — 17.09.2017.
Accepted for publication 20.09.2017.

We show that basic properties of some models of monopolistic competition are described using families of hypergeometric functions. The results obtained by building a general equilibrium model in a multisector economy producing a differentiated good in *n* high-tech sectors in which single-product firms compete monopolistically using the same technology. Homogeneous (traditional) sector is characterized by perfect competition. Workers are motivated to find a job in high-tech sectors as wages are higher there. However, they are at risk to remain unemployed. Unemployment persists in equilibrium by labor market imperfections. Wages are set by firms in high-tech sectors as a result of negotiations with employees. It is assumed that individuals are homogeneous consumers with identical preferences that are given the separable utility function of general form. In the paper the conditions are found such that the general equilibrium in the model exists and is unique. The conditions are formulated in terms of the elasticity of substitution $\mathfrak{S}$ between varieties of the differentiated good which is averaged over all consumers. The equilibrium found is symmetrical with respect to the varieties of differentiated good. The equilibrium variables can be represented as implicit functions which properties are associated elasticity $\mathfrak{S}$ introduced by the authors. A complete analytical description of the equilibrium variables is possible for known special cases of the utility function of consumers, for example, in the case of degree functions, which are incorrect to describe the response of the economy to changes in the size of the markets. To simplify the implicit function, we introduce a utility function defined by two one-parameter families of hypergeometric functions. One of the families describes the pro-competitive, and the other — anti-competitive response of prices to an increase in the size of the economy. A parameter change of each of the families corresponds to all possible values of the elasticity $\mathfrak{S}$. In this sense, the hypergeometric function exhaust natural utility function. It is established that with the increase in the elasticity of substitution between the varieties of the differentiated good the difference between the high-tech and homogeneous sectors is erased. It is shown that in the case of large size of the economy in equilibrium individuals consume a small amount of each product as in the case of degree preferences. This fact allows to approximate the hypergeometric functions by the sum of degree functions in a neighborhood of the equilibrium values of the argument. Thus, the change of degree utility functions by hypergeometric ones approximated by the sum of two power functions, on the one hand, retains all the ability to configure parameters and, on the other hand, allows to describe the effects of change the size of the sectors of the economy.

Keywords: hypergeometric function, monopolistic competition, general utility function, the elasticity of substitution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 825–836 (Russian).

The contribution of V. Goncharenko was performed within the framework of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2017–2018 grant 17-01-0098 and by the Russian Academic Excellence Project "5-100". A. Shapoval wishes to acknowledge the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, grant #14.U04.31.0002, administered through the NES Center for Study of Diversity and Social Interactions.

Введение

Гипергеометрические функции и ряды, а также их обобщения занимают важное место в современной прикладной математике. Хотя впервые они возникли в середине семнадцатого века как элементарные обобщения сходящегося ряда для суммы убывающей геометрической прогрессии, а затем использовались Л. Эйлером при изучении решений дифференциальных уравнений, сейчас гипергеометрические функции встречаются в различных областях применения математических знаний, от алгебраической топологии до статистической физики. Современный обзор прикладных исследований, в которых эти функции и их свойства играют ключевую роль, можно найти, например, в [Pham-Gia, 2016].

Напомним, что *гипергеометрическим рядом* комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, зависящим от параметров $a, b \in \mathbb{C}$ и $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, называется (см. [Whittaker, 1990; Abadir, 1999]) степенной ряд вида

$$1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \ldots. \tag{1}$$

Если комплексная плоскость разрезана по лучу $[1; +\infty)$, то ряд (1) определяет аналитическую функцию в комплексной плоскости, которая обозначается как ${}_2F_1(a, b; c; z)$ и называется *гипергеометрической функцией*. Индексы в записи ${}_2F_1(a, b; c; z)$ обозначают число параметров в числителе и знаменателе коэффициентов степенного ряда (1) соответственно.

Поскольку далее мы будем говорить о математическом моделировании в экономике, отметим, что в прикладных экономических задачах также часто используются *обобщенные гипергеометрические функции* (см., например, [Abadir, 1999]):

$${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} (a_k)_n}{\prod\limits_{k=1}^{q} (b_k)_n} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

где $(c)_n$ — символ Похгаммера, который вычисляется согласно правилу

$$(c)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (c+k) = c(c+1)\ldots(c+n-1) = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}.$$

Легко видеть, что ряд для ${}_0F_0(z)$ представляет из себя экспоненту, а ${}_1F_0(a; z)$ — ряд для $(1-z)^{-a}$. Поэтому гипергеометрическую функцию часто называют обобщением показательной.

