

УДК: 532.3 + 519.6

## Оптимальное управление движением в идеальной жидкости тела с винтовой симметрией с внутренними роторами

Е. В. Ветчанин<sup>1,a</sup>, В. А. Тененев<sup>1,b</sup>, А. А. Килин<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,  
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

<sup>2</sup>Удмуртский государственный университет,  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

E-mail: <sup>a</sup> eugene186@mail.ru, <sup>b</sup> tenenev@istu.ru, <sup>c</sup> aka@rcd.ru

Получено 21.11.2016.

Принято к публикации 29.09.2017.

В данной работе рассматривается управляемое движение в идеальной жидкости винтового тела с тремя лопастями за счет вращения трех внутренних роторов. Ставится задача выбора управляющих воздействий, обеспечивающих движение тела вблизи заданной траектории. Для определения управлений, гарантирующих движение вблизи заданной кривой, предложены методы, основанные на применении гибридных генетических алгоритмов (генетические алгоритмы с вещественным кодированием с дополнительным обучением лидера популяции каким-либо градиентным методом) и искусственных нейронных сетей. Корректность работы предложенных численных методов оценивается с помощью полученных ранее дифференциальных уравнений, определяющих закон изменения управляющих воздействий для заданной траектории.

В подходе на основе гибридных генетических алгоритмов исходная задача минимизации интегрального функционала сводится к минимизации функции многих переменных. Заданный временной интервал разбивается на малые элементы, на каждом из которых управляющие воздействия аппроксимируются полиномами Лагранжа 2 и 3 порядков. Гибридные генетические алгоритмы при соответствующих настройках воспроизводят решение, близкое точному. Однако стоимость расчета 1 секунды физического процесса составляет порядка 300 секунд процессорного времени.

Для повышения быстродействия расчета управляющих воздействий предложен алгоритм на основе искусственных нейронных сетей. В качестве входного сигнала нейронная сеть принимает компоненты требуемого вектора перемещения. В качестве выходного сигнала возвращаются узловые значения полиномов Лагранжа, приближенно описывающие управляющие воздействия. Нейронная сеть обучается хорошо известным методом обратного распространения ошибки. Обучающая выборка генерируется с помощью подхода на основе гибридных генетических алгоритмов. Расчет 1 секунды физического процесса с помощью нейронной сети требует примерно 0.004 секунды процессорного времени. То есть на 6 порядков быстрее по сравнению в гибридным генетическим алгоритмом. Управление, рассчитанное с помощью искусственной нейронной сети, отличается от точного. Однако, несмотря на данное отличие, обеспечивает достаточно точное следование по заданной траектории.

Ключевые слова: управление движением, генетические алгоритмы, нейронные сети, движение в жидкости, идеальная жидкость

Работа А. А. Килина (§§ 1, 2) выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам, а также поддержана грантом РФФИ № 14-01-00395-а. Работа Е. В. Ветчанина и В. А. Тененева (§§ 3, 4, 5) поддержана грантом РНФ № 14-19-01303.

UDC: 532.3 + 519.6

## Optimal control of the motion in an ideal fluid of a screw-shaped body with internal rotors

E. V. Vetchanin<sup>1,a</sup>, V. A. Tenenev<sup>1,b</sup>, A. A. Kilin<sup>2,c</sup>

<sup>1</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University,  
Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

<sup>2</sup>Udmurt State University,  
Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia

E-mail: <sup>a</sup> eugene186@mail.ru, <sup>b</sup> tenenev@istu.ru, <sup>c</sup> aka@rcd.ru

*Received 21.11.2016.*

*Accepted for publication 29.09.2017.*

In this paper we consider the controlled motion of a helical body with three blades in an ideal fluid, which is executed by rotating three internal rotors. We set the problem of selecting control actions, which ensure the motion of the body near the predetermined trajectory. To determine controls that guarantee motion near the given curve, we propose methods based on the application of hybrid genetic algorithms (genetic algorithms with real encoding and with additional learning of the leader of the population by a gradient method) and artificial neural networks. The correctness of the operation of the proposed numerical methods is estimated using previously obtained differential equations, which define the law of changing the control actions for the predetermined trajectory.

In the approach based on hybrid genetic algorithms, the initial problem of minimizing the integral functional reduces to minimizing the function of many variables. The given time interval is broken up into small elements, on each of which the control actions are approximated by Lagrangian polynomials of order 2 and 3. When appropriately adjusted, the hybrid genetic algorithms reproduce a solution close to exact. However, the cost of calculation of 1 second of the physical process is about 300 seconds of processor time.

To increase the speed of calculation of control actions, we propose an algorithm based on artificial neural networks. As the input signal the neural network takes the components of the required displacement vector. The node values of the Lagrangian polynomials which approximately describe the control actions return as output signals. The neural network is taught by the well-known back-propagation method. The learning sample is generated using the approach based on hybrid genetic algorithms. The calculation of 1 second of the physical process by means of the neural network requires about 0.004 seconds of processor time, that is, 6 orders faster than the hybrid genetic algorithm. The control calculated by means of the artificial neural network differs from exact control. However, in spite of this difference, it ensures that the predetermined trajectory is followed exactly.

Keywords: motion control, genetic algorithms, neural networks, motion in a fluid, ideal fluid

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 741–759 (Russian).

The work of A. A. Kilin (sections 1 and 2) carried out within the framework of the state assignment for institutions of higher education and was supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 14-01-00395-a. The work of E. V. Vetchanin and V. A. Tenenev (sections 3, 4 and 5) was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 14-19-01303.

## 1. Введение

Наиболее распространенным и хорошо изученным движителем плавающих мобильных устройств является гребной винт, на который через вал передается кинетический момент от энергоустановки системы. Разработка, анализ и оптимизация автономных необитаемых аппаратов с винтами продолжаются в настоящее время [Киселев, Медведев, 2012]. Для мобильной робототехники, наряду с винтовыми приводами, представляют интерес иные движители, как использующие принципы передвижения биологических объектов, так и не имеющие природных аналогов.

Интерес к биологическим движителям в первую очередь связан с совершенствованием способов перемещения в жидкости. Различные вопросы, касающиеся движения водоплавающих организмов, описаны в книге Лайтхилла [Lighthill, 1975]. В другой, тоже классической, книге [Childress, 1981] описывается механика плавания и полета животных и насекомых. Всевозможные вопросы движения биологических и биологически подобных устройств рассматривались в различных статьях. Здесь приведем лишь некоторые из большого множества работ. Например, авторы работ [Terada, Yamamoto, 1999; Terada, Yamamoto, 2004] создали робот-рыбу и систему управления таким устройством. Вопросы оптимального управления системами с колеблющимися присоединенными звеньями рассматривались в работах [Черноусько, 2010; Черноусько, 2012]. В работе [Eldredge, 2007] проведено численное моделирование движения многозвенной системы в вязкой жидкости, а в [Sahin et al., 2009] промоделировано движение медуз в осесимметричной постановке на деформируемых сетках.

Помимо устройств, использующих биологически подобные движители, представляют интерес аппараты, перемещающиеся за счет сил инерции, при этом смещается положение центра масс. Такой способ перемещения связан с именем советского инженера В. Н. Толчина [Толчин, 1977]. Первый прибор, развивающий тягу через изменение положения центра масс, был построен в 1936 г. и в дальнейшем назван инерциоидом Толчина. Идея Толчина может быть использована для перемещения в жидкой среде. Вопросы плавания инерционных устройств изучались, например, в работах [Козлов, Рамоданов, 2001; Черноусько, 2008; Childress et al., 2011; Рамоданов, Тененев, 2011; Волкова, Яцун, 2011; Vetchanin et al., 2013; Kilin et al., 2014]. Возможно создание гибридных движителей. В работе [Rust, Asada, 2014] тяга создавалась парой винтов, а смещенная внутренняя масса использовалась для изменения ориентации.

Подход, подобный подходу Толчина, связан с применением внутренних роторов. Предполагается, что положение центра масс системы остается неизменным, а перемещение осуществляется за счет изменения кинетического момента отдельных частей устройства, геометрических свойств его внешней оболочки и механики взаимодействия с внешней средой. Роторы могут применяться как для сухопутных, так и для плавающих роботов. Например, в работах [VorISOV et al., 2012; VorISOV et al., 2013] исследовался вопрос управления на плоскости динамически несимметричным уравновешенным шаром с тремя внутренними роторами. В работе [Воинов, 2008] рассматривалось подводное устройство, управляемое внутренним ротором. Было показано, что тело, обладающее винтовой симметрией, может перемещаться в идеальной безвихревой жидкости в отсутствие внешних сил.

