

УДК: 519.6

## Определение параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных методом моментов низших нечетных порядков

**Т. В. Яковлева**

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Получено 09.08.2017, после доработки — 12.09.2017.*

*Принято к публикации 26.09.2017.*

В работе развивается новый математический метод решения задачи совместного расчета параметров сигнала и шума в условиях статистического распределения Райса посредством метода моментов, основанного на анализе данных для начальных моментов 1-го и 3-го порядков случайной райсовской величины. Получена в явном виде система уравнений для искомых параметров сигнала и шума. В предельном случае малой величины отношения сигнала к шуму получены аналитические формулы, позволяющие рассчитать искомые параметры задачи без необходимости численного решения уравнений. Разработанный в работе метод обеспечивает эффективное разделение информативной и шумовой компонент анализируемых данных в отсутствие каких-либо априорных предположений, лишь на основе обработки результатов выборочных измерений сигнала. Задача является значимой для целей обработки райсовских данных, в частности, в системах магнитно-резонансной визуализации, в системах ультразвуковой визуализации, при анализе оптических сигналов в системах дальнометрии, в радиолокации и т. д. Как показали результаты исследований, решение двухпараметрической задачи разработанным методом не приводит к увеличению объема требуемых вычислительных ресурсов по сравнению с решением однопараметрической задачи, решаемой в предположении априорной известности второго параметра. В работе приведены результаты компьютерного моделирования разработанного метода. Результаты численного расчета параметров сигнала и шума разработанным методом подтверждают его эффективность. Проведено сопоставление точности определения искомых параметров разработанным методом и ранее разработанным вариантом метода моментов, основанным на обработке измеренных данных для низших четных моментов анализируемого сигнала.

Ключевые слова: функция плотности вероятности, распределение Райса, метод моментов, выборки измерений, отношение сигнала к шуму

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 17-07-00064 по программе фундаментальных исследований.

UDC: 519.6

## Signal and noise parameters' determination at rician data analysis by method of moments of lower odd orders

T. V. Yakovleva

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences,  
Vavilov st. 44, b. 2, Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Received 09.08.2017, after completion — 12.09.2017.*

*Accepted for publication 26.09.2017.*

The paper develops a new mathematical method of the joint signal and noise parameters determination at the Rice statistical distribution by method of moments based upon the analysis of data for the 1-st and the 3-rd raw moments of the random rician value. The explicit equations' system have been obtained for required parameters of the signal and noise. In the limiting case of the small value of the signal-to-noise ratio the analytical formulas have been derived that allow calculating the required parameters without the necessity of solving the equations numerically. The technique having been elaborated in the paper ensures an efficient separation of the informative and noise components of the data to be analyzed without any a-priori restrictions, just based upon the processing of the results of the signal's sampled measurements. The task is meaningful for the purposes of the rician data processing, in particular in the systems of magnetic-resonance visualization, in ultrasound visualization systems, at the optical signals' analysis in range measuring systems, in radio location, etc. The results of the investigation have shown that the two parameter task solution of the proposed technique does not lead to the increase in demanded volume of computing resources compared with the one parameter task being solved in approximation that the second parameter of the task is known a-priori. There are provided the results of the elaborated technique's computer simulation. The results of the signal and noise parameters' numerical calculation have confirmed the efficiency of the elaborated technique. There has been conducted the comparison of the accuracy of the sought-for parameters estimation by the technique having been developed in this paper and by the previously elaborated method of moments based upon processing the measured data for lower even moments of the signal to be analyzed.

Keywords: probability density function, Rice distribution, method of moments, samples of measurements, signal to noise ratio

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 717–728 (Russian).

The work was supported by RFBR, project no. 17-07-00064 within the fundamental research program.

## 1. Введение

В последние годы исследования методов анализа стохастических данных в условиях распределения Райса вызывают все больший интерес в связи с широким кругом задач, адекватно описываемых данным распределением. Распределение Райса используется в задачах, в которых выходной сигнал представляет собой сумму искомого детерминированного полезного сигнала и случайного шума, образованного многими независимыми нормально распределенными слагаемыми с нулевым средним значением. Величина амплитуды, или огибающей, такого выходного сигнала подчиняется, как известно, распределению Райса, [Rice, 1945]. Анализируя полученные экспериментальные данные выборочных измерений райсовского сигнала, можно не только восстановить исходную величину полезного сигнала, но и рассчитать дисперсию шума. Для этого эффективно используются методы так называемого двухпараметрического анализа райсовских данных, основанные на использовании принципов математической статистики, а именно метод максимума правдоподобия [Sijbers et al., 1998; Rajanet al., 2011; Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Yakovleva, Kulberg, 2013] и варианты метода моментов [Talukdar, Lawing, 1991; Park, Jr., 1961; Benedict, Soong, 1967].