Далее для простоты обозначений при работе с *гипергеометрическими функцими* индексы будут опускаться: $F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$. Интересно, что многие элементарные функции могут быть выражены через гипергеометрическую, например:

$$(1+z)^\alpha = F(-\alpha, \gamma; \gamma; -z),$$

где γ — произвольная константа, или

$$\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z), \qquad \arcsin z = zF(1/2, 1/2; 3/2; z^2).$$

Для связи с гамма-функцией заметим, что

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

а $F(1, 1; 1; z)$ является рядом для суммы убывающей геометрической прогрессии со знаменателем z, $|z| < 1$.

Применение гипергеометрических функций в экономике и финансах также разнообразно. Так, в терминах гипергеометрических функций записываются решения для обобщений модели Соллоу экономического роста (см. [Brida, 2005]). Ключевую роль гипергеометрические функции играют при описании решений модели Узавы – Лукаса эндогенного роста двухсекторной экономики [Boucekkine, 2008]. В финансах в качестве примера можно привести работу [Albanese, 2001], в которой авторы получили многообразие решений модели Блэка – Шоулза в гипергеометрических функциях, которые содержат в себе все ранее известные аналитически разрешимые случаи, а также новые семейства решений.

В работе [Shapoval, Goncharenko, 2016] была изучена модель многосекторной экономики с монополистической конкуренцией в n высокотехнологичных (промышленных) секторах и совершенной конкуренцией в сельскохозяйственном (традиционном) секторе. При этом предпочтения потребителей описываются функцией полезности общего вида. При выполнении некоторых условий на *эластичность замещения между товарами* в промышленных секторах доказано существование симметричного общего равновесия в модели, построенной в предположении, что рабочие мобильны внутри своих секторов, но не могут переходить из сектора в сектор.

Заметим, что, как правило, моделирование монополистической конкуренции связано с балансированием между необходимостью усложнения базовых моделей для получения адекватных теоретических предсказаний и достижимостью аналитических результатов. В частности, возникает естественный вопрос о выборе функции полезности потребителей. Отказываясь от полезности с постоянной эластичностью замещения, введенной еще Дикситом и Стиглицем в работе [Dixit, Stiglitz, 1977], которая не позволяет описывать эффекты размера рынка, Оттавиано и др. [Ottaviano, 2002], Беренс и Мюрата [Behrens, 2012] использовали специальные функции полезности. Их подход позволил провести глубокий теоретический анализ предложенных структурных моделей. Однако он оставляет в стороне вопрос об устойчивости выводов относительно изменений функций полезности.

Желободько и др. [Zhelobodko, 2012], Бертолетти и Этро [Bertoletti, 2013] разработали аналитические подходы к построению общего равновесия в экономиках, в которых потребители наделены сепарабельными препочтениями общего вида. Однако распространение их подходов на задачи, связанные с многосекторной экономикой, моделированием торговли между экономиками или влияния многомерной неоднородности рыночных агентов на базовые показатели неоднородности, связано с серьезными аналитическими трудностями. Для выявления эффекта, связанного с переменной эластичностью замещения между товарами, достаточно ввести неспецифицированную сепарабельную функцию полезности нижнего уровня и ограничиться полезностью Кобба – Дугласа на верхнем уровне. Именно так мы поступаем в данной работе.

Мы собираемся показать, что базовые свойства моделей монополистической конкуренции описываются с помощью функций полезности, которые представляют собой семейство гипергеометрических функций. Нашу идею мы продемонстрируем на примере модели общего равновесия, введенной в [Shapoval, Goncharenko, 2016]. Эта модель показывает зависимость структуры занятости от спроса потребителей и легко распространяется на другие модели.

Рассматриваемая нами модель является статической. С помощью сравнительной статики в ней можно оценить отклик экономики на макрошоки, связанные, например, с интеграцией экономик или, наоборот, их распадом.

Отметим, что мы не первые, кто использует гипергеометрические функции в моделях монополистической конкуренции. Так, в недавней работе [Mrazova, 2017] гипергеометрические функции задают примеры функций спроса, при которых распределение производительности фирм совпадает с распределением продаж. Но именно мы предлагаем использовать семейство таких функций, чтобы исчерпать все исследуемые значения эластичности замещения между товарами.

Использование семейства гипергеометрических функций позволяет, с одной стороны, использовать накопленные методы их исследования при аналитике, а с другой — позволяет сделать выводы, устойчивые относительно варьирования функции полезности.