Траектория движения тела в идеальной или вязкой жидкости при заданном законе вращения внутренних роторов может быть определена с помощью известных вычислительных алгоритмов и моделирующих пакетов. Однако для практического применения требуется определить вращение роторов так, чтобы движение тела осуществлялось вблизи заданной траектории. Такая задача является нетривиальной, и для ее решения могут применяться различные алгоритмы, в том числе интеллектуальные методы.

Один из способов основан на применении гейтов, представляющих собой элементарные маневры, комбинируя которые можно реализовать движение по заданной траектории [Borisov et al., 2012; Lewis et al., 1994; Ostrowski et al., 2000].

Если удастся определить силовое воздействие реальной жидкости, например на основе численного эксперимента, для множества типовых движений объекта, то возможно построить некоторую явную феноменологическую модель, связывающую сопротивление среды с кинематическими параметрами движения тела. Такой подход применялся в работах [Ветчанин, Тененев, 2012; Шаура, Кочурова, 2013] для расчета управления движением тела с внутренними массами.

Применение интеллектуальных методов позволяет создавать более гибкие и универсальные алгоритмы управления. Технология Data Mining предоставляет средства построения деревьев решений [Тененев, Якимович, 2010]. Деревья решений использовались для расчета управления движением тела с внутренними массами в работах [Ветчанин, Тененев, 2011; Shaura et al., 2013]. Возможно также применение искусственных нейронных сетей. Например, в работе [Terada, Yamamoto, 1999] нейронная сеть строилась для управления рыбоподобным роботом.

Любой из методов определения управления имеет свои преимущества и недостатки, поэтому целью данной статьи является анализ различных вычислительных подходов. В частности, рассмотрено вычисление управляющих воздействий на основе многократного решения серии оптимизационных задач и с применением искусственной нейронной сети.

## 2. Математическая модель

### 2.1. Основные предположения и кинематические соотношения

Рассмотрим движение в идеальной жидкости твердого тела, оболочка которого имеет форму трехлопастного винта, несущего внутри себя три ротора (см. рис. 1). Винт состоит из центрального шара и лопастей в форме сплюснутых эллипсоидов вращения. Геометрические размеры приведены далее:

- радиус центрального шара  $R = 0.1$  м;
- радиус лопасти  $a = 0.2$  м;
- толщина лопасти  $d = 0.04$  м;
- расстояние от центра сферы до центра лопасти  $h = 0.15$  м;
- объем  $V = 1.238575 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>.

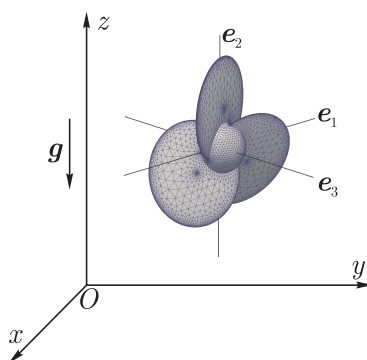


Рис. 1. Сеточная модель поверхности винтового тела.  $Oxyz$  — неподвижная система координат.  $O_M e_1 e_2 e_3$  — подвижная система координат, жестко связанная с телом.  $g$  — вектор ускорения свободного падения

Примем ряд допущений относительно рассматриваемой системы.

- 1°. Все роторы осесимметричны. Оси вращения роторов совпадают с их осями симметрии. Таким образом, вращение роторов не меняет распределения массы.
- 2°. Оси вращения роторов взаимно ортогональны.
- 3°. Геометрическая форма оболочки и распределение масс системы инвариантны относительно поворотов на угол  $\frac{2\pi}{3}$ .
- 4°. Центр масс системы совпадает с центром давления. Таким образом, моменты силы тяжести и силы Архимеда равны нулю.
- 5°. Вес тела с роторами равен весу вытесненной жидкости. Таким образом, система обладает нейтральной плавучестью.
- 6°. Вязкие эффекты отсутствуют, а гидродинамическое сопротивление обусловлено только эффектом присоединенных масс.

В работе [Vetchanin et al., 2016] была доказана управляемость описанной системы и построены явные управления, соответствующие движениям с сохранением направления одной из главных осей тела и движению по винтовой линии. Здесь мы ставим следующую задачу:

*построить управления, обеспечивающие перемещение тела за заданное время вблизи заданной траектории.*

Для описания движения введем две системы координат: неподвижную  $Oxyz$  и подвижную  $O_M e_1 e_2 e_3$ , жестко связанную с телом (см. рис. 1), где  $O_M$  — центр масс, а ось  $e_3$  совпадает с осью симметрии тела. Кроме того, будем считать, что оси  $e_1, e_2$  совпадают с главными осями инерции тела.

Положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной будем задавать вектором  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Проекции неподвижных единичных векторов  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , соответствующих осей системы координат  $Oxyz$ , на оси подвижной системы координат образуют ортогональную матрицу

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3). \tag{1}$$

Пара  $(\mathbf{r}, \mathbf{Q})$  однозначно определяет конфигурацию системы; таким образом, конфигурационное пространство системы  $\mathcal{G}$  шестимерно и представляет собой  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ .

Эволюция векторов  $\mathbf{r}, \alpha, \beta, \gamma$  описывается следующими кинематическими соотношениями:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \tag{3}$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\omega$  — векторы поступательной и угловой скоростей тела, спроецированные на оси подвижной системы координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В численных расчетах выбранное представление матрицы  $\mathbf{Q}$  удобнее, чем параметризация через углы Эйлера.

## 2.2. Уравнения движения и первые интегралы

Движение произвольного тела в жидкости в предположении, что влияние вязких сил пренебрежимо мало, описывается уравнениями Кирхгофа [Kirchhoff, Hensel, 1874]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v}, \quad (4)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы (оболочка + жидкость + роторы).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В данной работе мы рассматриваем движение тела в постановке идеальной жидкости, так как это существенно облегчает разработку и тестирование вычислительных алгоритмов. При наличии реализованного вычислительного алгоритма включение дополнительных слагаемых в уравнения движения не составляет труда.

Кинетическая энергия оболочки определяется выражением

$$T_s = \frac{1}{2} m_s (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_s \boldsymbol{\omega}), \quad (5)$$

где  $m_s$  — масса оболочки,  $\mathbf{I}_s$  — главный центральный тензор инерции оболочки.

Кинетическая энергия жидкости:

$$T_f = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Lambda}_v \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}_\omega \boldsymbol{\omega}), \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda}_v = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  — тензор присоединенных масс,  $\boldsymbol{\Lambda}_\omega = \text{diag}(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$  — тензор присоединенных моментов инерции,  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$  — тензор, возникающий вследствие винтовой формы тела. Диагональный вид тензоров  $\boldsymbol{\Lambda}_v$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_\omega$  и  $\mathbf{B}$  обусловлен предположениями  $1^\circ$ – $5^\circ$  и выбором подвижных осей  $O_{Me_1}e_2e_3$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для тела, показанного на рис. 1, тензоры  $\boldsymbol{\Lambda}_v$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_\omega$  и  $\mathbf{B}$  будут иметь по два равных коэффициента:  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5$ ,  $b_1 = b_2$ . Все дальнейшие результаты будут получены именно для этого случая.

Кинетическая энергия  $k$ -го ротора определяется выражением

$$T_k = \frac{1}{2} m_k (\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k(t) \mathbf{n}_k, \mathbf{I}_k (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}_k(t) \mathbf{n}_k)), \quad (7)$$

где  $m_k$  — масса ротора  $k$ -го ротора,  $\mathbf{I}_k$  — центральный тензор инерции  $k$ -го ротора,  $\mathbf{n}_k$  — единичный вектор, задающий направление оси вращения  $k$ -го ротора,  $\boldsymbol{\Omega}_k(t)$  — угловая скорость вращения  $k$ -го ротора.

Так как вектор  $\mathbf{n}_k$  является собственным для матрицы  $\mathbf{I}_k$ , то выполняется соотношение  $\mathbf{I}_k \mathbf{n}_k = j_k \mathbf{n}_k$ , где  $j_k$  — момент инерции  $k$ -го ротора относительно оси вращения. С учетом этого суммарная кинетическая энергия системы с точностью до известной функции времени примет вид

$$T = T_s + T_f + \sum_{k=1}^3 T_k = \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \mathbf{C} \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathcal{K}(t)), \quad (8)$$

где  $\mathcal{K}(t) = \sum_{k=1}^3 j_k \Omega_k(t) \mathbf{n}_k$  — вектор гиростатического момента. В силу предположения 3° о форме оболочки и распределении масс системы, матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{I}$  имеют вид

$$\mathbf{C} = m\mathbf{E} + \Lambda_v = \text{diag}(c_1, c_1, c_3), \quad m = m_s + \sum_{k=1}^3 m_k, \quad (9)$$

$$\mathbf{I} = \Lambda_\omega + \mathbf{I}_s + \sum_{k=1}^3 \mathbf{I}_k = \text{diag}(i_1, i_1, i_3).$$

Подставив (8) в уравнения (4) и обозначив импульс системы и ее кинетический момент как

$$\mathcal{P} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathcal{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathcal{K}(t), \quad (10)$$

получим уравнения движения в виде

$$\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathcal{P} \times \mathbf{v}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  выражаются через  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{M}$  из уравнений (10). Объединяя эти уравнения с (2), (3), получим полную систему уравнений, описывающую движение тела.