В работах [Яковлева, 2014; Яковлева, 2016] развиваются и анализируются два варианта двухпараметрического метода моментов, основанные на обработке данных выборочных измерений моментов низших четных порядков, т. е. 2-го и 4-го моментов (так называемый метод ММ24), и двух моментов низших порядков, т. е. 1-го и 2-го моментов (так называемый метод ММ12).

В настоящей работе развивается теория и исследуется еще один вариант двухпараметрического метода моментов, а именно метод, основанный на обработке данных выборочных измерений начальных моментов низших нечетных порядков, т. е. 1-го и 3-го моментов. По аналогии с ранее развитыми методами моментов ниже для краткости будем обозначать этот вариант метода моментов как ММ13. Как показал проведенный анализ рассматриваемого методов, использование моментов низшего нечетного порядков дает определенные преимущества с точки зрения обеспечиваемого быстродействия и точности расчетов, особенно в диапазоне небольших значений отношения сигнала к шуму.

Предлагаемый метод обеспечивает возможность расчета не одного, а обоих *a priori* неизвестных статистических параметров задачи, а именно средней величины полезного сигнала и дисперсии шума. Причем значимым является тот факт, что задача восстановления полезного сигнала на фоне шума решается посредством математического расчета искомым параметрам исключительно на основе реально измеренных выборочных данных, без использования каких-либо априорных предположений, в отличие от ряда методов так называемого однопараметрического приближения (см., например, [Talukdar, Lawing, 1991]), в которых параметр дисперсии шума предполагается известным *a priori*, что никогда не выполняется в реальных условиях. В работах [Яковлева, Kulberg, 2013; Яковлева, 2014; Яковлева, 2016] развит и обоснован ряд подходов к решению двухпараметрической задачи анализа райсовских данных, свободных от каких-либо априорных предположений.

## 2. Постановка задачи, основные обозначения

В задаче анализа райсовского сигнала измеряемой и анализируемой величиной является модуль комплексной величины,  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ , действительная  $x_{\text{Re}}$  и мнимая  $x_{\text{Im}}$  части которого представляют собой независимые случайные величины с одинаковыми, вообще говоря, ненулевыми математическими ожиданиями  $\nu$  и искажаются гауссовским шумом, имеющим нормальное распределение с некоторой неизвестной величиной дисперсии  $\sigma^2$ . При этом шумовые составляющие, искажающие действительную  $x_{\text{Re}}$  и мнимую  $x_{\text{Im}}$  компоненты измеряемого сиг-

нала, имеют нулевые средние значения и тем самым не изменяют среднюю величину  $\nu$  действительной и мнимой компонент исходного сигнала.

Амплитуда сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$  подчиняется распределению Райса, функция плотности вероятности которого выражается следующей формулой:

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения:  $I_\delta(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка  $\delta$ ;  $x_i$  — величина сигнала, полученная как результат  $i$ -го измерения в выборке;  $n$  — количество элементов в выборке, называемое также длиной выборки.

Для обозначения усреднений по выборке будем использовать угловые скобки:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \dots, \quad \langle x^\kappa \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\kappa. \quad (2)$$

Средние величины при бесконечно большой длине выборки будем обозначать чертой сверху:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \dots, \quad \bar{x^\kappa} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\kappa. \quad (3)$$

В (3) величина  $\bar{x^\kappa}$  представляет собой  $\kappa$ -й начальный момент случайной величины  $x$ . Измеренное на основе выборочных измерений  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) значение  $\langle x^\kappa \rangle$  стремится к значению соответствующего  $\kappa$ -го момента случайного сигнала, формирующего изображение, при бесконечно большой длине  $n$  выборки измерений.

Таким образом, поставленная задача расчета величины полезного сигнала и дисперсии шума методом ММ13 математически состоит в том, чтобы, используя выборочные данные для начальных моментов  $\bar{x}$  и  $\bar{x^3}$ , определить искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$ .

### 3. Система уравнений для искомых параметров сигнала и шума

Развиваемый в данной работе двухпараметрический метод моментов основан на использовании формул для начальных нечетных моментов низшего порядка райсовской величины амплитуды анализируемого сигнала с целью последующего расчета искомых параметров полезного сигнала  $\nu$  и дисперсии шума  $\sigma^2$  на основе результате выборочных измерений.