Модель

Рассмотрим экономику, состоящую из традиционного (сельскохозяйственного) сектора (далее — сектор 0) с совершенной конкуренцией и n высокотехнологичных секторов с N_i, $i = 1, \ldots, n$, однопродуктовыми фирмами, которые монополистически конкурируют в каждом секторе.

В однородном секторе, в силу совершенной конкуренции, фирмы устанавливают цены на свою продукцию в соответствии с предельными издержками. Предполагая для простоты производительность труда в этом секторе равной 1, получаем, что цены p_0 равны зарплатам w_0.

В i-м высокотехнологичном секторе постоянные издержки фирмы, производящей товар ξ_i, полагаем равными c_i^{φ}. Переменные издержки фирмы связаны с зарплатами работников $w(\xi_i)$, работающих с обратной производительностью c_i^{v}, однородной в пределах сектора i. Тогда фирмы устанавливают цены $p(\xi_i)$, решая задачу оптимизации:

$$\pi(\xi_i) = p(\xi_i)Q(\xi_i) - c_i^{v}Q(\xi_i)w(\xi_i) - c_i^{\varphi}w(\xi_i) \longrightarrow \max, \tag{2}$$

где $Q(\xi_i)$ — агрегированный спрос на товар ξ_i от всех потребителей (точное определение см. ниже, формула (9)), зависящий от цены $p(\xi_i)$.

Число фирм N_i определяется условием свободного входа на рынок:

$$\pi(\xi_i) = 0.$$

Пусть $\mathcal{L}$ — общее число работников в экономике. Оно состоит из L_i занятых и L_i^u безработных рабочих в каждом из высокотехнологичных секторов, а также L_0 сельскохозяйственных работников:

$$\mathcal{L} = L_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(L_k + L_k^u\right).$$

Общее число безработных L_{n+1}, таким образом, находится по формуле

$$L_{n+1} = L_1^u + \ldots + L_n^u = \sum_{k=1}^{n} L_k^u.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что все безработные в экономике образуют «виртуальный» $(n + 1)$-й сектор.

Спрос

Агрегированный спрос $Q(\xi_i)$ зависит от индивидуального выбора потребителей. В свою очередь, доходы потребителей зависят от сектора, в котором они работают. В результате получаем, что в экономике существует $n + 2$ вида доходов:

$$y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1},$$

соответствующих сектору, причем индекс $n + 1$ отвечает доходу безработных.

Потребитель с доходом y_j, во-первых, распределяет свои доходы между товарами высокотехнологичных секторов, которые определяются индексами потребления H_i, $i = 1, \ldots, n$, и однородным товаром H_0. Максимизируя функцию полезности Кобба – Дугласа верхнего уровня:

$$U = H_0^{\beta_0}H_1^{\beta_1}\ldots H_n^{\beta_n} \longrightarrow \max, \tag{3}$$

где степени β_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям

$$0 \le \beta_i \le 1, \quad \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1,$$

потребитель распределяет свои расходы на продукцию i-го сектора пропорционально β_i.

Во-вторых, потребитель осуществляет выбор из многообразия товаров ξ_i, производимых в i-м секторе. Потребитель формирует спрос $q_j(\xi_i)$, где индекс $j = 0, \ldots, n+1$ отвечает его доходу y_j, максимизируя индекс потребления

$$H_i = \int\limits_{N_i} u_i\Big(q_j(\xi_i)\Big)\, d\xi_i \longrightarrow \max \tag{4}$$

с дифференцируемой функцией полезности $u_i(\varkappa)$, которая отражает предпочтения для i-го дифференцируемого товара, при условии связи

$$\int\limits_{N_i} p(\xi_i) q_j(\xi_i) d\xi_i \le \beta_i y_j. \tag{5}$$

Функция

$$\sigma_i(\varkappa) = -\frac{u_i'(\varkappa)}{u_i''(\varkappa)\varkappa}, \tag{6}$$

которая интерпретируется как эластичность замещения между товарами высокотехнологичного сектора, является ключевой в задаче поиска оптимального спроса $q_j(\xi_i)$. А именно, условия первого порядка задачи оптимизации (4)–(5) относительно цены $p(\xi_i)$ на товар ξ_i записываются как

$$\mathtt{E}_{p(\xi_i)} q_j(\xi_i) = -\sigma_i(q_j(\xi_i)), \tag{7}$$

где $\mathtt{E}_x y = \dfrac{y' x}{y}$. Таким образом, эластичность $\mathtt{E}_{p(\xi_i)} q_j(\xi_i)$ спроса $q_j(\xi_i)$ относительно цены $p(\xi_i)$ противоположна по знаку эластичности замещения.