Система уравнений (2), (3), (11) допускает шесть геометрических интегралов:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma) = 0. \quad (12)$$

Вследствие инвариантности системы относительно группы движений  $SE(3)$ , т.е. смены неподвижной системы координат, имеется еще шесть неётеровских интегралов движения [Борисов, Мамаев, 2005]:

$$(\mathcal{P}, \alpha) = P_1, \quad (\mathcal{P}, \beta) = P_2, \quad (\mathcal{P}, \gamma) = P_3, \quad (13)$$

$$(\mathcal{M} + (\mathbf{Q}\mathbf{r}) \times \mathcal{P}, \alpha) = N_1, \quad (\mathcal{M} + (\mathbf{Q}\mathbf{r}) \times \mathcal{P}, \beta) = N_2, \quad (\mathcal{M} + (\mathbf{Q}\mathbf{r}) \times \mathcal{P}, \gamma) = N_3.$$

Здесь интегралы  $P_1, P_2, P_3$  имеют смысл проекций импульса на оси неподвижной системы координат, а интегралы  $N_1, N_2, N_3$  — проекций кинетического момента. Следует отметить, что наличие интегралов (13) в первую очередь связано с тем, что уравнения движения построены на основе теории идеальной жидкости.

Для винта, изображенного на рис. 1, компоненты матриц  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  имеют вид [Тененев и др., 2016]

$$c_1 = (-4.6764 \cdot 10^{-3} \rho_f + \rho_b V + 4.8542 \cdot 10^{-4} \rho_f \Phi) k^3,$$

$$c_3 = (74.279 \cdot 10^{-3} \rho_f + \rho_b V - 9.6606 \cdot 10^{-4} \rho_f \Phi) k^3,$$

$$i_1 = ((1.0974 \cdot 10^{-3} \rho_f + 2.01995 \cdot 10^{-4} \rho_b) + (-1.2418 \cdot 10^{-5} \rho_f + 5.1027 \cdot 10^{-7} \rho_b) \Phi) k^5, \quad (14)$$

$$i_3 = ((-3.0673 \cdot 10^{-4} \rho_f + 4.4726 \cdot 10^{-4} \rho_b) + (2.4167 \cdot 10^{-5} \rho_f - 1.9567 \cdot 10^{-6} \rho_b) \Phi) k^5,$$

$$b_1 = (-0.51062 + 0.11603 \Phi - 1.2601 \cdot 10^{-3} \Phi^2) \cdot 10^{-3} \rho_f k^4,$$

$$b_3 = (0.60381 - 0.21822 \Phi + 2.4818 \cdot 10^{-3} \Phi^2) \cdot 10^{-3} \rho_f k^4.$$

Здесь  $\rho_f$  — плотность жидкости,  $\rho_b$  — плотность тела, полагается равной  $\rho_f$ ,  $\Phi$  — угол поворота лопастей в градусах ( $0^\circ$  соответствует максимальному перекрытию плоскости  $O_M \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ ,  $90^\circ$  — минимальному перекрытию),  $k$  — масштабный коэффициент, соответствующий растяжению линейных размеров в  $k$  раз. Согласно предположению 5°  $\rho_f = \rho_b$ .

### 2.3. Задача управления

Пусть система движется из состояния покоя; в этом случае интегралы (13) принимают особенно простой вид:

$$\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{M} = 0, \quad (15)$$

а поступательная и угловая скорости тела могут быть выражены через гиростатический момент следующим образом

$$\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{B}}\mathcal{K}(t), \quad \boldsymbol{\omega} = \widetilde{\mathbf{I}}\mathcal{K}(t), \quad (16)$$

$$\widetilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{I})^{-1}, \quad \widetilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\widetilde{\mathbf{I}}. \quad (17)$$

Подставив выражения (16) в кинематические соотношения (2), (3), получим уравнения движения на нулевом уровне первых интегралов:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{Q}^T \widetilde{\mathbf{B}}\mathcal{K}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \widetilde{\mathbf{I}}\mathcal{K}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \widetilde{\mathbf{I}}\mathcal{K}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \widetilde{\mathbf{I}}\mathcal{K}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

В силу невырожденности квадратичной формы кинетической энергии (8) матрица  $\widetilde{\mathbf{I}}$  невырожденная. Поэтому в качестве управлений можно рассматривать угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}$  тела, а уравнения (18) движения на нулевом уровне первых интегралов примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= -\mathbf{Q}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть задана гладкая кривая  $\mathbf{r}^* = (x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ , определяющая желаемое положение тела в каждый момент времени, и время  $\mathcal{T}$  прохождения данной кривой. При этом должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}^*(0), \quad \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0, \quad \boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\beta}_0, \quad \boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\gamma}_0, \\ \mathbf{r}(\mathcal{T}) &= \mathbf{r}^*(\mathcal{T}), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathcal{T}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathcal{T}) = \boldsymbol{\beta}_{\mathcal{T}}, \quad \boldsymbol{\gamma}(\mathcal{T}) = \boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Требуется выбрать закон изменения угловой скорости тела таким образом, чтобы траектория тела проходила наиболее близко к  $\mathbf{r}^*$ . Данное отклонение может быть вычислено следующим образом:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \int_0^{\mathcal{T}} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}^*(t)) dt. \quad (21)$$

Таким образом, имеем задачу поиска условных экстремалей с функцией стоимости

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{\omega}(t)) \rightarrow \min, \quad (22)$$

дифференциальными связями (19) и граничными условиями (20).



### 3. Подходы к решению задачи

#### 3.1. Явное выражение для управлений

В работе [Vetchanin et al., 2016] было показано, что в случае, когда матрица  $\mathbf{B}$  невырожденная, можно явным образом вычислить управления, обеспечивающие движение вдоль заданной гладкой траектории  $\mathbf{r}^*(t)$  при любых начальных условиях. Действительно, подставив в первое уравнение (19) выражения для  $\mathbf{r}^*(t)$ , найдем в явном виде зависимость угловой скорости от времени:

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CQ}\dot{\mathbf{r}}^*(t). \quad (23)$$

Подставив выражения (23) в оставшиеся уравнения (19), получим неавтономные уравнения для определения ориентации тела:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CQ}\dot{\mathbf{r}}^*) \times \boldsymbol{\alpha}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CQ}\dot{\mathbf{r}}^*) \times \boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{CQ}\dot{\mathbf{r}}^*) \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (24)$$

Уравнения (24) могут быть решены как минимум численно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В описанном подходе не удастся учесть граничные условия  $\boldsymbol{\alpha}(T)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(T)$  и  $\boldsymbol{\gamma}(T)$ . Следовательно, ориентация тела в конце пути будет полностью определяться начальными условиями и видом траектории. Данное решение в дальнейшем будет использоваться для тестирования вычислительных процедур.

#### 3.2. Применение численных методов теории оптимального управления

Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad (25)$$

а качество ее решение оценивается следующим функционалом:

$$R = \int_0^{\tau} B(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min. \quad (26)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  — вектор фазовых переменных,  $\mathbf{u}$  — вектор управлений.

Для приближенного описания управления  $\mathbf{u}$  будем использовать кусочно-полиномиальную аппроксимацию. Разобьем временной интервал на  $M$  элементов длиной  $h_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M - 1$ . Узлы разбиения обозначим как  $t^{(i)}$ , причем

$$t^{(0)} = 0, \quad t^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} h_j. \quad (27)$$

На каждом элементе будем описывать вектор-функцию  $\mathbf{u}$  полиномами степени  $p$ . Для этого необходимо знать значения управлений в узлах  $t^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ , и в  $M \cdot (p - 1)$  промежуточных точках. Координаты этих точек для  $i$ -го элемента вычисляются следующим образом:

$$t_j^{(i)} = t^{(i)} + h_i \frac{j}{p}, \quad j = 1, 2, \dots, p - 1. \quad (28)$$

При таком подходе получается, что отрезок интегрирования покрывается сеткой из  $Mp + 1$  узлов, в каждом из которых задан вектор управлений. Обозначим узлы сетки  $\tau_i$ :

$$\begin{aligned} \tau_{p \cdot i} &= t^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \\ \tau_{p \cdot i + j} &= t^{(i)} + h_i \frac{j}{p}, \quad j = 1, 2, \dots, p - 1, \end{aligned} \quad (29)$$

а управления в узлах сетки  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(\tau_i)$ .