Известно, что для 1-го и 3-го начальных моментов случайной величины  $x$ , подчиняющейся распределению Райса, справедливы следующие формулы, [Park, 1961]:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot L_{1/2}(-\nu^2/2\sigma^2), \\ \bar{x^3} &= 3 \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot L_{3/2}(-\nu^2/2\sigma^2). \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) функции  $L_{1/2}$  и  $L_{3/2}$  представляют собой полиномы Лагерра (Laguerre). Формулы (4) фактически представляют собой систему двух уравнений для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ . В решении данной системы и состоит рассматриваемый двухпараметрический метод моментов ММ13, основанный на измерениях 1-го и 3-го моментов величины амплитуды анализируемого сигнала.

Как известно, для полинома Лагерра справедливо следующее соотношение, устанавливающее связь  $L_q(x)$  с другими специальными функциями, [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$$L_q(x) = {}_1F_1(-q; 1; x) = M(-q; 1; x), \tag{5}$$

где  ${}_1F_1$  — конфлюэнтная (вырожденная) гипергеометрическая функция 1-го рода,  $M$  — функция Куммера.

С учетом преобразований (5) систему уравнений (4) для неизвестных параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right), \\ \bar{x^3} &= 3 \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot {}_1F_1\left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (4) и (6) содержат величины моментов анализируемого сигнала  $\bar{x}$  и  $\bar{x^3}$ , которые определяются в выборках измерений, т. е. фактически представляют собой величины  $\langle x \rangle$  и  $\langle x^3 \rangle$ , тем точнее совпадающие с  $\bar{x}$  и  $\bar{x^3}$ , чем больше длина выборки.

Для решения системы уравнений (6) введем обозначение  $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$ . Очевидно, что величина  $r$  характеризует отношение полезного сигнала, определяемого параметром  $\nu$ , к шуму, дисперсия которого определяется величиной  $\sigma^2$ . Используя обозначения (2) для результатов выборочных измерений и переписывая (6) как систему уравнений для переменных  $\sigma$  и  $r$ , получим

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -r\right), \\ \langle x^3 \rangle &= 3 \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot {}_1F_1\left(-\frac{3}{2}; 1; -r\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Возводя первое из уравнений (7) в третью степень и подставляя получившееся выражение для  $\sigma^3$  во второе уравнение системы (7), получим в результате несложных преобразований следующее уравнение для переменной  $r$ :

$$\langle x \rangle^3 \cdot {}_1F_1\left(-\frac{3}{2}; 1; -r\right) = \langle x^3 \rangle \cdot \frac{\pi}{6} \cdot {}_1F_1^3\left(-\frac{1}{2}; 1; -r\right). \tag{8}$$

Таким образом, систему двух существенно нелинейных уравнений (7) для двух неизвестных  $\sigma$  и  $r$  удалось свести к одному уравнению (8) для одной неизвестной  $r$ .

Вводя обозначение  $\alpha = \langle x \rangle^3 / \langle x^3 \rangle$ , из (8) получаем следующее уравнение метода моментов ММ13:

$$\alpha \cdot {}_1F_1\left(-\frac{3}{2}; 1; -r\right) = \frac{\pi}{6} \cdot {}_1F_1^3\left(-\frac{1}{2}; 1; -r\right). \tag{9}$$

Можно показать, что статистический коэффициент  $\alpha$ , определяющий степень стохастичности процесса, монотонно возрастает с ростом отношения сигнала к шуму, т. е. с ростом величины  $r$ , асимптотически приближаясь к единице при  $r \rightarrow \infty$ , т. е. по мере превращения сигнала в детерминированный сигнал. А именно, в предельном случае очень большого значения отношения сигнала к шуму, т. е. при  $r \rightarrow \infty$ , когда распределение Райса переходит, как известно, в распределение Гаусса, получаем  $\alpha_G = 1$ . В другом предельном случае, при  $\nu = 0$ , когда распределе-

ние Райса переходит в распределение Рэлея, выполняются известные для распределения Рэлея соотношения для начальных моментов 1-го и 3-го порядков:  $\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\bar{x}^3 = 3\sigma^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , из которых получаем, что для предельного случая распределения Рэлея  $\alpha_R = \frac{\pi}{6}$ . Нетрудно убедиться, что для стохастического процесса, подчиняющегося распределению Райса, в общем случае произвольной величины отношения сигнала к шуму коэффициент  $\alpha$  удовлетворяет условию  $\frac{\pi}{6} \leq \alpha < 1$ .