Для дальнейшего исследования модели многосекторной экономики введем *взвешенную эластичность замещения*

$$\mathfrak{S}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{q_j(\xi_i) L_j}{Q(\xi_i)} \sigma_i(q_j(\xi_i)) \tag{8}$$

между товарами, где $Q(\xi_i)$ — агрегированный спрос на товар ξ_i:

$$Q(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n+1} q_j(\xi_i) L_j. \tag{9}$$

Легко проверить, что условия первого порядка (7) для индивидуального спроса могу быть обобщены на $Q(\xi_i)$:

$$\mathtt{E}_{p(\xi_i)} Q(\xi_i) = -\mathfrak{S}(\xi_i). \tag{10}$$

Условия первого порядка могут рассматриваться как рыночное правило, которое включает воображаемого «усредненного» потребителя с эластичностью замещения $\mathfrak{S}$ между высокотехнологичными товарами. Далее мы используем $\mathfrak{S}(\xi_i)$ для исследования равновесия модели.

Производство и рынок труда

Производство в экономике характеризуется технологиями, которые меняются от сектора к сектору, но одинаковы для всех фирм в секторе. Фирмы организуют производство исходя из производительности труда $1/c_i^v$. Чтобы произвести оптимальное количество $Q(\xi_i)$ товара ξ_i, фирма должна нанять

$$l(\xi_i) = c_i^v Q(\xi_i) + c_i^\varphi \tag{11}$$

рабочих.

Фирмы и рабочие согласуют заработную плату путем переговоров (см. подробности в [Stole, Zwiebel, 1996]). Фирма нанимает каждого рабочего, оценивая выгоду от найма дополнительной рабочей силы. В основе же соглашения о зарплате лежит равное деление излишков между всеми рабочими. При этом под излишком понимается разница между зарплатой, предложенной фирмой, и средней зарплатой в секторе, в котором работает фирма.

Работники мотивированы найти работу на высокотехнологичных рынках, так как заработная плата там выше, чем в однородном секторе. Однако для получения работы на одном из них (включая однородный) они должны приобрести определенные навыки, специфические для каждого сектора. Таким образом, чтобы найти работу, рабочие должны выбрать интересующий их сектор, пройти необходимую подготовку, а затем выйти на рынок труда в выбранной отрасли. После того как сектор для поиска работы выбран, он не может быть изменен. При этом сельскохозяйственный сектор может принять произвольное число работников. Наоборот, в высокотехнологичном секторе фирмы нанимают необходимое количество сотрудников и отказываются от других предложений. Мы предполагаем, что рынок труда в каждом секторе согласован с приобретенными навыками в том смысле, что отвергнутые при найме кандидаты не могут сразу найти работу в другом секторе, включая однородный, так как для этого они не обладают нееобходимой квалификацией. Эту особенность рынка труда мы будем называть фрикцией (frictions).

Однородность технологий внутри каждого из секторов уравнивает внутриотраслевую заработную плату $w_i = w(\xi_i)$. Если бы это было иначе, то фирмы имели бы возможность нанимать низкооплачиваемых работников из других фирм или безработных: у них достаточная квалификация, и они были бы согласны на меньшую зарплату.

Единый (плоский) налог с ставкой $\alpha \in (0, 1)$ налагается на заработную плату всех наемных работников, включая занятых в однородном секторе, и распределяется равномерно между безработными как пособие по безработице. Таким образом, мы можем найти чистый доход всех $\mathcal{L}$ работников в экономике:

$$y_i = (1 - \alpha)w_i,\ i = 0, \ldots, n, \tag{12}$$

$$y_{n+1} = \frac{\alpha(L_0 w_0 + L_1 w_1 + \ldots + L_n w_n)}{L_{n+1}}. \tag{13}$$

Рынок труда, на котором рабочие ищут работу, предполагается сбалансированным в среднем. При условии того, что вероятность получить работу и остаться безработными для каждого из высокотехнологичных секторов одинакова,

$$\frac{L_i}{L_i + L_i^u} \quad \text{и} \quad \frac{L_i^u}{L_i + L_i^u}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

ожидаемый доход на каждом из высокотехнологичных рынков совпадает с доходом в традиционном секторе:

$$\frac{y_i L_i}{L_i + L_i^u} + \frac{y_{n+1} L_i^u}{L_i + L_i^u} = y_0. \tag{14}$$

Как обсуждалось выше, ожидаемая зарплата в секторе является альтернативой при соглашении. При условии баланса рынка труда (14) этой альтернативой является w_0.

