

УДК: 519.6:530.1

Взаимодействие бризера с доменной стенкой в двумерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели

Ф. Ш. Шокиров

Физико-технический институт им. С. У. Умарова АН РТ,
734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, проспект Айни, 299/1

E-mail: shokirov@rambler.ru

Получено 28.07.2017.

Принято к публикации 29.09.2017.

Методами численного моделирования проведено исследование процессов взаимодействия осциллирующего солитона (бризера) с 180° -градусной доменной стенкой нееловского типа в рамках $(2+1)$ -мерной суперсимметричной $O(3)$ нелинейной сигма-модели. Целью настоящей работы является исследование нелинейной эволюции и устойчивости системы взаимодействующих локализованных динамических и топологических решений. Для построения моделей взаимодействия были использованы стационарные бризерные решения и решения в виде доменных стенок, полученные в рамках двумерного уравнения синус-Гордона добавлением специально подобранных возмущений вектору A_3 -поля в изотопическом пространстве блоховской сферы. При отсутствии внешнего магнитного поля нелинейные сигма-модели обладают формальной лоренц-инвариантностью, которая позволяет построить, в частности, движущиеся решения и провести полный анализ экспериментальных данных нелинейной динамики системы взаимодействующих солитонов. В настоящей работе на основе полученных движущихся локализованных решений построены модели налетающих и лобовых столкновений бризеров с доменной стенкой, где, в зависимости от динамических параметров системы, наблюдаются процессы столкновения и отражения солитонов друг от друга, дальнедействующие взаимодействия, а также распад осциллирующего солитона на линейные волны возмущений. В отличие от бризерного решения, обладающего динамикой внутренней степени свободы, интеграл энергии топологически устойчивого солитона во всех проведенных экспериментах сохраняется с высокой точностью. Для каждого типа взаимодействия определен интервал значений скорости движения сталкивающихся динамических и топологических солитонов в зависимости от частоты вращения вектора A_3 -поля в изотопическом пространстве. Численные модели построены на основе методов теории конечных разностных схем, использованием свойств стереографической проекции, с учетом теоретико-групповых особенностей конструкций класса $O(N)$ нелинейных сигма-моделей теории поля. По периметру двумерной области моделирования установлены специально разработанные граничные условия, которые поглощают линейные волны возмущений, излучаемые взаимодействующими солитонными полями. Таким образом, осуществлено моделирование процессов взаимодействия локализованных решений в бесконечном двумерном фазовом пространстве. Разработан программный модуль, позволяющий провести комплексный анализ эволюции взаимодействующих решений нелинейных сигма-моделей теории поля, с учетом ее групповых особенностей в двумерном псевдоевклидовом пространстве. Проведен анализ изоспиновой динамики, а также плотности и интеграла энергии системы взаимодействующих динамических и топологических солитонов.

Ключевые слова: динамика взаимодействия, двумерный бризер, доменная стенка, нелинейная сигма-модель, уравнение синус-Гордона, численное моделирование, изотопическое пространство

UDC: 519.6:530.1

Interaction of a breather with a domain wall in a two-dimensional $O(3)$ nonlinear sigma model

F. Sh. Shokirov

S. U. Umarov Physical-Technical Institute of AS RT,
Aini ave. 299/1, Dushanbe, 734063, Republic of Tajikistan

E-mail: shokirov@rambler.ru

Received 28.07.2017.

Accepted for publication 29.09.2017.

By numerical simulation methods the interaction processes of oscillating soliton (breather) with a 180-degree Neel domain wall in the framework of a $(2 + 1)$ -dimensional supersymmetric $O(3)$ nonlinear sigma model is studied. The purpose of this paper is to investigate nonlinear evolution and stability of a system of interacting localized dynamic and topological solutions. To construct the interaction models, were used a stationary breather and domain wall solutions, where obtained in the framework of the two-dimensional sine-Gordon equation by adding specially selected perturbations to the A_3 -field vector in the isotopic space of the Bloch sphere. In the absence of an external magnetic field, nonlinear sigma models have formal Lorentz invariance, which allows constructing, in particular, moving solutions and analyses the experimental data of the nonlinear dynamics of an interacting solitons system. In this paper, based on the obtained moving localized solutions, models for incident and head-on collisions of breathers with a domain wall are constructed, where, depending on the dynamic parameters of the system, are observed the collisions and reflections of solitons from each other, a long-range interactions and also the decay of an oscillating soliton into linear perturbation waves. In contrast to the breather solution that has the dynamics of the internal degree of freedom, the energy integral of a topologically stable soliton in the all experiments the preserved with high accuracy. For each type of interaction, the range of values of the velocity of the colliding dynamic and topological solitons is determined as a function of the rotation frequency of the A_3 -field vector in the isotopic space. Numerical models are constructed on the basis of methods of the theory of finite difference schemes, using the properties of stereographic projection, taking into account the group-theoretical features of constructions of the $O(N)$ class of nonlinear sigma models of field theory. On the perimeter of the two-dimensional modeling area, specially developed boundary conditions are established that absorb linear perturbation waves radiated by interacting soliton fields. Thus, the simulation of the interaction processes of localized solutions in an infinite two-dimensional phase space is carried out. A software module has been developed that allows to carry out a complex analysis of the evolution of interacting solutions of nonlinear sigma models of field theory, taking into account it's group properties in a two-dimensional pseudo-Euclidean space. The analysis of isospin dynamics, as well the energy density and energy integral of a system of interacting dynamic and topological solitons is carried out.

Keywords: dynamics of interaction, two-dimensional breather, domain wall, nonlinear sigma model, sine-Gordon equation, numerical simulation, isotopic space

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 773–787 (Russian).

1. Введение

Статические свойства солитонных решений в большинстве случаев поддаются аналитическому исследованию, но процессы их взаимодействия в основном удается исследовать лишь численными методами [Маханьков, 1983]. Именно численное моделирование остается, при отсутствии надежных аналитических методов, практически основным инструментом исследования поведения сложных комплексных нелинейных диссипативных систем, формирования когерентных структур в самоорганизующихся системах и динамики их взаимодействия.

В настоящей работе проведено численное исследование взаимодействия бризерных солитонов с 180-градусными доменными стенками (ДС) нееловского типа в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Численные эксперименты проведены в рамках хорошо известной $O(3)$ нелинейной сигма-модели (НСМ) теории поля. Для анизотропного случая $O(3)$ НСМ действие имеет вид

$$S = \int L d^4x = \int g \left[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + (s_3^2 - 1) \right] d^4x, \tag{1}$$

$$\mu = 0, 1, 2, \quad a = 1, 2, 3, \quad g = 1/2, \quad s_a s_a - 1 = 0,$$

где s_i ($i = 1, 2, 3$) — координаты единичного изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$, эволюционирующего в пространстве блоховской сферы $S^2 \in \mathbb{R}^3$. Уравнение Лагранжа–Эйлера $O(3)$ НСМ в специальной параметризации 2θ можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} 2\partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \sin 2\theta (1 - \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) = 0, \\ 2\cos \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \sin \theta \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mu = 0, 1, 2$, а $\theta(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ — эйлеровы углы [Муминов, Шокиров, 2014], связанные с $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ и комплексной параметризацией модели (1) следующим образом:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad z(x, y) = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = e^{i\varphi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

В работе [Шокиров, 2016] определен аналитический вид пробных функций двумерного уравнения синус-Гордона (УСГ), эволюционирующих к периодическим во времени (осциллирующим) радиально-симметричным решениям [см. также: Shokirov, 2016]. На основе найденных решений УСГ, добавлением возмущений трехмерному вектору АЗ-поля $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ изотопического пространства сферы S^2 [Муминов, Шокиров, 2014], были получены решения для $O(3)$ НСМ, названные в [Шокиров, 2016] бризерами. Заметим, что $O(3)$ НСМ (2) в специальной параметризации 2θ меридианного сечения ($\varphi = 0$) пространства изосферы S^2 сводится (см. рис. 1, а) к вполне интегрируемому УСГ следующего вида:

$$2\Box\theta = -\sin 2\theta, \tag{3}$$

где \Box — оператор Даламбера.