Принимая во внимание указанный интервал изменения статистического коэффициента  $\alpha$  и известные свойства вырожденной гипергеометрической функции [Абрамовиц, Стиган, 1979], можно убедиться в существовании и единственности решения уравнения (9) для неизвестной величины  $r$ .

Таким образом, решая уравнение (9), коэффициент  $\alpha$  которого определяется измеренными выборочными данными для 1-го ( $\langle x \rangle$ ) и 3-го ( $\langle x^3 \rangle$ ) моментов анализируемого сигнала, получаем значение параметра  $r = \frac{v^2}{2\sigma^2}$ . Затем, используя первое уравнение системы (7), вычисляем искомый параметр дисперсии шума по формуле

$$\sigma = \langle x \rangle \sqrt{\frac{2}{\pi}} / {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -r\right). \quad (10)$$

Далее, используя полученные значения для  $\sigma$  и  $r$ , из определения величины  $r = v^2 / 2\sigma^2$  нетрудно получить значение искомого параметра полезного сигнала  $v = \sqrt{2\sigma^2 r}$ .

#### 4. Аналитическое решение задачи в предельном случае слабого сигнала

Как показал проведенный математический анализ, в предельном случае малого значения отношения сигнала к шуму система уравнений (7) (как и эквивалентные ей системы уравнений (4) и (6)) может быть решена аналитически. А именно, для разложения в ряд вырожденной гипергеометрической функции известна следующая формула [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)} \cdot \frac{z^n}{n!}. \quad (11)$$

Формула (11) справедлива для любых действительных или комплексных значений коэффициентов  $a$  и  $b$ , кроме  $b = 0, -1, -2, \dots$

С точностью до членов  $z^2$  из (11) получаем

$${}_1F_1(a; b; z) \approx 1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{a \cdot (a+1)}{b \cdot (b+1)} \cdot \frac{z^2}{2!}. \quad (12)$$

Используя формулу (12) для разложения в ряд функций  ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -r\right)$  и  ${}_1F_1\left(-\frac{3}{2}; 1; -r\right)$ , систему уравнений (7) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{16}r^2\right), \\ \langle x^3 \rangle &= 3 \cdot \sigma^3 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}r + \frac{3}{16}r^2\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в предельном случае малого отношения сигнала к шуму ( $r \ll 1$ ) система уравнений (7) для искомым параметров сигнала и шума преобразуется к достаточно простым уравнениям (12), которые могут быть решены аналитически. Проводя несложные преобразования, из системы (12) двух уравнений для двух неизвестных  $\sigma$  и  $r$  нетрудно получить следующее квадратное уравнение для параметра  $r$ :

$$\langle x \rangle^3 / \langle x^3 \rangle \cdot \left( 1 + \frac{3}{2}r + \frac{3}{16}r^2 \right) = \frac{\pi}{6} \cdot \left( 1 + \frac{3}{2}r + \frac{9}{16}r^2 \right). \quad (14)$$

Решая уравнение (14), введем коэффициент  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\frac{\langle x \rangle^3}{\langle x^3 \rangle} - \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\langle x \rangle^3}{\langle x^3 \rangle}}. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что значения коэффициента  $\beta$  неотрицательны, причем значение  $\beta = 0$  соответствует частному случаю распределения Райса — распределению Рэлея, или, другими словами, случаю отсутствия полезного сигнала ( $\nu = 0$ ) при наличии только шумовой составляющей. В этом случае, как легко убедиться, единственным решением уравнения (14) для параметра  $r$  является тривиальное решение:  $r = 0$ .

Во всех остальных случаях (т. е. при  $\nu \neq 0$ ) выполняется условие положительности значений коэффициента  $\beta$ :  $\beta > 0$ . С учетом того, что физически значимое искомое решение для параметра  $r$  не может быть отрицательным, из двух корней квадратного уравнения (14) остается только один. Тем самым из (14) получаем следующее единственное решение для параметра  $r$ :

$$r = 4\beta \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3\beta}} \right). \quad (16)$$

Принимая во внимание первое уравнение системы (13) с учетом (16), получим для второй искомой переменной — параметра  $\sigma$  — следующее выражение:

$$\sigma = \langle x \rangle \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} / {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}; 1; - \left[ 4\beta \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3\beta}} \right) \right] \right). \quad (17)$$

