

УДК: 519.63

## О применении формулы Рэлея на основе интегральных выражений Кирхгофа к задачам георазведки

А. В. Фаворская<sup>1,2,a</sup>, В. И. Голубев<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт,  
141700, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

<sup>2</sup> Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук,  
117218, Россия, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 36, к. 1

E-mail: <sup>a</sup> aleanera@yandex.ru, <sup>b</sup> w.golubev@mail.ru

Получено 29.06.2017, после доработки — 18.09.2017.

Принято к публикации 29.09.2017.

В данной работе рассматриваются формулы Рэлея, полученные из интегральных формул Кирхгофа, которые в дальнейшем могут быть применены для получения миграционных изображений. Актуальность проведенных в работе исследований обусловлена распространенностью применения миграции в интересах сейсмической разведки нефти и газа. Предлагаемый подход позволит существенно повысить качество сейсмической разведки в сложных случаях, таких как вечная мерзлота и шельфовые зоны южных и северных морей. Особенностью работы является использование упругого приближения для описания динамического поведения геологической среды, в отличие от широко распространенного акустического приближения. Сложность применения системы уравнений, описывающей состояние линейно-упругой среды, для получения формул Рэлея и алгоритмов на их основе возникает из-за значительного роста количества вычислений, математической и аналитической сложности итоговых алгоритмов по сравнению со случаем акустической среды. Поэтому в промышленной сейсморазведке в настоящий момент не используют алгоритмы миграции для случая упругих волн, что создает определенные трудности, так как акустическое приближение описывает только продольные сейсмические волны в геологических средах. В данной статье представлены итоговые аналитические выражения, которые можно использовать для разработки программных комплексов, используя описание упругих сейсмических волн (продольных и поперечных), тем самым охватывая весь диапазон сейсмических волн (продольных отраженных PP-волн, продольных отраженных SP-волн, поперечных отраженных PS-волн и поперечных отраженных SS-волн). Также в работе приведены результаты сравнения численных решений, полученных на основе формул Рэлея, с численными решениями, полученными сеточно-характеристическим методом. Ценность такого сравнения обусловлена тем, что метод на основе интегралов Рэлея основан на аналитических выражениях, в то время как сеточно-характеристический метод является методом численного интегрирования решения по расчетной сетке. В проведенном сравнении рассматривались различные типы источников: модель точечного источника, широко используемого в морской и наземной сейсморазведке, и модель плоской волны, которую также иногда применяют в полевых исследованиях.

Ключевые слова: сейсморазведка, углеводороды, формула Кирхгофа, акустические волны, упругие волны, численное моделирование

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-1831.2017.9.

UDC: 519.63

## About applying Rayleigh formula based on the Kirchhoff integral equations for the seismic exploration problems

A. V. Favorskaya<sup>1,2,a</sup>, V. I. Golubev<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Physics and Technology,  
Institytsky Pereylok 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

<sup>2</sup> Scientific Research Institute for System Studies of the Russian Academy of Sciences,  
Nahimovskij av. 36/1, Moscow, 117218, Russia

E-mail: <sup>a</sup>aleanera@yandex.ru, <sup>b</sup>w.golubev@mail.ru

*Received 29.06.2017, after completion — 18.09.2017.*

*Accepted for publication 29.09.2017.*

In this paper we present Rayleigh formulas obtained from Kirchhoff integral formulas, which can later be used to obtain migration images. The relevance of the studies conducted in the work is due to the widespread use of migration in the interests of seismic oil and gas seismic exploration. A special feature of the work is the use of an elastic approximation to describe the dynamic behaviour of a geological environment, in contrast to the widespread acoustic approximation. The proposed approach will significantly improve the quality of seismic exploration in complex cases, such as permafrost and shelf zones of the southern and northern seas. The complexity of applying a system of equations describing the state of a linear-elastic medium to obtain Rayleigh formulas and algorithms based on them is a significant increase in the number of computations, the mathematical and analytical complexity of the resulting algorithms in comparison with the case of an acoustic medium. Therefore in industrial seismic surveys migration algorithms for the case of elastic waves are not currently used, which creates certain difficulties, since the acoustic approximation describes only longitudinal seismic waves in geological environments. This article presents the final analytical expressions that can be used to develop software systems using the description of elastic seismic waves: longitudinal and transverse, thereby covering the entire range of seismic waves: longitudinal reflected PP-waves, longitudinal reflected SP-waves, transverse reflected PS-waves and transverse reflected SS-waves. Also, the results of comparison of numerical solutions obtained on the basis of Rayleigh formulas with numerical solutions obtained by the grid-characteristic method are presented. The value of this comparison is due to the fact that the method based on Rayleigh integrals is based on analytical expressions, while the grid-characteristic method is a method of numerical integration of solutions based on a calculated grid. In the comparison, different types of sources were considered: a point source model widely used in marine and terrestrial seismic surveying and a flat wave model, which is also sometimes used in field studies.