В работе [Шокиров, 2016] бризерные солитоны для УСГ (3) были получены на основе пробной функции

$$u(x, y, t) = -4\operatorname{arctg} \left[\frac{\gamma \sin v}{\cosh(\lambda x) \cosh(\lambda y)} \right], \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda'}}, \quad \lambda' = 1 - \lambda^2,$$

где для фазовых параметров $\lambda = \lambda(t)$ и $\nu = \nu(t)$ определена следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{tt} + \frac{3}{2\lambda'} \lambda \lambda_t^2 - (1 + \lambda') \nu_t^2 - \frac{12\sqrt{\lambda'}}{\lambda^2} (\lambda' \operatorname{arctg} \lambda - \lambda) = 0, \\ \nu_{tt} + \frac{1 + \lambda'}{\lambda \lambda'} \lambda_t \nu_t = 0. \end{cases}$$

Далее в работе [Шокиров, 2016] с учетом вышеуказанных соотношений между (2) и (3) для найденных бризеров вида (1) добавлением возмущений ($\varphi > 0$) изовектору $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ были построены решения $O(3)$ НСМ (2) (см. рис. 1, б).

Численные эксперименты, проведенные в [Шокиров, 2016], показали, что интеграл энергии (En) найденных решений при $\varphi \geq 0$ сохраняется с высокой точностью $En_{rad} < 4.5\%$ в течение достаточно долгого времени моделирования: $\approx 5e^{+4}$ итерационных циклов. Были получены хорошие согласования между результатами численных экспериментов и аналитических расчетов. На основе свойств лоренц-инвариантности $O(3)$ НСМ (2) были смоделированы также движущиеся бризеры вида (1) (см. рис. 2), показана их устойчивость и исследованы свойства полученных решений.

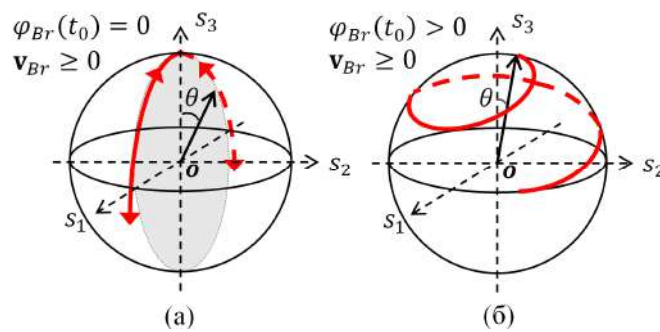


Рис. 1. Динамика $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в изопространстве сферы S^2 для бризера (4) при (а) $\varphi = 0$, (б) $\varphi > 0$

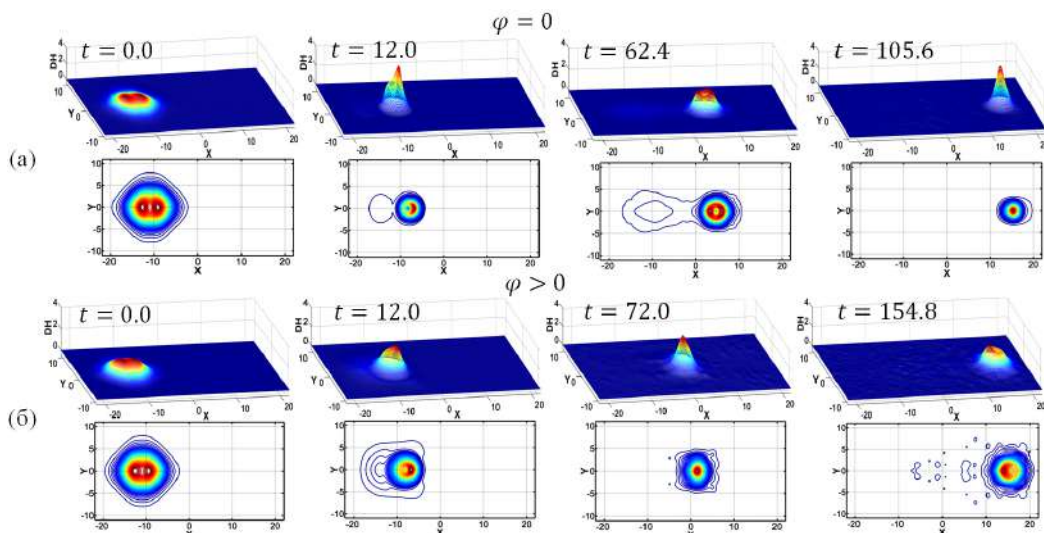


Рис. 2. Эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция движущихся с начальной скоростью $\nu(t_0) \approx 0.707$ бризеров (4) $O(3)$ НСМ (2) при (а) $\varphi = 0$, (б) $\varphi = 0.5$. Общее время моделирования: $t \in [0, 154.8]$

В работе [Муминов, Шокиров, 2015] на основе известных топологических решений в виде ДС (кинк/антикинк):

$$z(x, y, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left(F_1 \left(\frac{w}{k_1} x + \frac{w}{k_1} x_0 \right) + F_2 \left(\frac{w}{k_2} y + \frac{w}{k_2} y_0 \right) \right) \quad (5)$$

(2 + 1)-мерного УСГ следующего вида:

$$z_{tt} - k_1^2 z_{xx} - k_2^2 z_{yy} + w^2 \sin z = 0$$

аналогично предыдущему алгоритму (см. рис. 3) была построена численная модель стационарных и движущихся ДС (2 + 1)-мерной O(3) НСМ (2) (см. рис. 4). В частности, были получены дальнедействующие модели взаимодействия ДС, а также осциллирующие (бионные) модели их связанных состояний.

Заметим, что алгоритм численного моделирования, использованный в работах [Шокиров 2016; Shokirov, 2016], был разработан в работе [Муминов, 2002] для стационарного случая. В работах [Шокиров 2016; Shokirov, 2016] данная численная схема была обновлена для случаев движущихся локализованных решений и их взаимодействия.