Таким образом, при аппроксимации компонент вектора управлений  $\mathbf{u}(t)$  кусочно-полиномиальными функциями степени  $p$  необходимо задать  $pM + 1$   $d$ -мерных векторов в узлах сетки.

На  $i$ -м элементе аппроксимация будет иметь вид полинома Лагранжа:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=0}^p N_k(t) \mathbf{u}_{p \cdot i+k}, \quad t \in [t^{(i)}, t^{(i+1)}], \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (30)$$

$$N_k(t) = \frac{\prod_{i \neq j} (t - t_{p \cdot i+k})}{\prod_{i \neq j} (\tau_k - t_{p \cdot i+k})}.$$

Для решения уравнений (25) и вычисления функционала качества (26) будем использовать  $s$ -этапный метод Рунге – Кутты:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i, \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f} \left( t_n + c_i \Delta t_n, \mathbf{q}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j, \mathbf{u}(t_n + c_i \Delta t_n) \right), \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad (31)$$

$$R(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{pM+1}) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_n \sum_{i=1}^s b_i B \left( t_n + c_i \Delta t_n, \mathbf{q}_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j, \mathbf{u}(t_n + c_i \Delta t_n) \right).$$

Ясно, что в описанном подходе значение функционала (26) является функцией от  $(pM + 1) \cdot d$  переменных, для минимизации которой можно использовать аппарат численных методов оптимизации.

Хорошо известно, что задачи оптимального управления являются многоэкстремальными [Тененев, Якимович, 2010], и поэтому классические градиентные методы минимизации, хоть и обеспечивают высокую скорость сходимости, существенно зависят от начального приближения и не позволяют найти наилучшее решение. Для преодоления трудностей, связанных с наличием множества локальных экстремумов, наиболее эффективными оказываются гибридные генетические алгоритмы, предполагающие совместное использование генетического алгоритма с вещественным кодированием и какого-либо градиентного метода.

По этим причинам в данной работе для реализации описанного подхода при решении задачи (19), (22) мы применяем гибридный генетический алгоритм с вещественным кодированием и дополнительным обучением лидера по методу сопряженных градиентов Флетчера – Ривса [Тененев, Якимович, 2010]. Для вычисления градиента целевой функции мы используем конечные разности первого порядка точности. Отметим, что использование более точных разностных формул приводит к возрастанию вычислительных затрат. Интегрирование уравнений движения и вычисление функционала качества осуществляются классическим методом Рунге – Кутты 4 порядка точности.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** В случае когда в задаче присутствуют только начальные условия, можно подбирать управление последовательно на каждом элементе разбиения временного интервала, что существенно снижает вычислительные затраты.

### 3.3. Применение искусственных нейронных сетей

Описанный в предыдущем пункте подход может быть взят за основу для построения аппроксимации управляющих воздействий в зависимости от направления движения. Пусть в начальный момент тело находится в точке  $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$  с ориентацией  $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ ,  $\beta(0) = (0, 1, 0)$ ,  $\gamma(0) = (0, 0, 1)$ . Сгенерируем случайным образом  $N$  векторов  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,

задающих направление движения винта, причем  $A \leq |r_i| \leq B$ . Кроме того, потребуем, чтобы вдоль любого из направлений  $r_i$  тело двигалось равномерно в течение фиксированного времени  $\Delta t$  независимо от длины  $|r_i|$ . Каждую компоненту управлений будем описывать полиномом Лагранжа степени  $p$ . Используя алгоритм, описанный в предыдущем пункте, для каждого  $r_i$  определим узловые значения для компонент управляющих воздействий  $\omega_{i,k}$ ,  $k = 0, \dots, p$ . Таким образом, получим  $N$  наборов  $(r_i, \omega_{i,0}, \dots, \omega_{i,p})$ .

Используем 80 % наборов  $(r_i, \omega_{i,0}, \dots, \omega_{i,p})$  для обучения нейронной сети по методу обратного распространения ошибки, а остальные 20 % наборов — для оценки качества обучения. Обученная таким способ нейронная сеть будет реализовывать аппроксимацию  $(\omega_{i,0}, \dots, \omega_{i,p}) = \mathcal{A}(r)$  узловых значений управляющих воздействий от вектора перемещения.

Для решения задачи движения вдоль заданной траектории будет применяться следующий алгоритм.

1. Разобьем траекторию  $r^*(t)$  на  $K$  сегментов узлами  $t^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, K$ , причем  $\Delta t = t^{(i+1)} - t^{(i)}$ .
2. Инициализируем счетчик числа итераций  $k = 0$ , радиус-вектор положения тела  $r^{(0)} = r^*(t(0))$  и матрицу направляющих косинусов  $\mathbf{D}^{(0)} = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ .
3. Определим вектор перемещения  $\Delta R^{(k)} = \mathbf{D}^{(0)}(r^*(t^{(k+1)}) - r^{(k)})$  в проекциях на оси подвижной системы координат.
4. Вычислим узловые значения управлений  $(\omega_{k,0}, \dots, \omega_{k,p}) = \mathcal{A}(\Delta R^{(k)})$  и с их помощью определим положение тела  $R^{(k+1)}$  и его ориентацию  $\mathbf{Q}^{(k+1)}$  в момент времени  $t^{(k+1)}$ .
5. Вычислим положение тела в неподвижной системе координат  $r^{(k+1)} = \mathbf{D}^{(k)} R^{(k+1)} + r^{(k)}$  после прохождения  $k$ -го звена.
6. Вычислим матрицу направляющих косинусов в конце  $k$ -го звена  $\mathbf{D}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{Q}^{(k+1)}$ .
7. Увеличим счетчик числа итераций  $k = k + 1$ .
8. Если  $k < K$ , то перейти к п. 3.

Наиболее затратной частью данного алгоритма является генерирование обучающей выборки и собственно обучение нейронной сети.

## 4. Примеры численных расчетов

### 4.1. Расчет с помощью гибридного генетического алгоритма

В качестве примера рассматривается движение тела по траектории вида

$$r^*(t) = \left( \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 1, \arctg t, t \right), \quad t \in [0, 10]. \quad (32)$$

В начальный момент времени будем полагать, что тело имеет ориентацию

$$\alpha(0) = (1, 0, 0), \quad \beta(0) = (0, 1, 0), \quad \gamma(0) = (0, 0, 1). \quad (33)$$

На каждом элементе разбиения временного интервала вместо функционала (21) мы минимизировали среднее интегральное отклонение от заданной траектории:

$$\mathcal{J}(\omega(t)) = \frac{1}{t^{(i+1)} - t^{(i)}} \int_{t^{(i)}}^{t^{(i+1)}} (r(t) - r^*(t)) dt \rightarrow \min. \quad (34)$$

На рис. 2–4 показаны точные зависимости управлений от времени, рассчитанные из уравнений (24), и управления, полученные с помощью гибридного генетического алгоритма. Из рис. 2–4 видно, что численное решение практически совпадает с аналитическим. Заданная и расчетная траектории показаны на рис. 5–7. Из рис. 5–7 видно, что использованный алгоритм обеспечивает практически точное следование по заданной траектории.

Вычислительные эксперименты проводились для кусочно-полиномиальных аппроксимаций порядка 2 и 3. Для аппроксимации порядка  $p = 3$  были использованы следующие параметры алгоритма:

- 1) максимальное допустимое значение целевой функции:  $\mathcal{J} < 10^{-10}$ ;
- 2) длина элемента:  $t^{(i+1)} - t^{(i)} = 0.02$ ;
- 3) число шагов интегрирования на каждом элементе: 10;
- 4) максимальные допустимые затраты процессорного времени на каждом элементе:  $t_{\max} = 20$  секунд.

При указанных настройках суммарные затраты процессорного времени составили 6600 с.

Для аппроксимации порядка  $p = 2$  были использованы следующие параметры алгоритма:

- 1) максимальное допустимое значение целевой функции:  $\mathcal{J} < 10^{-10}$ ;
- 2) длина элемента:  $t^{(i+1)} - t^{(i)} = 0.01$ ;
- 3) число шагов интегрирования на каждом элементе: 10;
- 4) максимальные допустимые затраты процессорного времени на каждом элементе:  $t_{\max} = 10$  секунд.

При указанных настройках суммарные затраты процессорного времени составили 3000 с.

Таким образом, с вычислительной точки зрения выгоднее использовать аппроксимацию управлений кусочно-квадратичными функциями при меньшем размере элемента разбиения временного интервала.

#### **4.2. Управление с помощью нейронных сетей**

Затраты процессорного времени на расчет управления с помощью генетических алгоритмов оказываются весьма существенными. В частности, расчет 1 секунды физического времени стоит 300 секунд процессорного времени. Применение искусственных нейронных сетей позволяет снизить данные вычислительные затраты на несколько порядков. Для обучения нейронной сети была сгенерирована выборка из 20 000 элементов. Каждый элемент выборки определял направление движения и узловые значения управлений для полинома Лагранжа 2 порядка.