Keywords: seismic survey process, hydrocarbons, Kirchhoff formula, acoustic waves, elastic waves, numerical simulation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 761–771 (Russian).

The work was supported by the grant of the President of Russian Federation MK-1831.2017.9.

## 1. Введение

Сейсморазведка является ключевой опорой экономики России и многих других стран мира. Основной целью геофизических исследований является понимание геологической структуры земных недр. Можно выделить два основных метода исследования земных недр: сейсмическую разведку и электромагнитную разведку. В подавляющем большинстве случаев в полевых исследованиях, проводимых нефтедобывающими компаниями, используют именно сейсмическую разведку. После проведения полевых исследований получают огромные массивы измеренных данных (сейсмограмм). В связи с этим необходимы методы по их обработке. Один из методов обработки сейсмических данных носит название миграции. Он представляет собой применение миграционной формулы к сейсмограмме (зависимости ускорения, скорости или поля смещений от времени). Для анализа данных сейсмической разведки необходимо использовать средства вычислительной математики, одним из которых являются интегралы Рэлея.

Классические интегралы Кирхгофа широко используются при решении краевых задач для волнового уравнения. В работах [Рао, 1976; Zhdanov, 1988] получены обобщенные интегралы Кирхгофа, описывающие решение краевой задачи теории упругости в замкнутой форме [Новацкий, 1975]. Эти интегралы позволяют обобщить на случай волн в упругой среде классические методы, развитые для решения скалярного волнового уравнения [Zhdanov, 2002]. В математических задачах, возникающих при описании процесса сейсмической разведки, область интегрирования, как правило, представляет собой параллелепипед с плоской верхней границей (дневной поверхностью). Формулы, получающиеся в данном случае из интегралов Кирхгофа, в акустическом случае получили название интегралов Рэлея [Фаворская, 2014].

В настоящей работе получены интегральные формулы Рэлея для случая упругой среды, который позволяет наиболее корректно описать динамическое поведение геологической среды. Рассмотрено два вида поверхностных источников — ограниченная круговая область и плоская волна. Также в настоящей работе приводятся результаты сравнения формул Рэлея с сеточно-характеристическим методом [Куликовский, 2001; Холодов, 1980, 2006], активно применяющихся для численного моделирования процесса сейсмической разведки земных недр [Kvasov, 2016; Muratov, 2013].

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим поведение фиксированного объема  $D$  линейно-упругой среды под динамической нагрузкой, задающейся как граничное условие на границе области  $D$ . Обозначим трехмерный вектор смещения точек среды через  $U$ , скорость распространения продольной волны  $c_p$ , скорость распространения поперечной волны  $c_s$ . Тогда поведение среды может быть описано системой дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\mathbf{L}\bar{U} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{L} = c_p^2 \nabla \nabla \cdot - c_s^2 \nabla \times \nabla \times. \quad (2)$$

При этом существует взаимно-однозначное соотношение между вектором смещения  $U$ , вектором скорости  $v$  и тензором напряжений  $\sigma$ , которое может быть выражено в виде

$$\sigma_{11} = \lambda \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\sigma_{22} = \lambda \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U_2}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\sigma_{33} = \lambda \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U_3}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{13} = \mu \left( \frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\sigma_{23} = \mu \left( \frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y} \right), \quad (8)$$

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе.