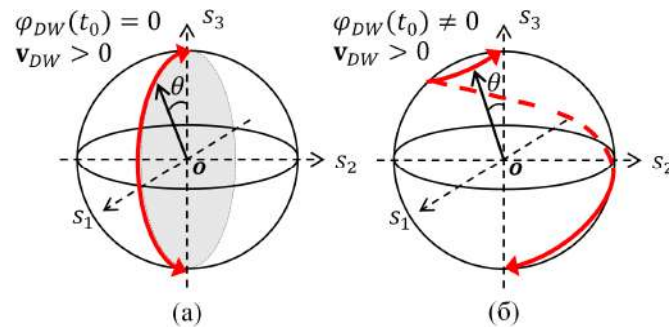


Рис. 3. Динамика $S(s_1, s_2, s_3)$ в изопространстве сферы S^2 для ДС (5) при (а) $\varphi = 0$, (б) $\varphi \neq 0$

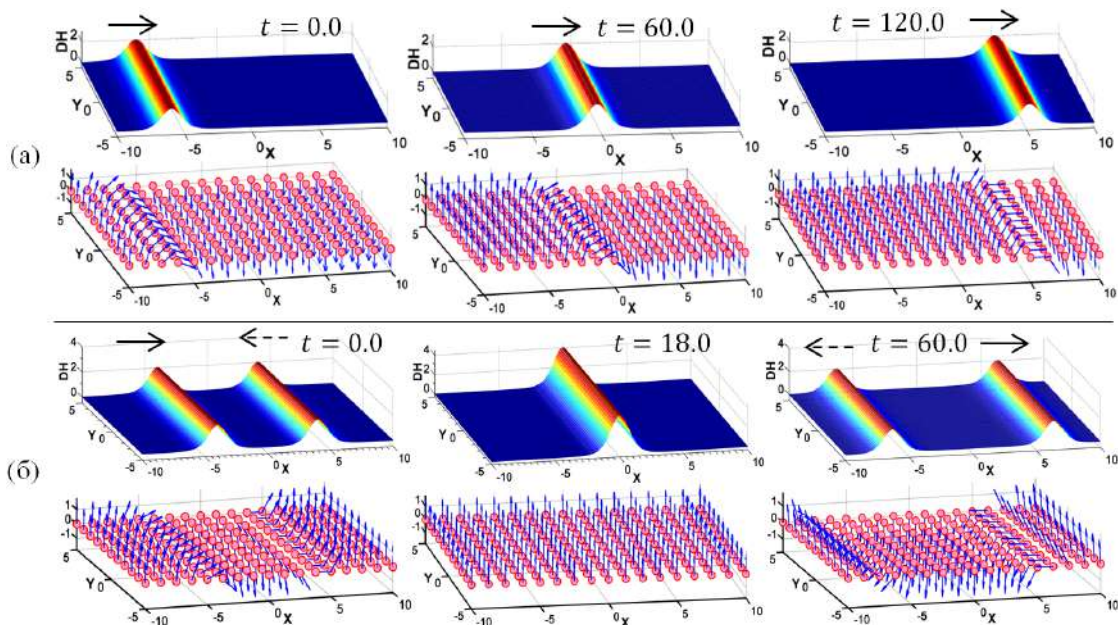


Рис. 4. Эволюция плотности энергии (DH) и изоспиновой структуры ДС (5) O(3) НСМ (2) при $\varphi = 0$, с заданной начальной скоростью $v(t_0) \approx 0.093$: а) движущаяся ДС; б) прохождение ДС сквозь друга. Общее время моделирования: $t \in [0, 120]$

На основе разработанных алгоритмов и проведенных аналитических расчетов в следующих частях настоящей работы приведены результаты численного моделирования взаимодействия солитонных решений (4) и (5), полученных в работах [Шокиров, 2016; Муминов, Шокиров, 2015]. Использована трехслойная разностная схема второго порядка точности $O(\tau^2 + h^2)$ на пятиточечном шаблоне с весами явного типа [Самарский, 1977]. Аппроксимация проведена на прямоугольной сетке $L[3001 \times 2201]$: $h_x(3e^{+3})$, $h_y(2.2e^{+3})$; в кубе (h_{xy}, t_τ) : $\tau_{\max}(5e^{+4})$. Устойчивость разностной схемы удовлетворяет требованиям для гиперболических систем уравнений: $\tau \leq \min(h / |\Delta|_{\max})$ ($|\Delta|_{\max} \rightarrow 1.67$). С более подробным описанием численной схемы можно ознакомиться в [Муминов, Шокиров, 2014].

Таким образом, содержание §§ 2–5 настоящей работы имеет следующий вид:

- взаимодействия бризеров с ДС в рамках УСГ;
- взаимодействия бризеров с ДС в рамках $O(3)$ НСМ;
- взаимодействия ДС УСГ с бризером $O(3)$ НСМ;
- взаимодействия ДС $O(3)$ НСМ с бризером УСГ.

Общим свойством проведенных численных экспериментов является сохранение структурной устойчивости топологических решений типа ДС (5) при всех задаваемых в экспериментах настоящей работы параметрах системы взаимодействующих солитонов.

2. Взаимодействие ДС с бризерами в УСГ

Запишем выражения для полевых функций s_i ($i=1,2,3$) для бризерных решений вида (4) и ДС вида (5).

А. Бризерный солитон (Br):

$$\mathbf{S}_{Br} = \begin{pmatrix} -\frac{2\xi}{1+\xi^2} \\ 0 \\ \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{\gamma \sin \nu}{\cosh(\lambda x \pm \mathbf{v}_L \tau) \cosh(\lambda y)}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (6a)$$

Б. ДС (DW):

$$\mathbf{S}_{DW} = \begin{pmatrix} \frac{2\xi}{1+\xi^2} \\ 0 \\ \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \end{pmatrix}, \quad \xi = \exp \left(F_1 \gamma' \mathbf{v}_L \left(\frac{w}{k_1} x + \frac{w}{k_1} x_0 \right) \pm \gamma' F_1 \mathbf{v}_L \tau + F_2 \left(\frac{w}{k_2} y + \frac{w}{k_2} y_0 \right) \right), \quad (6b)$$

где

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_L^2}}, \quad F_1^2 + F_2^2 = 1.$$

Разработаны два типа моделей взаимодействия солитонных решений (4) и (5).

1. Налетающие столкновения: $\mathbf{v}_{DW}(t_0) \in (0.0, 0.372)$, $\mathbf{v}_{Br}(t_0) = 0$.

2. Лобовые столкновения: $\mathbf{v}_{DW}(t_0) \in (0.0, 0.288)$, $\mathbf{v}_{Br}(t_0) \in (0.0, 0.708)$.

На рис. 5, а приведен пример налетающего столкновения движущейся со скоростью $\mathbf{v}_{DW}(t_0) \approx 0.093$ ДС с неподвижным бризером. При столкновении ($t = 127.2$) наблюдается определенная деформация плотности энергии (DH) ДС с последующими периодическими колеба-

ниями вплоть до конца времени моделирования: $t = 270.0$. При этом топологическая структура ДС полностью сохраняется. В отличие от ДС бризерный солитон при столкновении распадается на линейные волны возмущений, которые, распространяясь, поглощаются на периметре области моделирования специально разработанными граничными условиями [Муминов, 2002].