Следуя [Stole, Zwiebel, 1996], можно найти зарплаты, которые являются результатом переговоров фирмы с работниками:

$$w(\xi_i) = \left(\frac{p(\xi_i)}{c_i^v} + w_0\right) \frac{l(\xi_i)^2 - (c_i^\varphi)^2}{2l(\xi_i)^2}. \tag{15}$$

При этом производится $Q = (l - c^{\varphi})/c^{v}$ товаров. Последняя формула имеет место, если число рабочих l превосходит c^{φ}; в противном случае производство отсутствует. На самом деле в модели Стоула и Звибеля [Stole, Zwiebel, 1996] зарплаты представляются функцией, которая зависит от количества l работников на фирме и удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению. Мы выбрали стационарное (не зависящее от l) решение этого уравнения, поскольку идентичные работники в равновесии должны получать одинаковые зарплаты. Добавим, что стационарное решение является притягивающим: при большом количестве работников на фирме любое определение зарплат по Стоулу и Звибелю приводит к значениям, близким к стационарному.

В модели несовершенство рынка труда приводит к безработице в равновесии. Рабочие, в надежде на получение большей зарплаты, пытаются найти работу, но рискуют остаться безработными.

Описание равновесия в модели

Основными параметрами рассматриваемой экономики являются двухуровневые предпочтения с приписанными каждому сектору аддитивными предпочтениями $\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$, переменные $\{c_i^{v}\}_{i=1}^{n}$ и постоянные $\{c_i^{\varphi}\}_{i=1}^{n}$ издержки, общее число рабочих $\mathcal{L}$ в экономике, а также степени $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ полезности Кобба – Дугласа. При заданных параметрах экономики мы изучаем общее равновесие модели.

Определение 1. Множество цен $\{\widehat{p}(\xi_i)\}$, индивидуальных спросов $\{\widehat{q}_j(\xi_i)\}$, выпусков фирм $\{\widehat{s}(\xi_i)\}$ и их число $\widehat{N}_i$, зарплат $\widehat{w}_j$, доходов $\widehat{y}_j$, число рабочих $\widehat{L}_j$ в каждом секторе и число безработных $\widehat{L}_i^{u}$ в высокотехнологичных секторах при $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, n + 1$, $\xi_i \in [0, \widehat{N}_i]$ образуют *общее равновесие*, если выполнены следующие условия.

- Для любого фиксированного $j = 0, 1, \ldots, n + 1$ индивидуальные спросы $\{\widehat{q}_j(\xi_i)\}_{\xi_i \in [0, N_i], i=1,\ldots,n}$ являются решениями задачи потребителя (3)–(5) с $p(\xi_i) = \widehat{p}(\xi_i)$, $N_i = \widehat{N}_i$, $y_j = \widehat{y}_j$, $i = 1, \ldots, n$, $\xi_i \in [0, \widehat{N}_i]$.

- Для любого фиксированного $i = 1, \ldots, n$ и $\xi_i \in [0, \widehat{N}_i]$ задача фирмы относительно цен $p(\xi_i)$ определяется задачей (2), где $w(\xi_i) = \mathrm{const} = \widehat{w}$ и $Q(\xi_i) = \sum\limits_{j=0}^{n+1} q_j(\xi_i)\widehat{L}_j$ зависят неявно от $p(\xi_i)$. А именно, для любого фиксированного $j = 0, 1, \ldots, n+1$ определим индивидуальные спросы $\{q_j^{*}(\eta_k)\}_{\eta_k \in [0, \widehat{N}_k], k=1,\ldots,n}$ как решения задачи потребителя (3)–(5) с

  – ценами на товар ξ_i, равными $p(\xi_i)$,

  – ценами на другие товары $p(\eta_k) = \widehat{p}(\eta_k)$ при условиях $k \neq i$ или $k = i$ и $\eta_i \neq \xi_i$,

  – числом фирм $N_k = \widehat{N}_k$, $k = 1, \ldots, n$, $y_j = \widehat{y}_j$.

  Определенные таким образом индивидуальные спросы $q_j^{*}(\xi_i)$ подставлены вместо $q_j(\xi_i)$ в определение агрегированного спроса $Q(\xi_i)$. Мы требуем, чтобы цены $\widehat{p}(\xi_i)$ решали задачу оптимизации фирмы, сформулированную выше.