Точные зависимости управлений от времени и рассчитанные с помощью нейронной сети показаны на рис. 8–10. Из рис. 8–10 видно, что на начальном участке времени есть как качественное, так и количественное согласование аппроксимированного управления с эталонным. Однако наличие небольших ошибок в аппроксимации приводит к тому, что в дальнейшем расчетное управление существенно отклоняется от эталонного. Тем не менее аппроксимированное управление обеспечивает достаточно точное следование по траектории (см. рис. 11–13).

Затраты процессорного времени на расчет управления, обеспечивающего движение вдоль заданной траектории в течение 10 секунд, составили 0.04 секунд, то есть расчет 1 секунды физического времени стоит 0.004 секунды процессорного времени, что на 6 порядков меньше по сравнению с расчетом на основе гибридных алгоритмов.

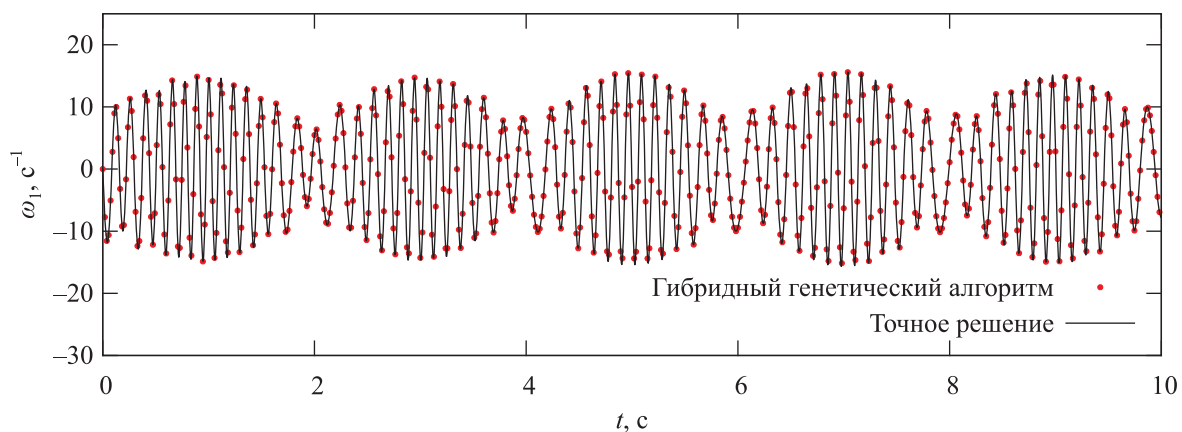


Рис. 2. Зависимость компоненты  $\omega_1$  угловой скорости от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

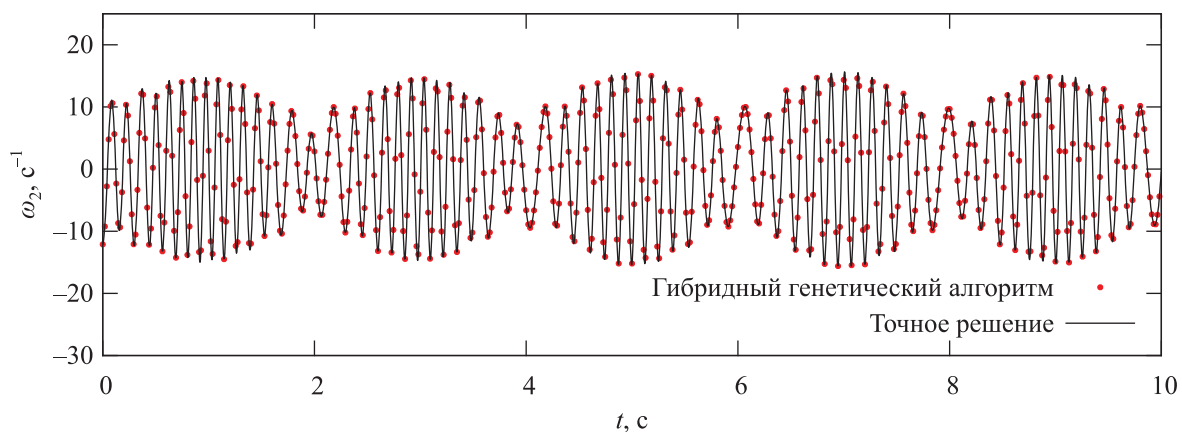


Рис. 3. Зависимость компоненты  $\omega_2$  угловой скорости от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

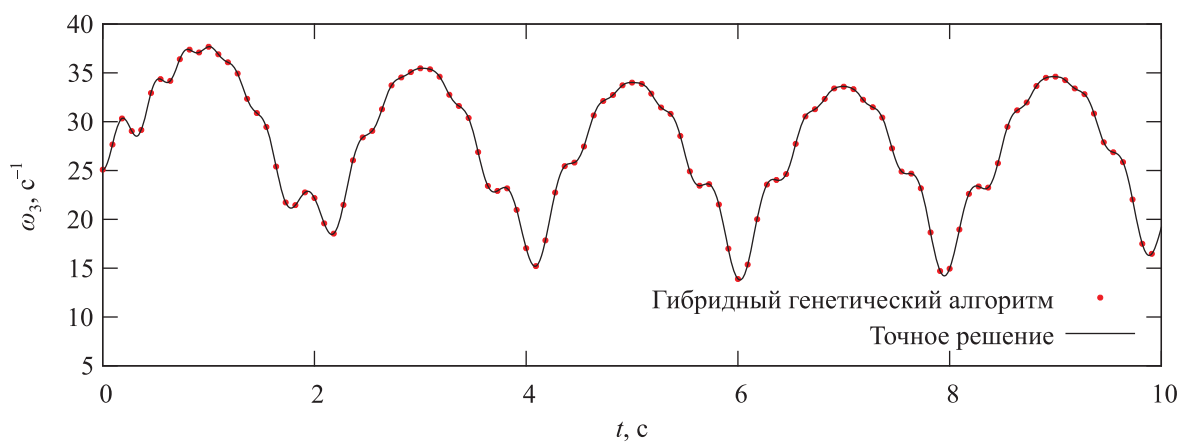


Рис. 4. Зависимость компоненты  $\omega_3$  угловой скорости от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

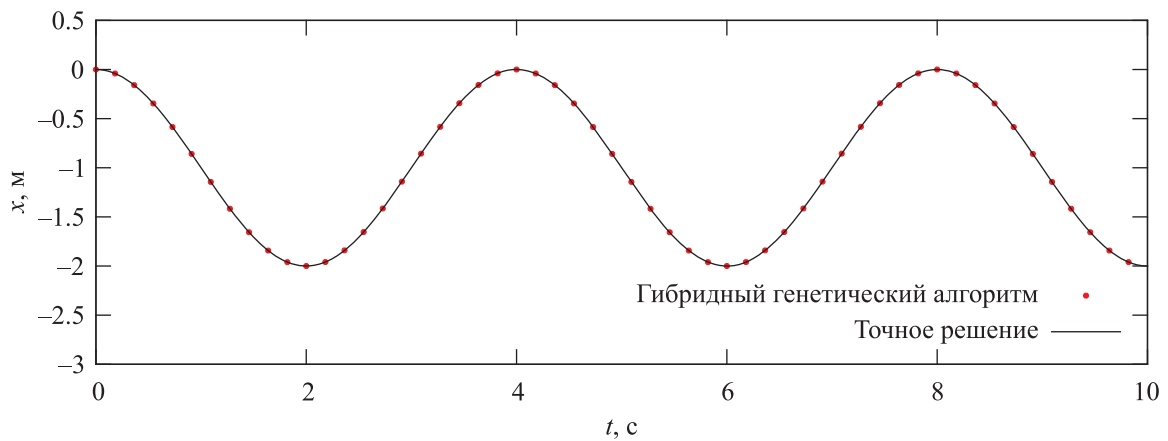


Рис. 5. Зависимость координаты  $x$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