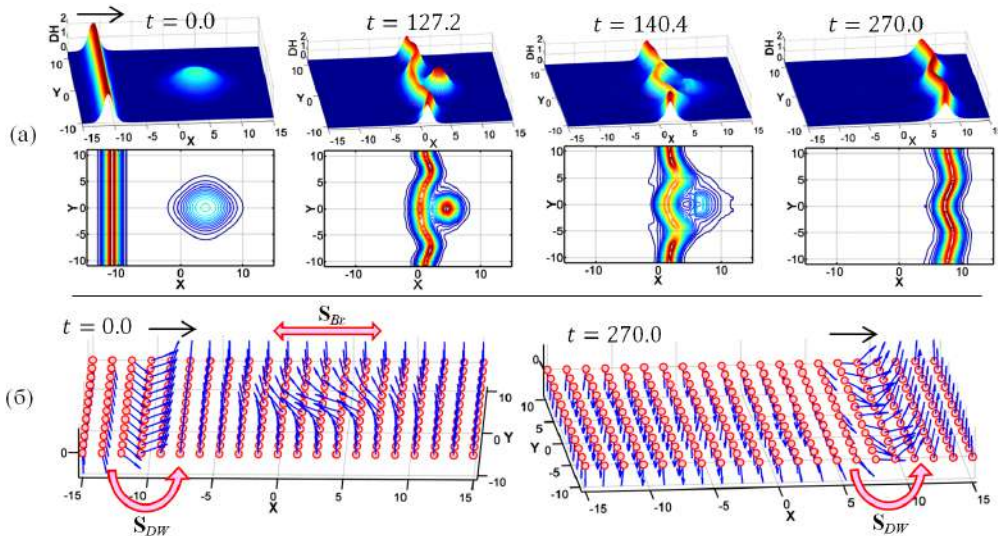


Рис. 5. Взаимодействие движущейся ($v_{DW}(t_0) \approx 0.093$) ДС (5) с неподвижным бризером (4) при $\varphi = 0$: а) эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция; б) изоспиновая структура исходного ($t = 0$) и конечного ($t = 270$) состояний системы

На рис. 5, б) приведена изоспиновая структура вышеописанного процесса при $t = 0$ и $t = 270.0$. В области бризерного поля изотопический вектор \mathbf{S}_{Br} эволюционирует в меридианном сечении блоховской сферы S^2 (см. рис. 5, б). При этом $|\theta| < \pi$ (см. рис. 1, а). Изотопический вектор \mathbf{S}_{DW} также эволюционирует в меридианном сечении S^2 вдоль ДС (см. рис. 5, б), но при этом осуществляется переход между вакуумными состояниями $\theta = \pi$ и $\theta = 0$ (см. рис. 3, а).

3. Взаимодействие ДС с бризерами в O(3) НСМ

В рамках O(3) НСМ в динамику изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ добавляется специально подобранное возмущение $\varphi = \omega\tau$ ($\omega \neq 0$), которое изменяет вид $\mathbf{S}_{Br}(s_1, s_2, s_3)$ и $\mathbf{S}_{DW}(s_1, s_2, s_3)$ в (6) следующим образом:

$$\mathbf{S}_{Br} = \begin{pmatrix} -\frac{2\xi_{Br}}{1+\xi_{Br}^2} \cos \varphi \\ -\frac{2\xi_{Br}}{1+\xi_{Br}^2} \sin \varphi \\ \frac{1-\xi_{Br}^2}{1+\xi_{Br}^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{DW} = \begin{pmatrix} -\frac{2\xi_{DW}}{1+\xi_{DW}^2} \cos \varphi \\ -\frac{2\xi_{DW}}{1+\xi_{DW}^2} \sin \varphi \\ \frac{1-\xi_{DW}^2}{1+\xi_{DW}^2} \end{pmatrix}.$$

В этой серии экспериментов, аналогично предыдущей части, рассматриваются налетающие и лобовые столкновения ДС (5) с бризерами (4). Общим свойством всех разработанных моделей в данном случае является обнаружение так называемых дальнедействующих сил: солитоны (4) и (5) отражаются друг от друга без явного столкновения (см. рис. 6).

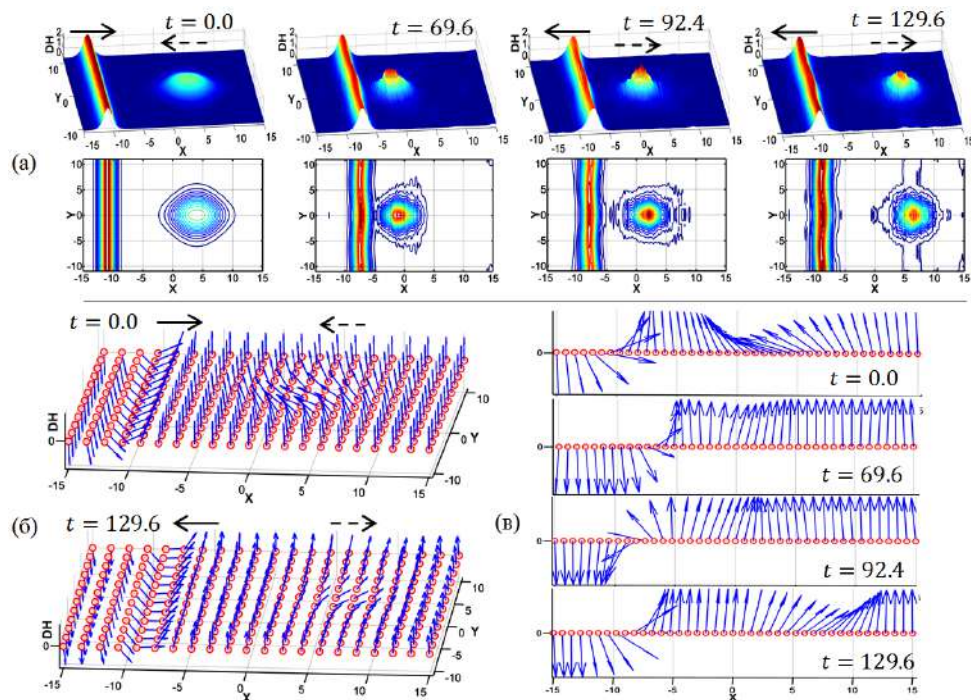


Рис. 6. Дальнедействие движущихся ($\mathbf{v}_{DW}(t_0) \approx 0.093$, $\mathbf{v}_{Br}(t_0) \approx -0.447$) во встречном направлении ДС (5) и бризера (4) при $\varphi_{DW} = \varphi_{Br} = 0.5\tau$: а) эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция. Изоспиновая структура: б) исходное ($t = 0$) и конечное ($t = 129.6$) состояния системы; в) динамика системы в сечении (x, θ, t)

4. Взаимодействие ДС с бризерами в УСГ и О(3) НСМ

В предыдущих экспериментах были рассмотрены налетающие и лобовые столкновения так называемых однотипных ($\varphi_{DW} = \varphi_{Br}$) с точки зрения динамики изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ ДС (5) с бризерами (4). В этой серии экспериментов рассмотрим аналогичные взаимодействия разнотипных ($\varphi_{DW} \neq \varphi_{Br}$) в вышеуказанном смысле топологических (5) и динамических солитонов (4).

А. Взаимодействия ДС УСГ ($\varphi_{DW} = 0$) с бризерами О(3) НСМ ($\varphi_{Br} = \omega\tau$, $\omega \neq 0$). В данной конфигурации при всех значениях динамических параметров системы происходит разрушение бризерного солитона (4) при столкновении с ДС. Аналогично экспериментам предыдущей части бризер при взаимодействии с ДС распадается на линейные радиально-симметричные волны возмущений, которые, распространяясь, затухают под воздействием граничных условий. Наблюдается определенная деформация плотности энергии ДС, при этом ДС полностью сохраняют структурную устойчивость вплоть до конца времен моделирования $t \in [0, 170]$.

Б. Взаимодействия ДС О(3) НСМ ($\varphi_{DW} = \omega\tau$, $\omega \neq 0$) с бризерами УСГ ($\varphi_{Br} = 0$). В этой серии экспериментов аналогично процессам, описанным в предыдущем пункте (А), происходит распад бризерного решения на линейные волны возмущений. Но в случае лобовых столкновений при распаде бризерного солитона часть линейных волн возмущений проходит поле ДС. При скорости движения бризерного солитона $\mathbf{v}_{Br}(t_0) > 0.5$ данные линейные волны, проходя поле ДС, образуют хорошо локализованный движущийся сгусток энергии (см. рис. 7).