- Имеет место условие очищения рынка:

$$\widehat{s}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{n} \widehat{q}_j(\xi_i)\widehat{L}_j.$$

- Уравнения (11)–(15) верны с $L_j = \widehat{L}_j$, $L_i^u = \widehat{L}_i^u$, $y_j = \widehat{y}_j$, $w_j = \widehat{w}_j$, $p(\xi_i) = \widehat{p}(\xi_i)$ и $Q(\xi_i) = \widehat{s}(\xi_i)$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $\xi_i \in [0, \widehat{N}_i]$. Кроме этого,

$$\int\limits_{\widehat{N}_i} l(\xi_i)\, d\xi_i = \widehat{L}_i.$$

- Фирмы имеют свободный вход на рынок:

$$\widehat{p}(\xi_i)\widehat{s}(\xi_i) - c_i^v \widehat{s}(\xi_i)\widehat{w}(\xi_i) - c_i^\varphi \widehat{w}(\xi_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,\ \xi_i \in [0, \widehat{N}_i].$$

В дальнейшем значок $\widehat{\ }$ над равновесными переменными мы опускаем.

Условия равновесия и основная теорема

Конструкция равновесия выполнена при следующих условиях.

Предположение 1. *Мы рассматриваем только монотонные дифференцируемые функции $\sigma_i(\varkappa)$ и предполагаем, что они удовлетворяют условию*

$$\sigma_i(\varkappa) > 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

для любого $\varkappa \geq 0$.

Предположение 2. *Пусть L_j — равновесное число имеющих работу в секторе j. Предположим, что $L_j \geq 1$ и*

$$|\sigma_i'(\varkappa)| < \frac{L_j}{2C_i} \quad \text{для любых } i = 1, \ldots, n,\ j = 0, \ldots, n+1 \text{ и } \varkappa \geq 0,$$

где $C_i = c_i^\varphi / c_i^v$ — отношение фиксированных и переменных издержек.

Предположение 3. *Мы также предполагаем, что множество возможных индивидуальных спросов ограничено условиями*

$$\frac{\sigma_i(q_j(\xi_i))}{\sigma_i(q_{j'}(\xi_i))} < 2 \quad \text{для всех } i = 1, \ldots, n,\ j, j' = 0, \ldots, n+1.$$

Если σ_i возрастает, дополнительно мы предполагаем, что существует $\delta_i > 0$ такое, что верны неравенства

$$\sigma_i'(q_j(\xi_i))q_j(\xi_i) < \delta_i < \sigma_i(q_j(\xi_i)) - 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

для всех индивидуальных спросов $q_j(\xi_i))$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n+1$.

Предложение 1. *Пусть предположения 1–3 выполнены. Тогда общее равновесие существует и оно единственно. Это равновесие симметрично по многообразию i-го дифференцированного товара: $p(\xi_i)$ и $q_j(\xi_i)$ зависят от номера сектора i, но не от типа товара. Если мы обозначим как*

$$p_i = p(\xi_i), \quad q_{ij} = q_j(\xi_i), \quad Q_i = Q(\xi_i), \quad \mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}(\xi_i)$$

симметричные равновесные переменные, то они определяются следующими выражениями:

$$Q_i = C_i\,(\mathfrak{S}_i - 1)\,, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

$$p_i = \frac{\mathfrak{S}_i c_i^v w_i}{\mathfrak{S}_i - 1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

$$q_{ij} = \frac{(1-\alpha)\beta_j Q_i}{L_j} = \frac{(\mathfrak{S}_j + 1)Q_i}{\mathcal{L}\mathfrak{S}_j}, \; j = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

$$q_{i0} = \frac{Q_i}{\mathcal{L}}, \tag{19}$$

$$q_{i,n+1} = \frac{\alpha Q_i}{L_{n+1}}. \tag{20}$$

Следующие уравнения задают равновесные зарплаты, число занятых рабочих и безработных, а также число фирм в каждом из промышленных секторов:

$$w_i = \frac{\mathfrak{S}_i + 1}{\mathfrak{S}_i} w_0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

$$L_i = (1-\alpha)\beta_i \mathcal{L} \frac{\mathfrak{S}_i}{\mathfrak{S}_i + 1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad L_0 = (1-\alpha)\beta_0 \mathcal{L}, \tag{22}$$

$$L_{n+1} = \mathcal{L}\left(\alpha + (1-\alpha)\sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\mathfrak{S}_j + 1}\right), \tag{23}$$

$$L_i^u = \frac{\beta_i/(\mathfrak{S}_i + 1)}{\sum_{j=1}^{n} \beta_j/(\mathfrak{S}_j + 1)} L_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

$$N_i = \frac{(1-\alpha)\beta_i \mathcal{L}}{c_i^{\varphi}(\mathfrak{S}_i + 1)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Ниже мы рассматриваем примеры функций полезности, удовлетворяющих предположениям 1–3, которые выражаются через гипергеометрические функции. Эти примеры интересны с нескольких точек зрения. Во-первых, они представляют собой два семейства, имеющих убывающую и, соответственно, возрастающую эластичность замещения. Согласно [Shapoval, Goncharenko, 2016], они описывают конкурентный и антиконкурентный эффекты в высокотехнологичных секторах при изменении предпочтений потребителей. Во-вторых, при изменении параметров получаются все возможные значения эластичностей замещения, что позволяет провести полный анализ равновесия модели в рамках этих двух семейств.