Используя выражение (17) и определение параметра  $r$  ( $r = \nu^2 / 2\sigma^2$ ), получаем следующее решение для искомого параметра полезного сигнала  $\nu$ :

$$\nu = \langle x \rangle \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} / {}_1F_1 \left( -\frac{1}{2}; 1; - \left[ 4\beta \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3\beta}} \right) \right] \right) \cdot \sqrt{\beta \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3\beta}} \right)}. \quad (18)$$

Таким образом, формулы (17) и (18) представляют собой аналитическое решение задачи в рассматриваемом предельном случае малого отношения сигнала к шуму: рассчитывая коэффициент  $\beta$  на основе выборочных измерений первого ( $\langle x \rangle$ ) и третьего ( $\langle x^3 \rangle$ ) начальных моментов анализируемой величины, по формулам (17) и (18) можно рассчитать искомые значения параметров сигнала  $\nu$  и шума  $\sigma$ .

## 5. Результаты численного моделирования

В данном параграфе приведены результаты компьютерного моделирования представленного выше математического метода определения параметров сигнала и шума анализируемых данных в условиях распределения Райса на основе метода моментов ММ13. Представленные графические данные позволяют проиллюстрировать возможность и точность расчета величины полезного сигнала и дисперсии шума разработанным методом, а также отображают существенную зависимость точности расчета искомых параметров от величины отношения сигнала к шуму и от длины выборки измерений.

Численный эксперимент проводился следующим образом. Генерировались данные, подчиняющиеся распределению Райса, на двумерной сетке, узлы которой соответствуют различным исходно заданным значениям параметров сигнала  $\nu$  и стандартного отклонения  $\sigma$ . С использованием выборки значений сигнала в каждой точке сетки вычислялись расчетные значения вышеуказанных параметров на основе разработанного алгоритма, т. е. путем решения уравнений (7)–(9).

На рис. 1 и рис. 2 представлены графики, полученные в результате расчета данных для параметра сигнала  $\nu$  (рис. 1, а, б) и параметра шума  $\sigma$  (рис. 2, а, б) при различных значениях длины выборки  $n$ . При этом исходные значения величин обоих параметров,  $\nu$  и  $\sigma$ , изменялись в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2 (по оси абсцисс отмечены точки отсчета). Длина выборки  $n$  измерений случайного сигнала в представленных вариантах расчетов составляла, соответственно,  $n = 8$  (рис. 1, а, рис. 2, а) и  $n = 16$  (рис. 1, б, рис. 2, б). Представленные графики соответствуют данным вычислений искомых параметров, усредненным по 50 выборкам (в реальных системах цифровой обработки сигналов число усредняемых выборок составляет, как правило,  $10^3 \sim 10^4$ ).