На рис. 7 приведен пример лобового столкновения ДС (5) О(3) НСМ ($\varphi_{DW} = 0.5\tau$) с бризерным солитоном (4) УСГ ($\varphi_{Br} = 0$) (см. также рис. 2, а). После столкновения (рис. 7, а, $t = 26.4$) часть плотности энергии бризерного солитона распадается на линейные волны воз-

мущений, остальная часть проходит поле ДС (рис. 7, а, $t = 32.4$) в виде локализованного осциллирующего сгустка энергии и, достигая края области моделирования, поглощается граничными условиями (рис. 7, а, $t = 54$).

На рис. 7, б приведена иллюстрация проекции изоспиновой структуры системы взаимодействующих солитонов (4) и (5) в одномерном сечении (x, θ, t) на плоскость XZ (слева), плоскость XY (справа).

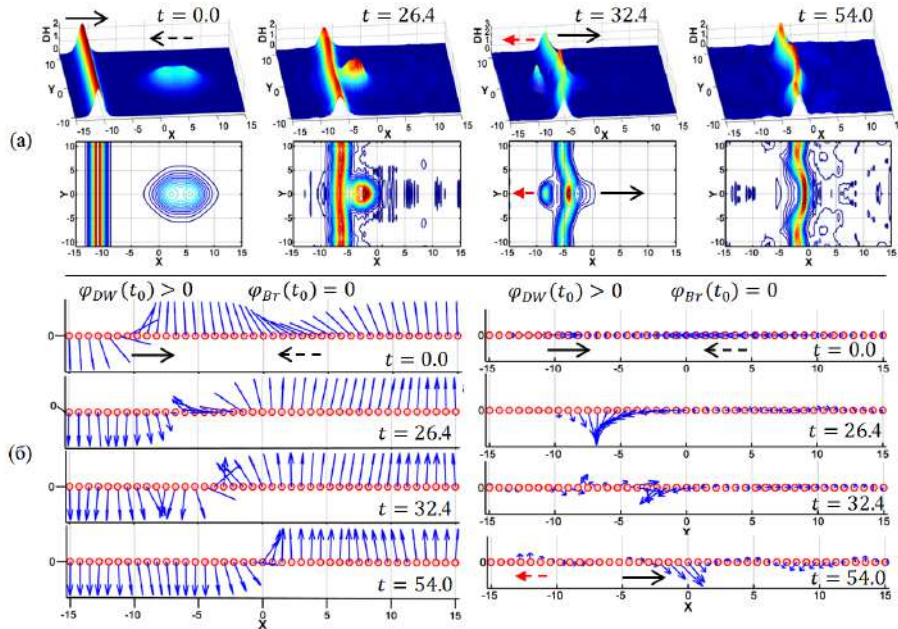


Рис. 7. Взаимодействие движущихся ($\mathbf{v}_{DW}(t_0) \approx 0.196$, $\mathbf{v}_{Br}(t_0) \approx -0.707$) во встречном направлении ДС (5) и бризера (4) при $\varphi_{DW} = 0.5\tau$, $\varphi_{Br} = 0$: а) эволюция плотности энергии (DH) и ее контурная проекция; б) динамика изоспиновой структуры системы в сечении (x, θ, t)

5. Обсуждение полученных результатов

Прежде всего, отметим, что ДС вида (5), как и следовало ожидать, вследствие своей топологической природы (см., например, рис. 3) проявляют структурную устойчивость во всех численных экспериментах, проведенных в настоящей работе. В отличие от ДС (5) бризерные решения (4), обладающие внутренней динамикой степеней свободы, но не обладающие топологической устойчивостью (см., например, рис. 1), при взаимодействии с ДС теряют структурную целостность и распадаются на линейные волны. ДС не обладают динамикой внутренней степеней свободы и при компьютерном моделировании интеграл их энергии в стационарном случае сохраняется с высокой точностью (см. таблицу 1: $\omega = 0.0$; $\mathbf{v}_{DW}(t_0) = 0$):

$$\frac{\Delta E_n}{E_n} \approx 10^{-6} - 10^{-5},$$

в течение достаточно долгого времени численного счета — $2e^{+4}$ итерационных циклов. При численном моделировании движущихся с относительно малой скоростью ($\approx 0.1c$) ДС наблюдается незначительная потеря энергии ($\approx 10^{-4}$) и скорости (см. таблицу 1: $\omega = 0.0$; $\mathbf{v}_{DW}(t_0) = 0.0995$):

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_{DW}}{\mathbf{v}_{DW}(t_0)} \approx 10^{-2}.$$

В рассмотренных случаях высокая точность сохранения интегралов энергии (En) ДС объясняется отсутствием дополнительной вращательной динамики ($\varphi = \omega\tau > 0$) вектора $\mathbf{S}_{DW}(s_1, s_2, s_3)$ в пространстве изосферы $S^2 \in \mathbb{R}^3$ (см. рис. 3, а). Как было указано во введении, в этом случае ДС (5) являются топологическими решениями типа «кинк/антикинк» УСГ (3) (в рамках O(3) НСМ при $\omega = 0.0$).

Таблица 1. Расчетные данные результатов численного моделирования ДС вида (5)

	$\mathbf{v}_{DW}(t_0)$ $t_0 = 0$	$\mathbf{v}_{DW}(t)$ $t = 120$	$\mathbf{v}_{Loss}(t)$ (%)	$En_{DW}(t_0)$ $t_0 = 0$	$En_{DW}(t)$ $t = 120$	$En_{Loss}(t)$ (%)	$DH_{max}(t)$ $t \in [0, 120]$
$\omega = 0.0$	0	0	0	87.99058	87.98288	0.008751	2.0133
$\omega = 0.5$	0	0	0	98.9813	97.65628	1.338653	2.3185
$\omega = 1.0$	0	0	0	131.95316	117.63121	10.85382	3.5084
$\omega = 0.0$	0.0995	0.09583	3.68844	88.41342	88.38271	0.034735	2.0368
$\omega = 0.1$	0.0995	0.09250	7.03517	88.85076	88.81495	0.040304	2.0488
$\omega = 0.2$	0.0995	0.08916	10.39196	90.16273	90.08998	0.080687	2.0627
$\omega = 0.3$	0.0995	0.08523	14.34171	92.34936	92.21364	0.146964	2.1145
$\omega = 0.4$	0.0995	0.08166	17.92362	95.41063	95.00863	0.421337	2.1869
$\omega = 0.5$	0.0995	0.07166	27.97387	99.34657	98.38552	0.967371	2.2798
$\omega = 0.6$	0.0995	0.06251	37.14472	104.15711	102.55432	1.53882	2.3931
$\omega = 0.7$	0.0995	0.04541	54.36181	109.84231	107.38763	2.234731	2.5267
$\omega = 0.8$	0.0995	0.03375	66.0804	116.40213	111.70834	4.032392	2.6804
$\omega = 0.9$	0.0995	0.01083	89.11558	123.83657	115.20905	6.96686	2.8541
$\omega = 1.0$	0.0995	0.00666	93.30653	132.14562	120.03550	9.164224	3.0475