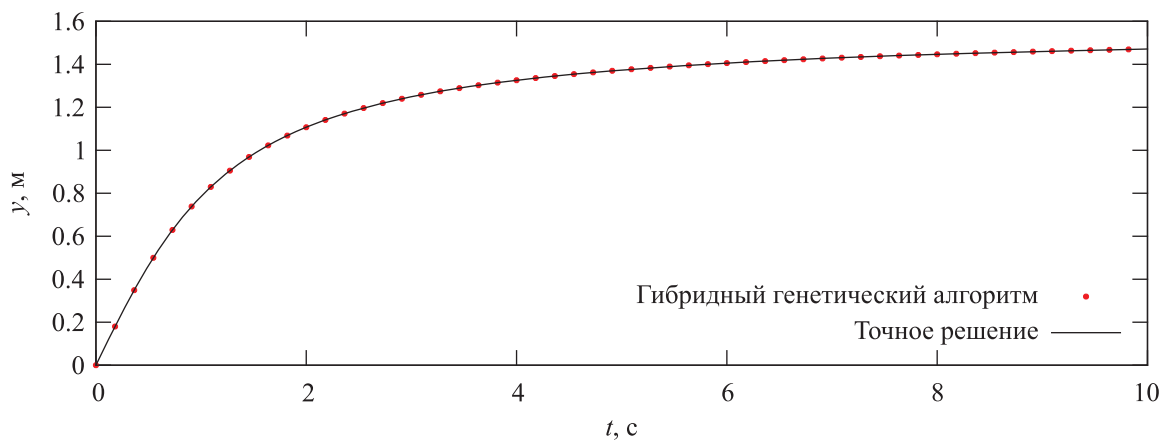


Рис. 6. Зависимость координаты  $y$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

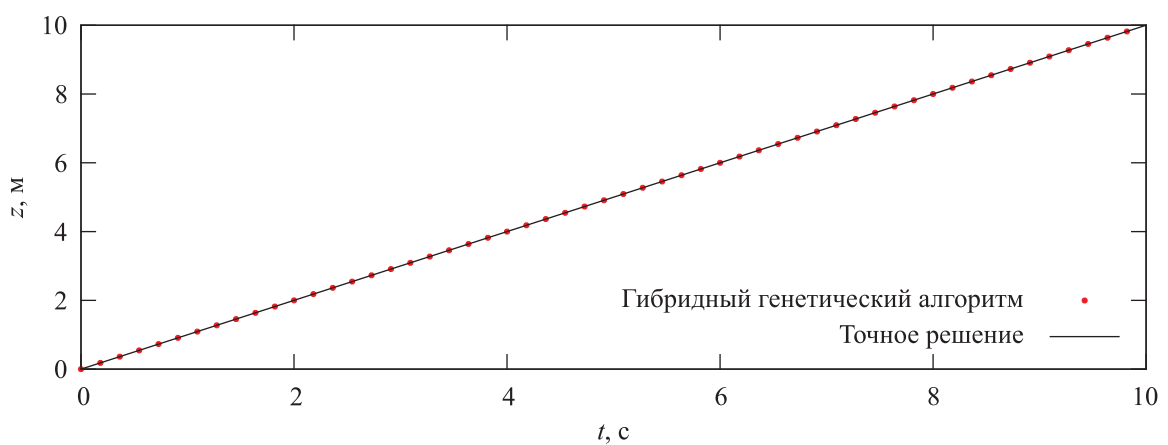


Рис. 7. Зависимость координаты  $z$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе гибридного генетического алгоритма

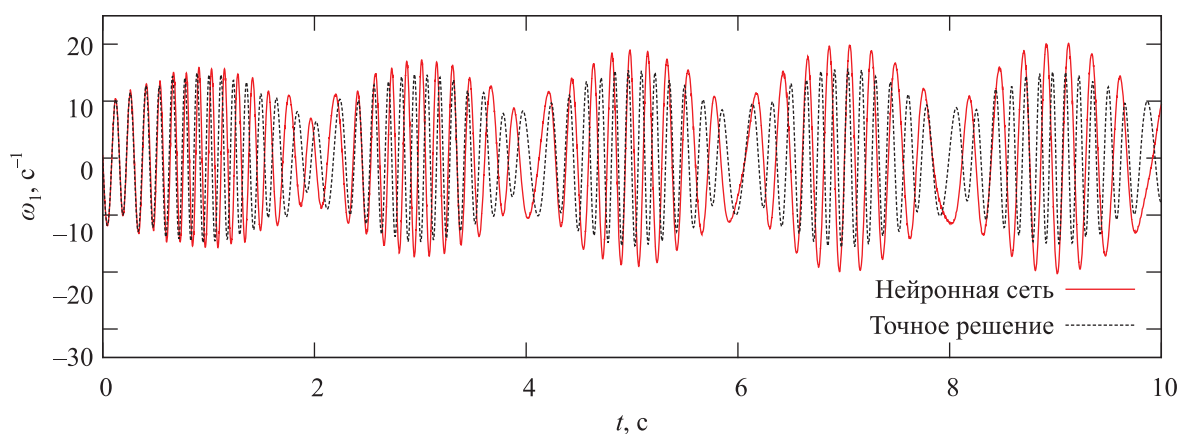


Рис. 8. Зависимость компоненты  $\omega_1$  угловой скорости от времени  $t$ . Прерывистая линия соответствует точному решению, сплошная — решению на основе искусственной нейронной сети

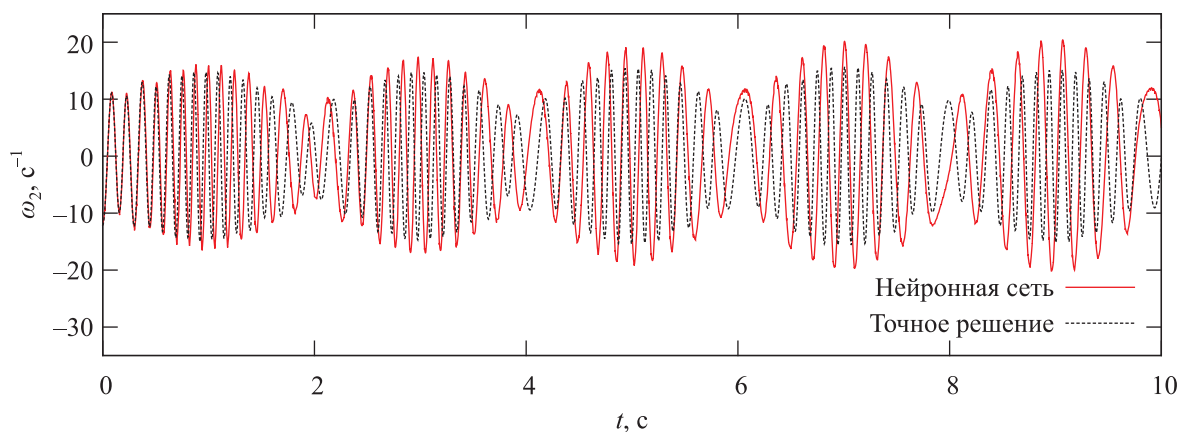


Рис. 9. Зависимость компоненты  $\omega_2$  угловой скорости от времени  $t$ . Прерывистая линия соответствует точному решению, сплошная — решению на основе искусственной нейронной сети

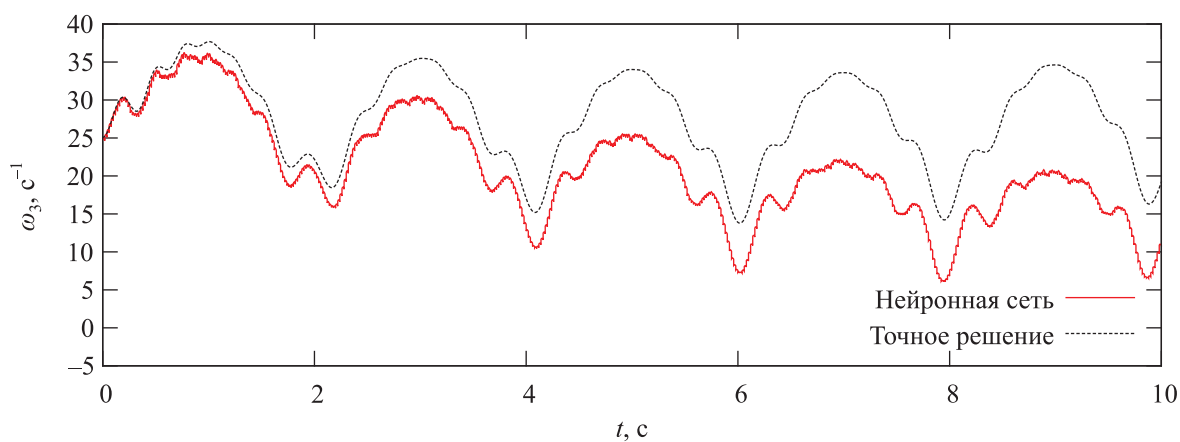


Рис. 10. Зависимость компоненты  $\omega_3$  угловой скорости от времени  $t$ . Прерывистая линия соответствует точному решению, сплошная — решению на основе искусственной нейронной сети