Примеры

Рассмотрим примеры функций полезности, удовлетворяющие условиям 1–3.

Предложение 2. *Функции полезности, которые определяются уравнениями*

$$u(\varkappa) = \begin{cases} \dfrac{A}{2(A-1)}(\varkappa(\varkappa+2))^{\frac{A-1}{A}} F\left(1, 2 - \dfrac{2}{A}, 2 - \dfrac{1}{A}, -\dfrac{\varkappa}{2}\right), & \text{если } A > 1, \\ \ln\left(\varkappa + 1 + \sqrt{\varkappa^2 + 2\varkappa}\right), & \text{если } A = 1, \end{cases} \tag{26}$$

где $A \geq 1$ — некоторая константа, имеют убывающую эластичность замещения:

$$\sigma(\varkappa) = A\left(1 + \frac{1}{\varkappa + 1}\right), \quad A \geq 1. \tag{27}$$

Функции полезности, которые определяются уравнениями

$$u(\varkappa) = \begin{cases} \dfrac{A}{A-1}\varkappa^{1-\frac{1}{A}}(2\varkappa+1)^{1+\frac{1}{2A}} F\left(1, 2 - \dfrac{1}{2A}, 2 - \dfrac{1}{A}, -2\varkappa\right), & \text{если } A > 1, \\ 2\sqrt{2\varkappa+1} + \ln \dfrac{\sqrt{2\varkappa+1} - 1}{\sqrt{2\varkappa+1} + 1}, & \text{если } A = 1, \end{cases} \tag{28}$$

имеют возрастающую эластичность замещения:

$$\sigma(\varkappa) = A\left(2 - \frac{1}{\varkappa + 1}\right). \tag{29}$$

При этом выбор параметра A в формулах для эластичности замещения (27), (29) *определяется основными параметрами экономики — размером рынка $\mathcal{L}$ и отношением постоянных и переменных издержек C_i.*

Условие $\sigma_i > 1$ индуцирует аналогичное условие на взвешенную эластичность замещения между разновидностями: $\mathfrak{S} > 1$. Стандартные вычисления подтверждают, что отношение $Q_i/\mathcal{L}$ при стремлении знаменателя к бесконечности стремится к нулю для любого i. Тогда, согласно (18)–(20), при больших $\mathcal{L}$ равновесный индивидуальный спрос на каждую из разновидностей оказывается близок к нулю. Другими словами, агрегированный спрос на разновидности не чувствителен к увеличению экономики, а индивидуальный спрос убывает примерно как $1/\mathcal{L}$, что соответствует малым значениям $\varkappa$ в формулах (26)–(29). Этот результат соответствует моделям, в которых предпочтения описываются полезностями с постоянной эластичностью замещения между разновидностями.

В заключение отметим: легко проверить, что полезности (26) и (28) аппроксимируются суммой степенных функций в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$. А именно, при $A > 1$ и малых $\varkappa$ ($\varkappa \ll 1$) семейства (26) и (28) допускают разложение в ряды

$$u(\varkappa) = \frac{2^{-1/A}A}{A-1}\left(\varkappa^{1-\frac{1}{A}} - \frac{A-1}{2A(2A-1)}\varkappa^{2-\frac{1}{A}}\right) + O\left(\varkappa^{3-\frac{1}{A}}\right)$$

и, соответственно,

$$u(\varkappa) = \frac{A}{A-1}\left(\varkappa^{1-\frac{1}{A}} + \frac{A-1}{A(2A-1)}\varkappa^{2-\frac{1}{A}}\right) - O\left(\varkappa^{3-\frac{1}{A}}\right).$$

Приведенные разложения описывают отличие рассматриваемых семейств (26) и (28) от степенных полезностей (с постоянно эластичностью замещения). Подобный переход, согласно предложению 1, позволяет полностью описать эффекты, связанные с изменением структуры секторов и экономики в целом.