Пусть объем  $D$  представляет собой параллелепипед  $[0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$ , верхней границей которого является плоскость  $z = 0$ . Задачей работы является получение аналитической связи между поверхностным воздействием и вектором смещения в произвольной точке рассматриваемого объема. Будем рассматривать начальные возмущения двух видов: импульс Рикера, заданный в круге, и плоская волна. Импульс Рикера задается в круге  $C$ , лежащем в плоскости  $z = 0$ , с центром в точке  $(x_0, y_0)$ , радиусом  $h$ , где  $h$  — шаг по координатам, выражением

$$U_k(x, y, 0, t) = \begin{cases} b_k f(t), & (x, y) \in C, \\ 0, & (x, y) \notin C. \end{cases} \quad (10)$$

Импульс Рикера лучше всего аппроксимирует волновой фронт от источников сейсмических волн, применяемых в полевых условиях георазведки. В случае плоской волны имеем

$$U_k(x, y, 0, t) = b_k f(t) \quad (11)$$

при  $x \in [0, X]$ ,  $y \in [0, Y]$ .

Временная зависимость  $f(t)$  на отрезке  $t \in [0, \alpha]$  при этом выражается в виде

$$\begin{aligned} f(t) &= \left( 1 - 180 \left( \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \exp \left( -90 \left( \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \\ &= \left( 1 - \frac{180}{\alpha^2} \left( t - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{90}{\alpha^2} \left( t - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

### 3. Вывод аналитических соотношений

Как известно, в случае однородной изотропной среды решение определяющей системы уравнений для точечного источника может быть получено аналитически и называется функцией Грина. Введем обозначения

$$g_p(\bar{r}, t | \bar{r}', t') = \frac{1}{4\pi |\bar{r} - \bar{r}'|} \left( \chi(t - t') - \chi \left( t - t' + \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_p} \right) \right), \quad (13)$$

$$g_s(\bar{r}, t | \bar{r}', t') = \frac{1}{4\pi |\bar{r} - \bar{r}'|} \left( \chi(t - t') - \chi \left( t - t' + \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_s} \right) \right), \quad (14)$$

которые соответствуют функциям Грина, записанным для сред со скоростями  $c_p$  и  $c_s$ . Тогда решением системы (1) будет тензор Грина вида

$$\mathbf{G}^L(\bar{r}, t | \bar{r}', t') = \mathbf{G}^{L(p)}(\bar{r}, t | \bar{r}', t') + \mathbf{G}^{L(s)}(\bar{r}, t | \bar{r}', t') = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где введены дополнительно следующие обозначения:

$$g_{11} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$g_{22} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial z^2}, \quad (17)$$

$$g_{33} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial y^2}, \quad (18)$$

$$g_{12} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g_s}{\partial x \partial y}, \quad (19)$$

$$g_{13} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 g_s}{\partial x \partial z}, \quad (20)$$

$$g_{23} = -\frac{\partial^2 g_p}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 g_s}{\partial y \partial z}. \quad (21)$$

На их основе могут быть получены искомые зависимости — формулы Рэлея для случая линейно-упругой среды:

$$U_1(\bar{r}', t') = -\frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial z'} I_{1p} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y'^2 \partial z'} I_{1s} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial z'^3} I_{1s} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial y' \partial z'} I_{2p} + \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial y' \partial z'} I_{2s} - \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial z'^2} I_{3p} + \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial z'^2} I_{3s}, \quad (22)$$

$$U_2(\bar{r}', t') = -\frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial y' \partial z'} I_{1p} + \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial y' \partial z'} I_{1s} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y'^2 \partial z'} I_{2p} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial z'} I_{2s} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial z'^3} I_{2s} - \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y' \partial z'^2} I_{3p} + \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y' \partial z'^2} I_{3s}, \quad (23)$$

$$U_3(\bar{r}', t') = -\frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial z'^2} I_{1p} + \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial z'^2} I_{1s} - \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y' \partial z'^2} I_{2p} + \frac{c_s^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y' \partial z'^2} I_{2s} - \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial z'^3} I_{3p} - \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x'^2 \partial z'} I_{3s} - \frac{c_p^2}{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial y'^2 \partial z'} I_{3s}. \quad (24)$$