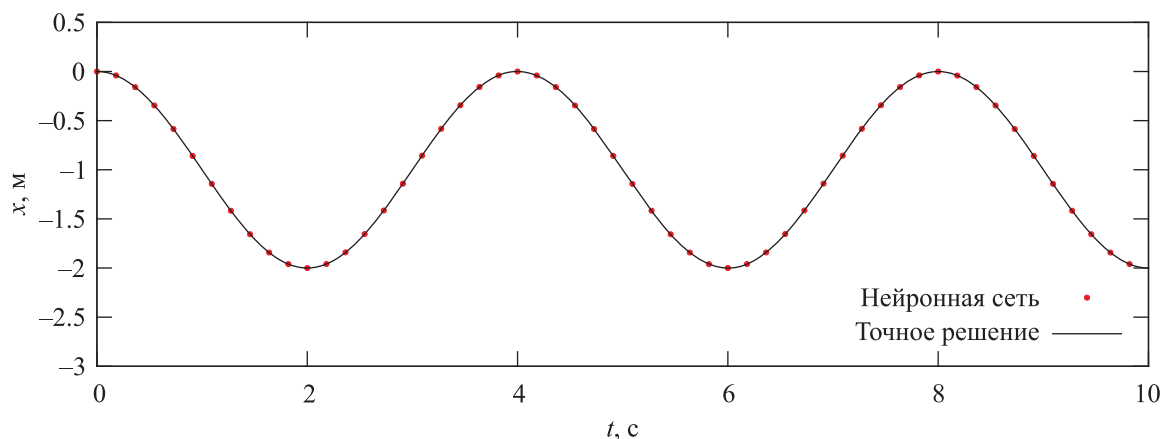


Рис. 11. Зависимость координаты  $x$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе искусственной нейронной сети

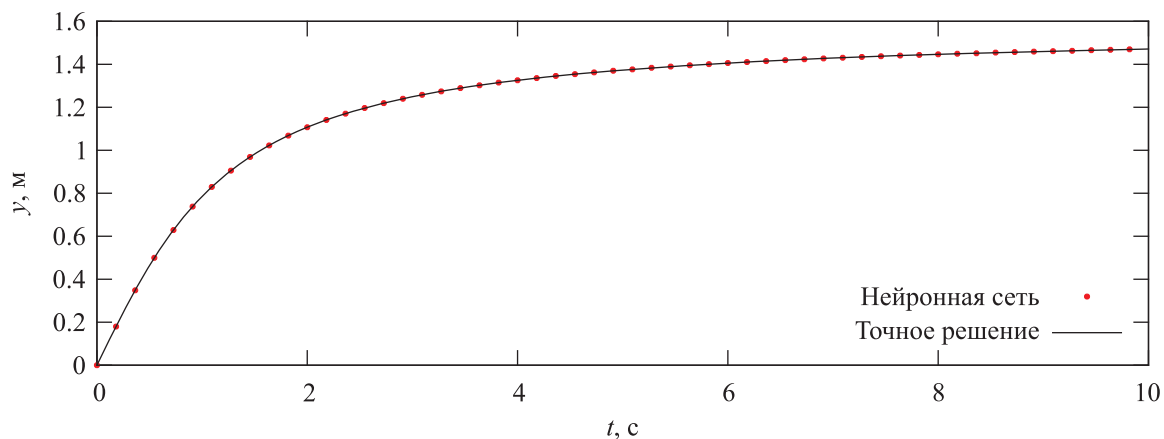


Рис. 12. Зависимость координаты  $y$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе искусственной нейронной сети

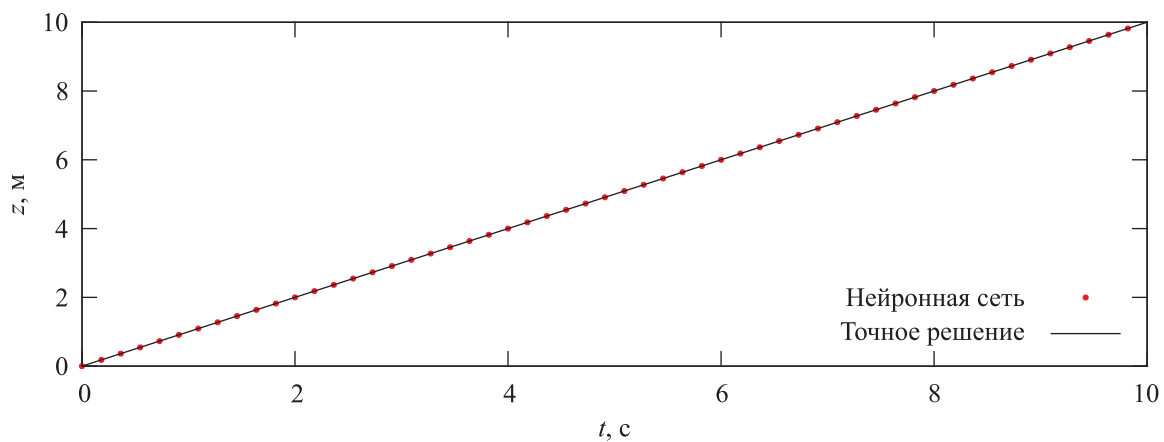


Рис. 13. Зависимость координаты  $z$  начала подвижной системы координат от времени  $t$ . Сплошная линия соответствует точному решению, маркеры — решению на основе искусственной нейронной сети



## 5. Заключение

В данной работе был проведен сравнительный анализ двух численных подходов к определению управляющих воздействий, обеспечивающих движение вблизи заданной траектории. Оба подхода обеспечивают достаточно точное следование по заданной траектории. Однако метод, основанный на применении искусственных нейронных сетей, требует существенно меньших временных затрат по сравнению с методом на основе гибридных генетических алгоритмов.

В заключение статьи отметим ряд вопросов, интересных с практической точки зрения.

1. Включение вязких сил в описанный алгоритм.
2. Построение алгоритма расчета управлений, обеспечивающих не только прохождение вблизи заданной траектории, но и выполнение граничных условий.
3. Совместное использование нейронной сети и какого-либо метода оптимизации (градиентные методы, генетические алгоритмы). Например, нейронная сеть определяет начальное приближение, а метод оптимизации улучшает его.

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за интерес, проявленный к данной работе.

## Список литературы (References)

- Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.  
*Borisov A. V., Mamaev I. S.* Dynamics of a rigid body: Hamiltonian methods, integrability, chaos. — Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005. — 576 p. (in Russian).
- Ветчанин Е. В., Тененев В. А.* Движение каплеобразного и сферического тел с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // Интеллектуальные системы в производстве. — 2012. — № 1(19). — С. 11–23.  
*Vetchanin E. V., Tenenev V. A.* Motion of drop-shaped and spherical bodies with variable mass geometry in viscous fluid [Dvizhenie kapleobraznogo i sfericheskogo tel s peremennoj geometriiej mass v viazkoj zhidkosti] // Intelligent Systems in Manufacturing [Intellekt. Sist. Proizv.]. — 2012. — No. 1. — P. 11–23 (in Russian).
- Ветчанин Е. В., Тененев В. А.* Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 371–381.  
*Vetchanin E. V., Tenenev V. A.* Motion control simulating in a viscous liquid of a body with variable geometry of weights [Modelirovanie upravleniia dvizheniem v viazkoj zhidkosti tela s peremennoj geometriiej mass] // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3, no. 4. — P. 371–381 (in Russian).
- Воинов О. В.* Инерциальное движение тела в идеальной жидкости из состояния покоя // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 214–219.  
*Voinov O. V.* Inertial motion of a body in an ideal fluid from the state at rest // J. Appl. Mech. Tech. Phys. — 2008. — Vol. 49, no. 4. — P. 699–703. (Original Russian paper: Voinov O. V. Inertial'noe dvizhenie tela v ideal'noj zhidkosti iz sostoianii pokoia // Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz. — 2008. — Vol. 49, no. 4. — P. 214–219.)
- Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф.* Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 845–857.  
*Volkova L. Y., Jatsun S. F.* Studying of regularities of movement of the jumping robot at various positions of a point of fixing of a foot [Upravlenie dvizheniem trekhmassovogo robota, peremeshchajushchegosia v zhidkoj srede] // Nonlinear Dynamics [Nelin. Dinam.]. — 2011. — Vol. 7, no. 4. — P. 845–857 (in Russian).
- Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. — 432 с.  
*Evtushenko Yu. G.* Methods of solving extremal problems and their application in optimization systems [Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primenenie v sistemakh optimizacii]. — Moscow: Nauka, 1982. — 432 p. (in Russian).