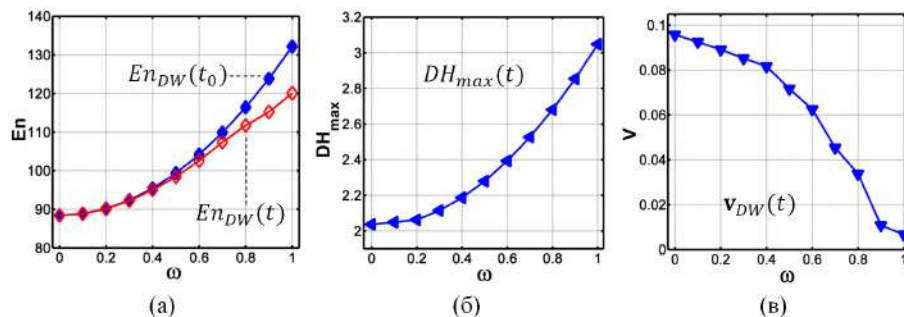


Рис. 8. Изменения параметров стационарных и движущихся ($\mathbf{v}_{DW}(t_0) \approx 0.0995$) ДС (5) в зависимости от значений $\omega \in [0, 1]$: а) интеграл энергии (En) ДС при $t = 0$ (\blacklozenge) и $t > 0$ ($\color{red}\blacklozenge$); б) максимальное значение плотности энергии (DH) ДС; в) скорость движения ДС при $t > 0$. Общее время моделирования: $t \in [0, 120]$

При ненулевых значениях частоты (для $\omega > 0$, см. рис. 8) вращения вектора $\mathbf{S}_{DW}(s_1, s_2, s_3)$ в изопространстве S^2 (решения O(3) НСМ) наблюдается пропорциональное увеличение значений интеграла энергии (En) ДС (рис. 8, а) и плотности энергии (DH) движущейся ДС (рис. 8, б). Обратное пропорционально значениям $\omega > 0$ изменяется скорость движения ДС $\mathbf{v}_{DW}(t)$ (рис. 8, в), так как часть энергии движущейся ДС поглощается дополнительной динамикой изо-вектора $\mathbf{S}_{DW}(s_1, s_2, s_3)$ (см. рис. 3, б).

В отличие от известных топологических решений (5) осциллирующие солитоны (4), найденные в работе [Шокиров, 2016], обладают более сложной динамической структурой. В таблице 2 приведены численные результаты компьютерного моделирования эволюции стационарных и движущихся бризеров (4) при различных значениях ω и $\mathbf{v}_{Br}(t_0)$.

Таблица 2. Расчетные данные результатов численного моделирования бризерных решений (4)

	$v_{Br}(t_0)$ $t_0 = 0$	$v_{Br}(t)$ $t = 30$	$v_{Loss}(t)$ (%)	$En_{Br}(t_0)$ $t_0 = 0$	$En_{Br}(t)$ $t = 30$	$En_{Loss}(t)$ (%)	$DH_{max}(t)$ $t \in [0, 120]$
$\omega = 0.0$	0	0	0	40.35138	40.13715	0.530911	5.9295
	0.28735	0.08333	28.99948	41.58195	41.3427	0.57537	6.2815
	0.5145	0.17166	33.36443	45.27318	44.87444	0.880742	6.9518
	0.57346	0.22666	39.52499	47.01444	46.52939	1.031704	7.4171
	0.70711	0.28226	39.91741	54.02363	53.19665	1.530775	8.6361
	0.83205	0.35333	42.465	71.11047	69.19852	2.688704	11.69
	0.89443	0.41666	46.58386	94.92982	91.34355	3.777812	10.863*
$\omega = 0.5$	0	0	0	49.41923	49.24811	0.346262	2.4148
	0.28735	0.06166	21.45815	50.64933	50.47488	0.344427	2.7129
	0.44721	0.11342	25.36169	52.80053	52.51760	0.535847	3.2563
	0.57346	0.15666	27.31838	56.07684	55.72048	0.635485	4.1460
	0.70711	0.18333	25.92666	63.09135	62.56744	0.830399	5.5036

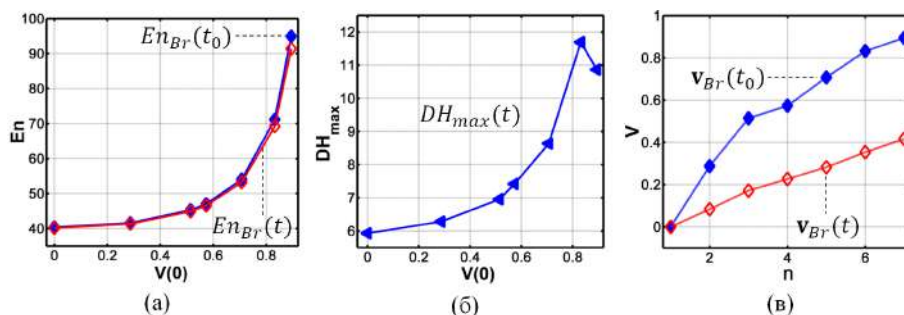


Рис. 9. Изменения параметров стационарных и движущихся ($v_{Br}(t_0) \in [0, 0.9]$) бризеров вида (4) при $\omega = 0$: а) интеграл энергии (En) бризера при $t = 0$ (\blacklozenge) и $t > 0$ (\redlozenge); б) максимальное значение плотности энергии (DH); в) скорость движения бризера при $t = 0$ и $t > 0$. Общее время моделирования: $t \in [0, 30]$

Изменение скорости движения $v_{Br}(t_0)$ бризеров оказывает незначительное влияние значениям интеграла их энергии (En) (см. рис. 9, а). Аналогично случаю с ДС (см. рис. 8, а) наличие дополнительной динамики изотопического вектора $S_{Br}(s_1, s_2, s_3)$ приводит к пропорциональному изменению значений энергии бризерного поля (см. таблицу 2, столбцы 5, 6, при $\omega = 0$ и $\omega = 0.5$). При прохождении определенного порога скорости движения ($v_{Br}(t_0) > 0.87$) в отсутствие дополнительной динамики ($\omega = 0$) вектора $S_{Br}(s_1, s_2, s_3)$ бризерное поле разделяется на два хорошо локализованных осциллирующих сгустка энергии (бризеры) (см. рис. 9, б, при $v_{Br}(t_0) \rightarrow 0.89$). При этом один из бризеров осциллирует в исходном положении, а второй бризер движется в заданном при $t = 0$ направлении. На рис 9, б показан процесс изменения значений максимальной плотности энергии (DH_{max}) бризерного поля (4) пропорционально изменению скорости его движения $v_{Br}(t_0) \in [0, 0.9]$. Дополнительная динамика внутренних степеней свободы бризерного решения (4) поглощает значительную часть исходной энергии, что приводит к вариации значений заданной ($v_{Br}(t_0)$) и реальной ($v_{Br}(t)$) скорости движения бризерного солитона (рис. 9, в).