Здесь были введены обозначения

$$I_{1p} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_1(\bar{r}, t+t') - U_1\left(\bar{r}, t+t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_p}\right) \right) t dt ds, \quad (25)$$

$$I_{2p} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_2(\bar{r}, t+t') - U_2\left(\bar{r}, t+t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_p}\right) \right) t dt ds, \quad (26)$$

$$I_{3p} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_3(\bar{r}, t + t') - U_3\left(\bar{r}, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_p}\right) \right) t dt ds, \quad (27)$$

$$I_{1s} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_1(\bar{r}, t + t') - U_1\left(\bar{r}, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_s}\right) \right) t dt ds, \quad (28)$$

$$I_{2s} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_2(\bar{r}, t + t') - U_2\left(\bar{r}, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_s}\right) \right) t dt ds, \quad (29)$$

$$I_{3s} = \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_3(\bar{r}, t + t') - U_3\left(\bar{r}, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_s}\right) \right) t dt ds. \quad (30)$$

Рассмотрим подробнее выражения

$$I_{kp} = \frac{1}{b_k} \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_k(x, y, 0, t + t') - U_k\left(x, y, 0, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_p}\right) \right) t dt ds, \quad (31)$$

$$I_{ks} = \frac{1}{b_k} \iint_S \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \int_0^\infty \left( U_k(x, y, 0, t + t') - U_k\left(x, y, 0, t + t' - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c_s}\right) \right) t dt ds. \quad (32)$$

С учетом того, что

$$\int_0^\infty f(t + t') t dt = -\frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(b - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right), \quad (33)$$

для случая плоской волны они могут быть приведены к виду

$$I_p = \int_0^x \int_0^y \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{r}{c_p} - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) - \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \right) dx dy, \quad (34)$$

$$I_s = \int_0^x \int_0^y \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{r}{c_s} - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) - \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \right) dx dy. \quad (35)$$

Здесь введено обозначение

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z')^2}. \quad (36)$$

Вывод выражения для случая ограниченной круговой области может быть проведен аналогично.

#### 4. Численная реализация

Авторами был разработан программный алгоритм, позволяющий вычислить приближенно выражения (22)–(36). Особую сложность представляет собою дискретизация выражений (22)–(24), на что и сделан акцент в данном разделе. Выражение (36) остается справедливым в данном разделе, при этом  $(x', y', z') = (x'_j, y'_j, z'_k)$  пробегает всю область интегрирования  $D$ , а  $(x, y) = (x_i, y_j)$  пробегает ее границу, совпадающую с плоскостью  $z = 0$ . Также отметим, что верхний индекс  $L$

соответствует дискретизации по оси времени  $t' = t'^L$ . На кубической расчетной сетке выражения (34), (35) запишутся в виде

$$(I_p)_{LJK}^L = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{r}{c_p} - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) - \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \right) h^2, \quad (37)$$

$$(I_s)_{LJK}^L = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \frac{1}{r} \left( \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{r}{c_s} - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) - \frac{\alpha^2}{180} \exp\left(-\frac{90}{\alpha^2} \left(t' - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \right) h^2, \quad (38)$$

$$(I_{ps})_{LJK}^L = (I_p)_{LJK}^L - (I_s)_{LJK}^L. \quad (39)$$

Тогда выражения (22)–(24) примут вид

$$(U_1)_{LJK}^L = \left( c_s^2 b_1 (\mathbf{D}_{xxz} (I_p)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{yyz} (I_s)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{zzz} (I_s)_{LJK}^L) + c_s^2 b_2 \mathbf{D}_{xyz} (I_{ps})_{LJK}^L + c_p^2 b_3 \mathbf{D}_{xxz} (I_{ps})_{LJK}^L \right) \frac{1}{2\pi h^3}, \quad (40)$$