- Киселев Л. В., Медведев А. В.* Сравнительный анализ и оптимизация динамических свойств автономных подводных роботов различных проектов и конфигураций // Подводные исследования и робототехника. — 2012. — № 1. — С. 24–35.  
*Kisel'ov L. V., Medvedev A. V.* Comparative analysis and the optimization of the autonomous underwater robots dynamic properties of different projects and configurations [Srvnitel'nyj analiz i optimizatsiia dinamicheskikh svoystv avtonomnykh podvodnykh robotov razlichnykh proektov i konfiguratsij] // Underwater Investigations and Robotics [Podvodnye issledovaniia i robototekhnika]. — 2012. — No. 1. — P. 24–35 (in Russian).
- Козлов В. В., Рамоданов С. М.* О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ. — 2001. — Т. 65, № 4. — С. 592–601.  
*Kozlov V. V., Ramodanov S. M.* The Motion of a Variable Body in an Ideal Fluid // J. Appl. Math. Mech. — 2001. — Vol. 65, no. 4. — P. 579–587. (Original Russian paper: Kozlov V. V., Ramodanov S. M. O dvizhenii izmeniaemogo tela v ideal'noj zhidkosti. — Prikl. Mat. Mekh. — 2001. — Vol. 65, no. 4. — P. 592–601.)
- Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. — 328 с.  
*Krylov V. I.* Approximate calculation of integrals [Priblizhennoe vychislenie integralov]. — Moscow: Fizmatlit, 1959. — 328 p. (in Russian).
- Рамоданов С. М., Тененев В. А.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // Нелинейная динамика. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 635–647.  
*Ramodanov S. M., Tenenev V. A.* Motion of a body with variable distribution of mass in a boundless viscous liquid [Dvizhenie tela s peremennoi geometriiej mass v bezgranichnoj viazkoj zhidkosti] // Nonlinear Dynamics [Nelin. Dinam.]. — 2011. — Vol. 7, no. 3. — P. 635–647 (in Russian).
- Тененев В. А., Ветчанин Е. В., Илалетдинов Л. Ф.* Хаотическая динамика в задаче о падении тела винтовой формы в жидкости // Нелинейная динамика. — 2016. — Т. 12, № 1. — С. 99–120.  
*Tenenev V. A., Vetchanin E. V., Ilaletdinov L. F.* Chaotic dynamics in the problem of the fall of a screw-shaped body in a fluid [Haoticheskaia dinamika v zadache o padenii tela vintovoj formy v zhidkosti] // Nonlinear Dynamics [Nelin. Dinam.]. — 2016. — Vol. 12, no. 1. — P. 99–120 (in Russian).
- Тененев В. А., Якимович Б. А.* Генетические алгоритмы в моделировании систем. — Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2010. — 308 с.  
*Tenenev V. A., Yakimovich B. A.* Genetic algorithms in modeling [Geneticheskie algoritmy v modelirovanii sistem]. — Izhevsk: Izd-vo IzhGTU, 2010. — 308 p. (in Russian).
- Толчин В. Н.* Инерциод, силы инерции как источник движения. — Пермь: Кн. изд-во, 1977. — 99 с.  
*Tolchin V. N.* Inertcioid, sily inertcii kak istochnik dvizheniia. — Perm: Kn. izd-vo, 1977. — 99 p. (in Russian).
- Черноузько Ф. Л.* О перемещении тела в жидкости за счет колебаний присоединенного звена // ДАН. — 2010. — Т. 431, № 1. — С. 46–49.  
*Chernous'ko F. L.* Motion of a body in a fluid due to attached-link oscillations // Dokl. Phys. — 2010. — Vol. 55, no. 3. — P. 138–141. (Original Russian paper: Chernous'ko F. L. O peremeshchenii tela v zhidkosti za schet kolebanij prisoedinennogo zvena // Dokl. Akad. Nauk. — Vol. 431, no. 1. — P. 46–49.)
- Черноузько Ф. Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. — 2008. — Т. 72, № 2. — С. 202–215.  
*Chernous'ko F. L.* The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // J. Appl. Math. Mech. — 2008. — Vol. 72, no. 2. — P. 116–125. (Original Russian paper: Chernous'ko F. L. Optimal'nye periodicheskie dvizheniia dvukhmassovoj sistemy v soprotivliaiushchei'sia srede // Prikl. Mat. Mekh. — 2008. — Vol. 72, no. 2. — P. 202–215.)
- Черноузько Ф. Л.* Оптимальное управление движением многозвенной системы в среде с сопротивлением // ПММ. — 2012. — Т. 76, вып. 3. — С. 355–373.  
*Chernous'ko F. L.* Optimal control of the motion of a multilink system in a resistive medium // J. Appl. Math. Mech. — 2012. — Vol. 76, no. 3. — P. 255–267. (Original Russian paper: Chernous'ko F. L. Optimal'noe upravlenie dvizheniem mnogozvennoj sistemy v srede s soprotivleniem // Prikl. Mat. Mekh. — 2012. — Vol. 76, no. 3. — P. 355–373.)
- Шаура А. С., Кочурова Д. С.* Решение задачи траекторного управления мобильными роботами с помощью параллельного генетического алгоритма // Интеллектуальные системы в производстве. — 2013. — № 1. — С. 58–65.  
*Shaura A. S., Kochurova D. S.* Solution of the problem of mobile robot trajectory control by means of parallel genetic algorithm [Reshenie zadachi traektornogo upravleniia mobil'nymi robotami s pomoshchiyu parallel'nogo geneticheskogo algoritma] // Intelligent Systems in Manufacturing [Intellekt. Sist. Proizv.]. — 2013. — No. 1. — P. 58–65 (in Russian).
- Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.* How to Control Chaplygin's Sphere Using Rotors // Regular and Chaotic Dynamics. — 2012. — Vol. 17, no. 3-4. — P. 258–272.

- Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.* How to Control the Chaplygin Ball Using Rotors. II // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — P. 144–158.
- Childress S.* Mechanics of swimming and flying. — Cambridge University Press, 1981. — 165 p.
- Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T.* A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // J. Fluid Mech. — 2011. — Vol. 669. — P. 527–556.
- Clebsch A.* Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit // Math. Annalen. — 1871. — Bd. 3. — S. 238–262.
- Eldredge J. D.* Numerical simulation of the fluid dynamics of 2D rigid body motion with the vortex particle method // Journal of Computational Physics. — 2007. — Vol. 221. — P. 626–648.
- Kecman V.* New support vector machines algorithm for huge data sets // Лекции по нейроинформатике. По материалам Школы-семинара «Современные проблемы нейроинформатики». — М., 2007. — С. 97–176.
- Kecman V.* New support vector machines algorithm for huge data sets // Лекции по нейроинформатике. По материалам Школы-семинара «Современные проблемы нейроинформатики». — Moscow, 2007. — P. 97–176 (in Russian).
- Kilin A. A., Ramodanov S. M., Tenenev V. A.* The Motion of a Rigid Body Controlled by Means of Two Moving Internal Masses in an Ideal Fluid // Nonlin. Dyn. Mob. Robot. — 2014. — Vol. 2 (1). — P. 115–130.
- Kirchhoff G., Hensel K.* Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik // Leipzig: BG Teubner, 1874.
- Lewis A. D., Ostrowski J. P., Burdick J. W., Murray R. M.* Nonholonomic mechanics and locomotion: the Snakeboard example // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994. — 16 p.
- Lighthill J.* Mathematical Biofluidynamics. — Society for Industrial & Applied Mathematics, US, 1975.
- Ostrowski J. P., Desai J. P., Kumar V.* Optimal Gait Selection for Nonholonomic Locomotion Systems // The International Journal of Robotics Research. — 2000. — Vol. 19, № 3. — P. 225–237.
- Rust I. C., Asada H. H.* The eyeball ROV: Design and control of a spherical underwater vehicle steered by an internal eccentric mass // Robotics and Automation (ICRA), 2011 IEEE International Conference on. — IEEE, 2011. — P. 5855–5862.
- Sahin M., Mohseni K., Colin S. P.* The numerical comparison of flow patterns and propulsive performances for the hydromedusae *Sarsia tubulosa* and *Aequorea victoria* // Journal of Experimental Biology. — 2009. — Vol. 212, no. 16. — P. 2656–2667.
- Shaura A. S., Tenenev V. A., Vetchanin E. V.* Trajectory Control of a Self-propulsion Body // Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics. — 2013. — Vol. 1, no. 1. — P. 51–69.
- Terada Y., Yamamoto I.* An animatronic system including lifelike robotic fish // Proceedings of the IEEE. — 2004. — Vol. 92, no. 11. — P. 1814–1820.
- Terada Y., Yamamoto I.* Development of oscillating fin propulsion system and its application to ships and artificial fish // Mitsubishi Heavy Industries Tech. Review. — 1999. — Vol. 36. — P. 84–88.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.* Control of the Motion of a Helical Body in a Fluid Using Rotors // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — Vol. 21, no. 7–8. — P. 874–884.
- Vetchanin E. V., Kilin A. A., Tenenev V. A., Shaura A. S.* Numerical simulation of motion in the viscous fluid of a three-axial ellipsoid controlled by three rotors // Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable Systems GDIS 2013: Book of abstracts. — Moscow–Izhevsk: Publishing Center «Institute of Computer Science», 2013. — P. 54–55.
- Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A.* The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — P. 100–117.