Отметим, что естественным продолжением исследований, связанных с построенной моделью, является ее практическое приложение к реальным данным. Поскольку количество параметров равновесия имеет тот же порядок, что и количество секторов, возникающие уравнения могут быть численно решены за адекватное время. Естественным конкурентом структурных моделей при решении практических задач являются вычислимые модели общего равновесия. Основные идеи и их приложения к экономике Российской Федерации приведены, например, в книгах [Макаров и др., 2007; Изотов, 2014]. Видимо, наилучшие результаты могут быть получены за счет объединения различных подходов. Структурные модели следует по возможности редуцировать, сохраняя найденные качественные закономерности.

Заключение

В работе построена модель многосекторной экономики, в высокотехнологичных секторах которой производится дифференцированное благо и фирмы конкурируют монополистически. Однородный сектор характеризуется совершенной конкуренцией. Определено общее равновесие в модели и найдены условия, при которых оно существует и единственно. Равновесие также симметрично, что позволяет найти индивидуальные спросы потребителей, цены на товары, зарплаты, число занятых и безработных, а также число фирм в каждом из секторов. В качестве примеров функций полезности общего вида, которые удовлетворяют условиям существования и единственности, определены два однопараметрических семейства гипергеометрических функций. Найденные примеры соответствуют убывающей и возрастающей эластичности замещения между товарами. При изменении параметров исчерпываются все возможные значения равновесной эластичности замещения. В этом смысле гипергеометрические функции позволяют провести полный анализ равновесия в модели.

Список литературы (References)

Изотов Д. А. Эмпирические модели общего экономического равновесия // Пространственная Экономика. — 2014. — Вып. 3. — С. 138–167.

Izotov D. A. Empiricheskie modeli obschego economicheskogo ravnovesiya [Empirical models of the general economical equilibrium] // Spatial economics. — 2014. — Vol. 3. — P. 138–167 (in Russian).

Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сулакшин С. С. Применение вычислимых моделей в государственном управлении // Научный эксперт. — 2007. — С. 1—304.

Makarov V. L., Bakhtizin A. R., Sulakshin S. S. Primenenie vychislimykh modelei v gosudarstvennom upravlenii [The application of computable models in public administration] // Scientific expert. — 2007. — P. 1–304 (in Russian).

Abadir M. K. An Introduction to Hypergeometric Functions for Economists // Econometric Reviews. — 1999. — Vol. 18. — P. 287–330.

Albanese C., Campolieti G., Carr P., Lipton A. Black-Scholes Goes Hypergeometric // Risk. — December 2001. — P. 99–103.

Behrens K., Murata Y. Trade, competition, and efficiency // Journal of International Economics. — 2012. — Vol. 87. — P. 1–17.

Bertoletti P., Etro F. Monopolistic Competition: A Dual Approach with an Application to Trade. — 2013. — https://ideas.repec.org/p/ven/wpaper/201309.html

Brida J. G., Maldonado E. J. L. Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model // GE, Growth, Math methods 0510003, EconWPA. — 2005. — http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpge/0510003.html

Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J. R. Special functions for the study of economic dynamics: The case of the Lucas-Uzawa model // Journal of Mathematical Economics. — 2008. — Vol. 44. — P. 33–54.

Dixit K., Stiglitz E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // The American Economic Review. — 1977. — Vol. 67. — P. 297–308.

Mrazova M., Neary J. P., Parenti M. Sales and Markup dispersion: theory and empirics. — 2017. — http://users.ox.ac.uk/ econ0211/papers/pdf/MNP_SizeDist.pdf

Ottaviano G. I., Tabuchi T., Thisse J.-F. Agglomeration and Trade Revisited // International Economic Review. — 2002. — Vol. 43. — P. 409–436.

Pham-Gia T., Thanh D. N. Hypergeometric Functions: From One Scalar Variable to Several Matrix Arguments, in Statistics and Beyond // Open Journal of Statistics. — 2016. — Vol. 6. — P. 951–994.

Shapoval A. B., Goncharenko V. M. A Response of the Economy to Changes in Employment Structure // Working paper EERC No. E 16/09. — 2016. — http://eercnetwork.com/paperinfo/371

Stole L. A., Zwiebel J. Organizational design and technology choice under intrafirm bargaining // The American Economic Review. — 1996. — P. 195–222.

Whittaker E. T., Watson G. N. A Course in Modern Analysis // Cambridge University Press. — 1990.

Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F. Monopolistic Competition: Beyond the Constant Elasticity of Substitution // Econometrica. — 2012. — Vol. 80. — P. 2765–2784.