$$(U_2)_{LJK}^L = \left( c_s^2 b_2 (\mathbf{D}_{xxz} (I_s)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{yyz} (I_p)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{zzz} (I_s)_{LJK}^L) + c_s^2 b_1 \mathbf{D}_{xyz} (I_{ps})_{LJK}^L + c_p^2 b_3 \mathbf{D}_{yyz} (I_{ps})_{LJK}^L \right) \frac{1}{2\pi h^3}, \quad (41)$$

$$(U_3)_{LJK}^L = \left( c_p^2 b_3 (\mathbf{D}_{xxz} (I_s)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{yyz} (I_s)_{LJK}^L + \mathbf{D}_{zzz} (I_p)_{LJK}^L) + c_s^2 b_1 \mathbf{D}_{xxz} (I_{ps})_{LJK}^L + c_s^2 b_2 \mathbf{D}_{yyz} (I_{ps})_{LJK}^L \right) \frac{1}{2\pi h^3}, \quad (42)$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{D}_{xxz} U_{LJK}^L = (U_{I+2,J,K+1}^L - 2U_{I+1,J,K+1}^L + U_{I,J,K+1}^L) - (U_{I+2,J,K}^L - 2U_{I+1,J,K}^L + U_{I,J,K}^L), \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_{yyz} U_{LJK}^L = (U_{I,J+2,K+1}^L - 2U_{I,J+1,K+1}^L + U_{I,J,K+1}^L) - (U_{I,J+2,K}^L - 2U_{I,J+1,K}^L + U_{I,J,K}^L), \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_{zzz} U_{LJK}^L = U_{I,J,K+3}^L - 3U_{I,J,K+2}^L + 3U_{I,J,K+1}^L - U_{I,J,K}^L, \quad (45)$$

$$\mathbf{D}_{xyz} U_{LJK}^L = U_{I+1,J+1,K+1}^L - U_{I+1,J+1,K}^L - U_{I+1,J,K+1}^L - U_{I+1,J,K}^L + U_{I+1,J,K}^L + U_{I,J+1,K}^L + U_{I,J,K+1}^L - U_{I,J,K}^L, \quad (46)$$

$$\mathbf{D}_{xxz} U_{LJK}^L = (U_{I+1,J,K+2}^L - 2U_{I+1,J,K+1}^L + U_{I+1,J,K}^L) - (U_{I,J,K+2}^L - 2U_{I,J,K+1}^L + U_{I,J,K}^L), \quad (47)$$

$$\mathbf{D}_{yyz} U_{LJK}^L = (U_{I,J+1,K+2}^L - 2U_{I,J+1,K+1}^L + U_{I,J+1,K}^L) - (U_{I,J,K+2}^L - 2U_{I,J,K+1}^L + U_{I,J,K}^L). \quad (48)$$

Вывод выражения для случая ограниченной круговой области может быть проведен аналогично.

## 5. Верификационные расчеты

В работе была выполнена верификация полученных выражений путем сравнения волновых картин, полученных путем их применения, с результатами численного интегрирования сеточно-характеристическим методом. Под волновой картиной понимается выраженная цветом зависимость рассматриваемой величины от пространственных координат.

Рассматривалась геологическая среда со следующими параметрами: скорость распространения продольных волн равна 5000 м/с, скорость распространения поперечных волн равна 3100 м/с, плотность равна 2500 кг/м<sup>3</sup>.

На первом этапе были проведены расчеты для источника в виде плоской волны. Параметр  $\alpha$ , фигурирующий в импульсе Рикера, брался равным 1.2 с. При помощи выведенных интегралов Рэлея проводился расчет с использованием сетки размером 61 на 61 на 31 узел с шагом 100 м. Шаг по времени составлял 0.02 с. Был проведен 81 шаг по времени. При помощи сеточно-характеристического метода проводился расчет с использованием сетки размером 121 на 121 на 121 узел с шагом 50 м. Шаг по времени составлял 0.01 с. Был проведен 201 шаг

по времени. Результаты расчетов представлены графиком на рис. 1, построенном вдоль центральной оси области интегрирования перпендикулярно плоскости  $z = 0$ . Зависимости на рис. 1 подтверждают совпадение результатов, полученных разными методами, с высокой степенью точности.