Численные параметры результатов взаимодействия бризерных солитонов (4) с ДС вида (5), описанных в настоящей работе, приведены в таблице 3. Данные таблицы 3 сгруппированы в зависимости от значений частоты ω вращения вектора $S(s_1, s_2, s_3)$ в изопространстве блоховской сферы S^2 (см. рис. 1 и 3). Как было описано в предыдущих частях настоящей работы, в случаях

Таблица 3. Расчетные данные результатов численного моделирования взаимодействия бризерных решений (4) с ДС (5)

№	$v_{DW}(t_0)$ $t_0 = 0$	$v_{Br}(t_0)$ $t_0 = 0$	ω_{DW}	ω_{Br}	T_{sim}	$En_{All}(t_0)$ $t_0 = 0$	$En_{All}(t)$ $t = T_{sim}$	$En_{Loss}(t)$ (%)
1.	0.0995	0	0	0	270	132.73686	101.69092	23.38909
	0.19612	0	0	0	135.6	133.79567	98.98400	26.01853
	0.37139	0	0	0	64.8	138.92518	100.19718	27.87688
	0.0995	-0.44721	0	0	265	136.15824	101.18521	25.68558
	0.0995	-0.70711	0	0	254.4	146.40258	98.21466	32.91467
2.	0.0995	0	0.5	0.5	58.8	152.73096	150.38154	1.538274
	0.19612	0	0.5	0.5	78	153.62527	150.13346	2.27294
	0.28735	0	0.5	0.5	76.8	155.29622	144.41248	7.008374
	0.37139	0	0.5	0.5	63.6	158.06018	145.85887	7.719408
	0.0995	-0.44721	0.5	0.5	130.8	156.15229	151.94142	2.696643
	0.0995	-0.70711	0.5	0.5	91.2	166.39668	160.81378	3.355175
3.	0.0995	0	0	0.5	64.8	141.79469	104.8156	26.07932
	0.19612	0	0	0.5	55.2	143.31106	101.6629	29.06139
	0.28735	0	0	0.5	57.6	145.20448	102.9545	29.09691
	0.37139	0	0	0.5	48	148.30614	106.7823	27.99874
	0.0995	-0.44721	0	0.5	97.2	145.70963	104.3032	28.41706
	0.0995	-0.70711	0	0.5	48	145.20448	103.7135	28.57419
4.	0.0995	0	0.5	0	146.4	144.16193	103.21841	28.40106
	0.19612	0	0.5	0	97.2	145.02324	105.49241	27.25828
	0.28735	0	0.5	0	48	146.63827	105.19823	28.26009
	0.37139	0	0.5	0	48	149.3303	107.59775	27.94653
	0.0995	-0.44721	0.5	0	97.2	147.57919	100.76724	31.7199
	0.0995	-0.70711	0.5	0	48	157.81647	103.86991	34.18312
	0.19612	-0.44721	0.5	0	81.6	148.44017	100.27992	32.44425
	0.19612	-0.70711	0.5	0	48	158.67711	102.77473	35.23029

$\{\omega_{DW} = 0, \omega_{Br} = 0\}$, $\{\omega_{DW} = 0, \omega_{Br} > 0\}$ и $\{\omega_{DW} > 0, \omega_{Br} = 0\}$ происходит разрушение бризерного решения (4) при взаимодействии с ДС (5) (см. таблицу 3, группы 1, 3, 4).

Сохранение устойчивости бризеров (4) наблюдается в случае $\omega_{DW} = \omega_{Br} > 0$, которому соответствуют данные второй группы экспериментов в таблице 3. Как было указано в § 3 настоящей работы, в данном случае наблюдается проявление дальнедействующих сил (см. рис. 6): ДС и бризерный солитон отражаются друг от друга без явного столкновения.

В случае взаимодействующих топологических вихрей в работе [Муминов, Шокиров, 2016] было показано, что проявление дальнедействующих сил однозначно определяется следующими двумя условиями:

1) в резонансной зоне проекции векторов $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ взаимодействующих солитонных полей на плоскость z (S_z^p) вращаются в одном направлении — S_{rot}^p ($\uparrow\uparrow$);

2) S_z^p решений (4) и (5) в резонансной зоне эволюционируют антипараллельно — S_z^p ($\uparrow\downarrow$).

В нашем случае, при $\omega_{DW} = \omega_{Br}$, выполняется первое из вышеуказанных условий. Легко проверить, что второе условие выполняется при следующих значениях изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ в резонансной зоне:

$$\mathbf{S}_{DW} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_{DW} = 0 \cap \xi_{DW} = \pm 1, \quad \mathbf{S}_{Br} = \begin{pmatrix} \mp 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_{Br} = 0 \cap \xi_{Br} = \mp 1.$$

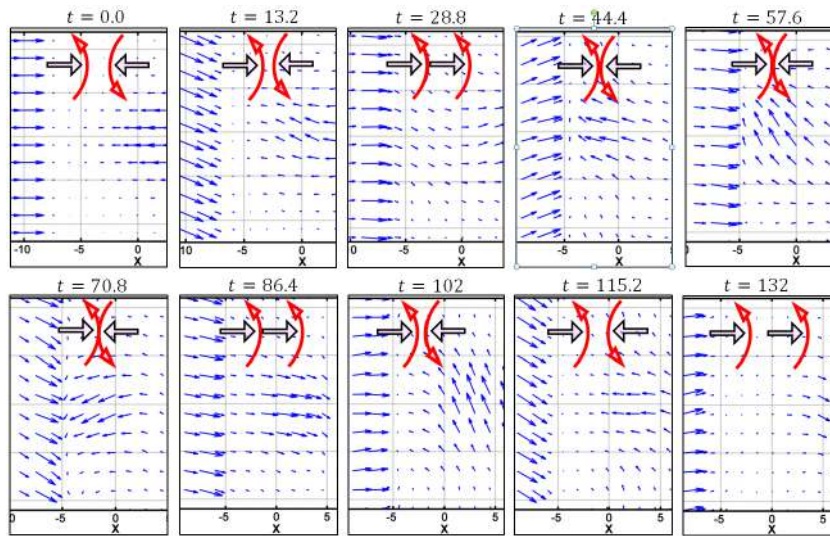


Рис. 10. Динамика проекций векторов изоспиновой структуры системы дальнедействующих солитонов вида (4) и (5) при $\omega_{DW} = \omega_{Br} = 0.5$, $v_{DW}(t_0) \approx 0.0995$. Общее время моделирования: $t \in [0, 132]$

На рис. 10 приведена иллюстрация динамики проекции изотопического вектора (спина) $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ на плоскость $L(x, y) — S_z^p$. В течение общего времени моделирования ($t = 132, 2.2e^3$ итерационных циклов) наблюдается девять когерентных оборотов проекций векторов изоспиновой структуры ДС ($S_{DW_z}^p$) в направлении $\varphi > 0$ (против направления часовой стрелки). За это же время количество аналогичных вращений проекции векторов изоспиновой структуры бризерного солитона ($S_{Br_z}^p$) равно 20. Таким образом, второе условие проявления дальнедействующих сил ($S_z^p(\uparrow\downarrow)$) выполняется при $t = \{0.0, 13.2, 44.4, 57.6, 70.8, 102.0, 115.2\}$ (рис. 10). В трех остальных случаях ($S_z^p(\uparrow\uparrow)$) [Муминов, Шокиров, 2016] существенными являются два первых при $t = 28.8$ и $t = 86.4$, так как при $t = 132$ солитоны отдалены от резонансной зоны (см. рис. 6, а, $t = 129.6$). Тем не менее в данном примере численные эксперименты показывают, что выполнение условия $S_z^p(\uparrow\downarrow)$ в большинстве из рассмотренных моментов (7 из 10) оказывается достаточным для проявления дальнедействующих сил.