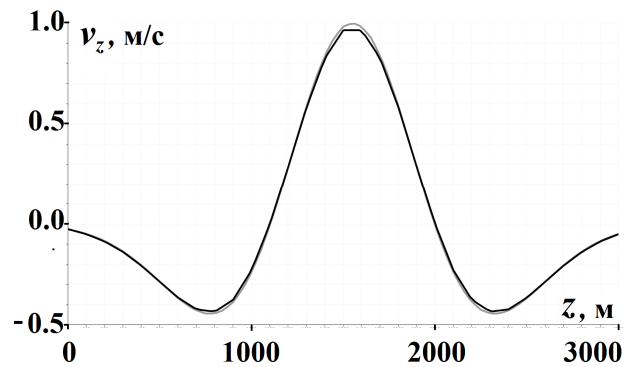


Рис. 1. Зависимость  $v_z$  от  $z$ . Момент времени 0.92 с. Плоская волна. Черный цвет соответствует использованию интегралов Рэлея, а серый — использованию сеточно-характеристического метода

На втором этапе были проведены расчеты для источника в виде ограниченной круговой области. Параметр  $\alpha$ , фигурирующий в импульсе Рикера, также брался равным 1.2 с. При помощи выведенных интегралов Рэлея выполнялся расчет с использованием сетки размером 31 на 201 на 101 узел с шагом 100 м. Шаг по времени составлял 0.02 с. Был проведен 131 шаг по времени. При помощи сеточно-характеристического метода проводился расчет с использованием сетки размером 401 на 401 на 201 узел с шагом 50 м. Шаг по времени составлял 0.01 с. Было проведено 263 шага по времени. Результаты расчетов (волновые картины) приведены на рис. 2–5. Численное решение, полученное на основе интегралов Рэлея, представлено на рис. 2, 4. А численное решение, полученное сеточно-характеристическим методом, изображено на рис. 3, 5 соответственно. На рис. 2–5 фрагменты области интегрирования и масштабы изображенных величин идентичны, линиями указан размер всей области интегрирования целиком. На рис. 2, 3 представлены зависимости  $V_y$  от пространственной координаты в момент времени 2 секунды, а на рис. 4, 5 — зависимости  $V_z$ .

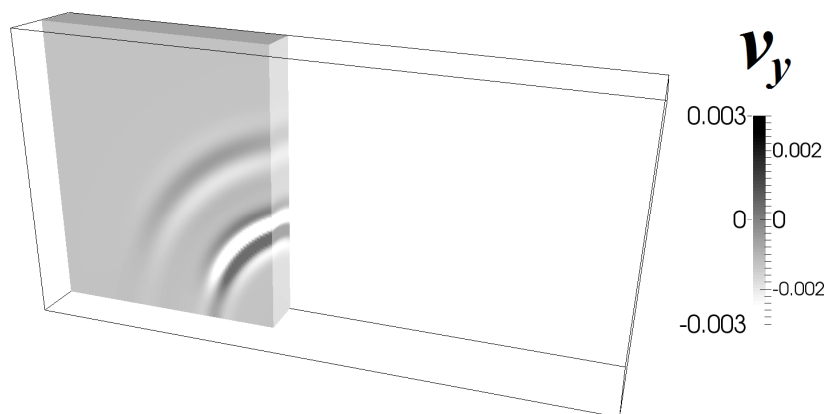


Рис. 2. Зависимость проекции скорости  $v_y$  от координат в момент времени 2 с. Решение, полученное с помощью формулы Рэлея. Фрагмент области интегрирования. Источник — импульс Рикера в круге



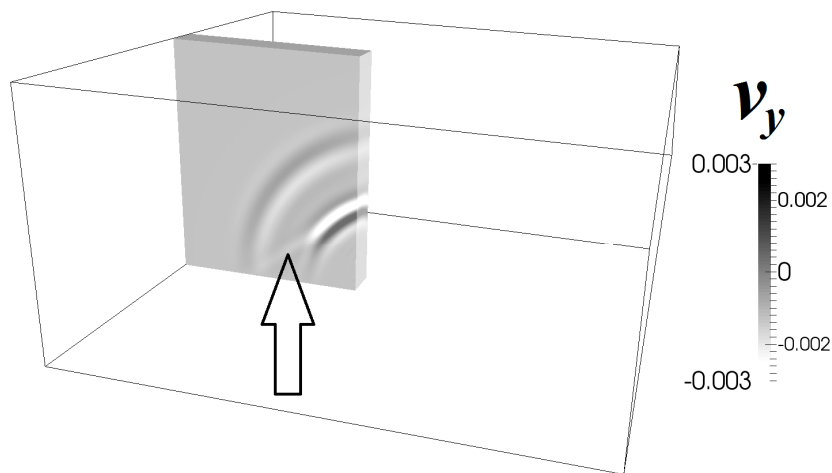


Рис. 3. Зависимость проекции скорости  $v_y$  от координат в момент времени 2 с. Решение, полученное с помощью сеточно-характеристического метода. Фрагмент области интегрирования. Источник — импульс Риккера в круге

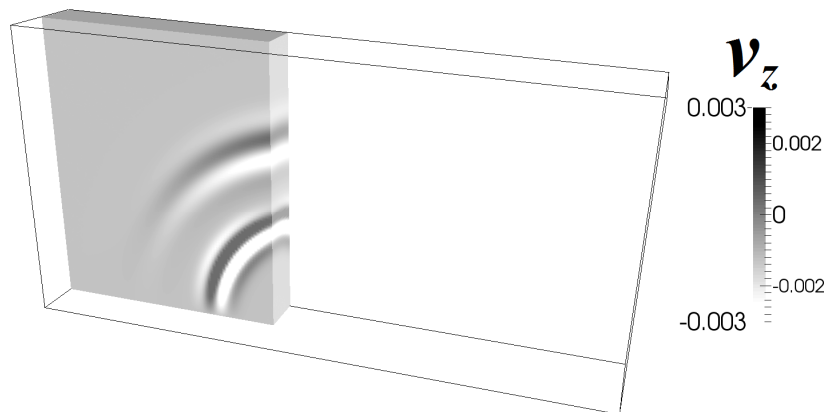


Рис. 4. Зависимость проекции скорости  $v_z$  от координат в момент времени 2 с. Решение, полученное с помощью формулы Рэлея. Фрагмент области интегрирования. Источник — импульс Риккера в круге

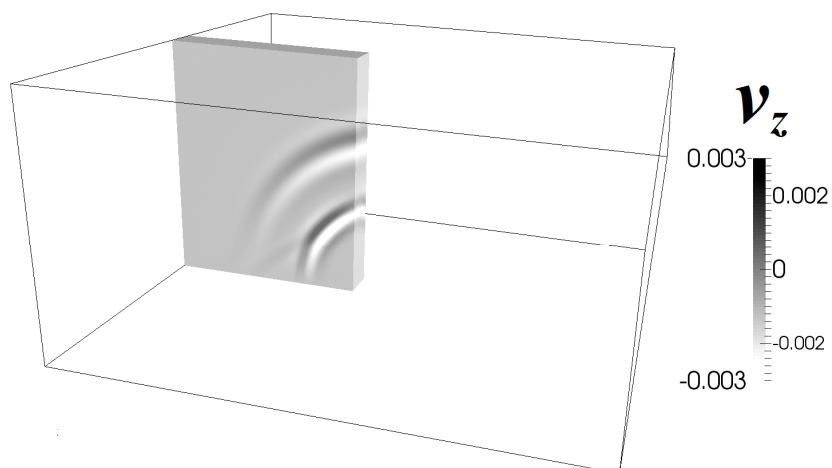


Рис. 5. Зависимость проекции скорости  $v_z$  от координат в момент времени 2 с. Решение, полученное с помощью сеточно-характеристического метода. Фрагмент области интегрирования. Источник — импульс Риккера в круге

Отметим, что интегрирование с помощью формулы Рэлея позволяет стопроцентно избежать формирования волн, отраженных от внешних границ области интегрирования, но зато отнимает большее число вычислительных ресурсов, таких как оперативная память и общее количество выполненных операций. А интегрирование при помощи сеточно-характеристического метода, напротив, отнимает меньшее количество вычислительных ресурсов, но при этом возникают отраженные от границ области интегрирования нефизические эффекты. Эта особенность продемонстрирована на рис. 2–5 разными размерами области интегрирования, отмеченными черными линиями. А также разной степенью дискретизации для разных используемых методов. А чтобы сравнение волновых картин на рис. 2–5 было корректным, части областей интегрирования, вырезанные из всего куба интегрирования, полностью совпадают друг с другом.