6. Заключение

В настоящей работе проведено компьютерное исследование процессов взаимодействия динамических (бризерных) и топологических (кинк/антикинк) солитонов в рамках так называемой $(2 + 1)$ -мерной анизотропной нелинейной сигма-модели. Симметрией модели является $O(3)$ — симметрия динамики вектора изотопического вектора (спина) в сфере $S^2 \in \mathbb{R}^3$. В данном случае наложено ограничение $s_a s_a = 1$, при котором длина вектора спина является постоянной величиной, и эволюция происходит по некоторой сфере. В наших работах эта анизотропия выбрана в направлении s_z -компоненты. Лагранжиан модели использован как в изоспиновой параметризации, так и в эквивалентных эйлеровых и комплексных параметризациях, при этом комплексная параметризация получается проецированием изосферы S^2 на плоскость z . Разработан программный модуль для комплексного исследования процессов столкновения локализованных решений нелинейных сигма-моделей в фазовом расслоенном пространстве S^2 .

Использован подход приближения разностных схем [Самарский, 1977], в частности применен алгоритм численного моделирования, разработанный в работе [Муминов, 2002] для $O(3)$ нелинейных сигма-моделей в стационарном случае. Получены модели налетающего и лобового столкновений 180-градусных доменных стенок (кинк/антикинк) нееловского типа с бризерными решениями при разных значениях скорости их движения и частоты вращения единичного вектора A_3 -поля изосферы S^2 . В частности, в § 3 работы получены модели, где при взаимодействии топологических и бризерных солитонов наблюдается проявление дальнедействующих сил (рис. 6). Проведено подробное исследование динамики изоспиновой структуры так называемых дальнедействующих моделей (см. рис. 10).

Следует отметить также вопросы, касающиеся адекватности численных результатов настоящей работы в отличие от результатов аналитических работ, где все предельно ясно, точно и в достаточной степени достоверно (см., например, [Михайлов, Яремчук, 1984; Яремчук, 1985; Киселев, Расковалов, 2010]). В связи с этим в настоящей работе для контроля степени соответствия численных результатов действительности при моделировании эволюции солитонов вычислялись относительные изменения значения интеграла их энергии, которые сохранялись с достаточно высокой точностью, в пределах $10^{-6} - 10^{-2}$.

Список литературы (References)

- Киселев В. В., Расковалов А. А.* Взаимодействие бризера с волной намагниченности в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» // Теоретическая и математическая физика. — 2010. — Т. 163, № 1. — С. 94–113.
Kiselev V. V., Raskovalov A. A. Interaction of a breather with a magnetization wave in a ferromagnet with light-axis anisotropy // Theoretical and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 163, no. 1. — P. 479–495. (Original Russian paper: Kiselev V. V., Raskovalov A. A. Vzaimodeystviye brizera s volnoy namagnichennosti v ferromagnetike s anizotropiyey tipa “legkaya os” // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. — 2010. — Vol. 163, no. 1. — P. 94–113.)
- Маханьков В. Г.* Солитоны и численный эксперимент // ФЭЧАЯ. — 1983. — Т. 14, № 1. — С. 123–180.
Makhankov V. G. Solitons and numerical experiment // Sov. J. Part. Nucl. — 1983. — Vol. 14, no. 1. — P. 50–75. (Original Russian paper: Makhan'kov V. G. Solitony i chislennyy eksperiment // FECHAYA. — 1983. — Vol. 14, no. 1. — P. 123–180.)
- Михайлов А. В., Яремчук Я. И.* Вынужденное движение доменной стенки в поле спиновой волны // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т. 39, вып. 7. — С. 296–298.
Mikhailov A. V., Yaremchuk Ya. I. Forced motion of a domain wall in a spin wave field // JETP Lett. — 1984. — Vol. 39, no. 7. — P. 354–357. (Original Russian paper: Mikhailov A. V., Yaremchuk Ya. I. Vynuzhdennoye dvizheniye domennoy stenki v pole spinovoy volny // Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1984. — Vol. 39, no. 7. — P. 296–298.)
- Муминов Х. Х.* Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели // ДАН РТ. — 2002. — Т. 45, № 10. — С. 28–36.
Muminov Kh. Kh. Mnogomernyye dinamicheskiye topologicheskkiye solitony v nelineynoy anizotropnoy sigma-modeli [Multidimensional dynamic topological solitons in a nonlinear anisotropic sigma model] // Reports of the AS RT. — 2002. — Vol. 45, no. 10. — P. 28–36 (in Russian).
- Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш.* Динамика взаимодействия доменных границ в $(2 + 1)$ -мерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели // Известия АН РТ. — 2015. — № 4 (161). — С. 57–64.
Muminov Kh. Kh., Shokirov F. Sh. Dinamika vzaimodeystviya domennykh granits v $(2 + 1)$ -mernoй $O(3)$ nelineynoy sigma-modeli [Dynamics of interaction of domain walls in $(2 + 1)$ -dimensional non-linear sigma-model] // News of the AS RT. — 2015. — No. 4 (161). — P. 57–64 (in Russian).
- Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш.* Динамические и топологические солитоны в нелинейных сигма-моделях. — Душанбе: Дониш, 2014.
Muminov Kh. Kh., Shokirov F. Sh. Dinamicheskiye i topologicheskkiye solitony v nelineynykh sigma-modelyakh [Dynamic and topological solitons in nonlinear sigma models]. — Dushanbe: Donish, 2014 (in Russian).

- Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш.* Изоспиновая динамика топологических вихрей // ДАН РТ. — 2016. — Т. 59, № 7–8. — С. 320–326.
Muminov Kh. Kh., Shokirov F. Sh. Izospinovaya dinamika topologicheskikh vikhrey [Isospin dynamics of topological vortices] // Reports of the AS RT. — 2016. — Vol. 59, no. 7–8. — P. 320–326 (in Russian).
- Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
Samarskii A. A. Theory of Difference Schemes. — NY: Marcel Dekker Inc., 2001. (Original Russian paper: SamarSKIY A. A. Teoriya raznostnykh skhem. — Moscow: Nauka, 1977.)
- Шокиров Ф. Ш.* Математическое моделирование бризеров двумерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели // Математическое моделирование и численные методы. — 2016. — № 4 (12). — С. 3–16.
Shokirov F. Sh. Matematicheskoye modelirovaniye brizerov dvumernoy $O(3)$ nelineynoy sigma-modeli [Mathematical modeling of breathers of two-dimensional $O(3)$ nonlinear sigma model] // Mathematical modeling and numerical methods. — 2016. — No. 4 (12). — P. 3–16.
- Яремчук А. И.* Взаимодействие доменной стенки со спиновой волной в рамках интегрируемого случая уравнений Ландау–Лифшица // ТМФ. — 1985. — Т. 62, № 1. — С. 153–158.
Yaremchuk A. I. Interaction of domain wall with a spin wave in the framework of an integrable case of the Landau – Lifshitz equations // Theoretical and Mathematical Physics. — 1985. — Vol. 62, no. 1. — P. 101–105. (Original Russian paper: Yaremchuk A. I. Vzaimodeystviye domennoy stenki so spinovoy volnoy v ramkakh integriruyemogo sluchaya uravneniy Landau–Lifshitsa // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. — 1985. — Vol. 62, no. 1. — P. 153–158.)
- Shokirov F. Sh.* Stationary and moving breathers in $(2 + 1)$ -dimensional $O(3)$ nonlinear σ -model // arXiv:1605.01000v1 [nlin.PS]. — 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1605.01000> (accessed 07.05.2016).