Обратим внимание, что в силу использования функции Грина, имеющей вид (13)–(14), при расчетах с использованием интегралов Рэлея отсутствует так называемая продольная головная сейсмическая волна, отмеченная стрелкой на рис. 3, образующаяся в результате отражений, исключенных использованием данной функции Грина (13)–(14). В случае использования сеточно-характеристического метода данный тип волн присутствует и на него теряется часть энергии продольных и поперечных волн. Следует отметить, что скорости распространения продольных и поперечных волн, при использовании обоих методов как в случае ограниченной круговой области, так и в случае плоской волны, совпадают с точностью до 0.01 процента, причем погрешность обусловлена выбором расчетных сеток и шага по времени.

## 6. Заключение

На основании интегралов Кирхгофа для краевой задачи теории упругости в замкнутой форме авторами были получены соответствующие интегралы Рэлея, а также проведена их программная реализация. Также было проведено сравнение решений, получаемых с помощью данных интегралов Рэлея и сеточно-характеристическим методом. Проведенное сравнение демонстрирует количественные и качественные совпадения решений для всех типов волн, что свидетельствует как о физической корректности решений, получаемых сеточно-характеристическим методом, так и о целесообразности применения и дальнейшего развития методов решения краевой задачи теории упругости при помощи интегралов Рэлея и Кирхгофа.

## Список литературы (References)

- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 608 с.  
*Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. Matematicheskie voprosi chislennoogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenii* [Mathematical questions of numerical solution of hyperbolic system of equations]. — Moscow: FIZMATLIT, 2001. — 608 p. (in Russian).
- Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.  
*Novatskii V. Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. — Moscow: Mir, 1975. — 872 p. (in Russian).
- Фаворская А. В., Голубев В. И. Решение прямых и обратных задач с помощью интегралов Кирхгофа // Труды 57-й научной конференции МФТИ. — 2014. — Т. 2. — С. 134–135.  
*Favorskaya A. V., Golubev V. I. Reshenie pryamih i obratnih zadach s pomoschyu integralov Kirhgofa* [Solution of direct and inverse problems using Kirchhoff integrals] // *Trudy 57 nauchnoi konferencii MFTI*. — 2014. — Vol. 2. — P. 134–135 (in Russian).
- Холодов А. С. О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1601–1620.  
*Kholodov A. S. O postroenii raznostnih shem povishennogo poryadka tochnosti dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa* [About the design of numerical schemes of higher orders for hyperbolic equations] // *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoi fiziki*. — 1980. — Vol. 20, no. 6. — P. 1601–1620.

- Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667.
- Kholodov A. S., Kholodov Ya. A.* O kriteriyah monotonnosti raznostnih shem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa [On the criteria for the monotonicity of difference schemes for equations of hyperbolic type] // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoi fiziki. — 1980. — Vol. 20, no. 6. — P. 1601–1620.
- Kvasov I. E., Leviant V. B., Petrov I. B.* Numerical study of wave propagation in porous media with the use of the grid-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, is. 9. — P. 1620–1630.
- Muratov M. V., Petrov I. B.* Estimation of wave responses from subvertical macrofracture systems using a grid characteristic method // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2013. — Vol. 5, is. 5. — P. 479–491.
- Pao Y. H., Varatharajulu V.* Huygens' principle, radiation conditions and integral formulas for the scattering of elastic waves // J. Acoust. Soc. Am. — 1976. — Vol. 59. — P. 1361–1371.
- Zhdanov M. S.* Integral Transforms in Geophysics. — New York, Berlin, London. Tokyo: Springer-Verlag, 1988. — 367 p.
- Zhdanov M. S.* Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. — Elsevier, 2002. — 609 p.