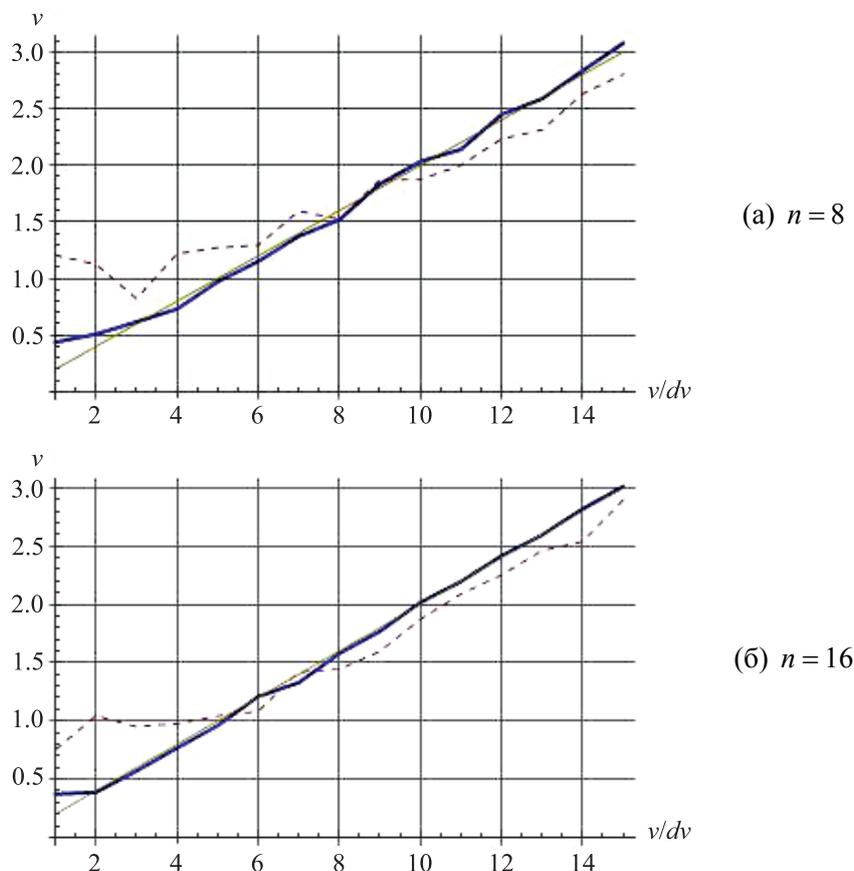


Рис. 1. Результаты численного расчета параметра  $\nu$

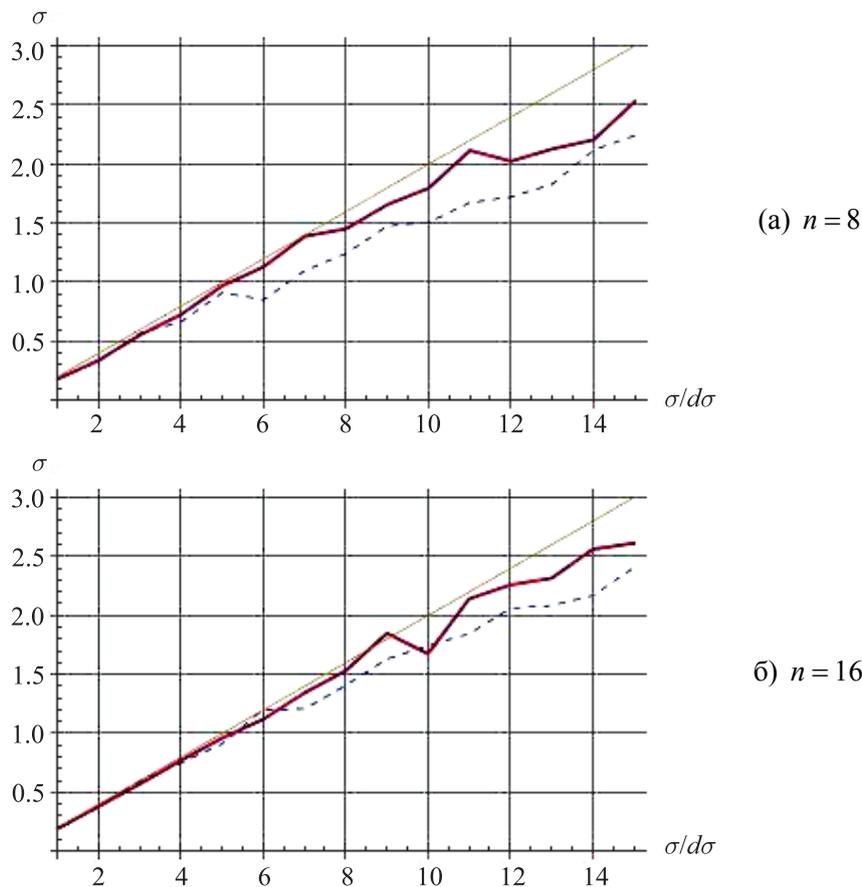


Рис. 2. Результаты численного расчета параметра  $\sigma$

На рис. 1 представлены результаты численного расчета величины полезного сигнала  $\nu$  посредством двухпараметрического метода моментов ММ13 при различных значениях дисперсии шума. Показаны зависимости отклонений расчетных значений параметра  $\nu$  от реальной, исходно заданной величины этого параметра при различных исходных значениях параметра  $\sigma$ . Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра  $\nu$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра. Таким образом, отклонения ломаных сплошной и пунктирной линий от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. Сплошные линии на рис. 1, а и рис. 1, б соответствуют величине параметра шума  $\sigma = 0.6$ , а пунктирные линии соответствуют  $\sigma = 1.5$ . Представленные графики отображают ожидаемую зависимость точности расчетов по методу ММ13 как от длины выборки, так и от значения отношения сигнала к шуму: с ростом параметра  $\nu$  (при перемещении слева направо вдоль расчетных кривых) происходит увеличение отношения сигнала к шуму, и точность расчетов заметно растет.

На рис. 2 представлены результаты численного расчета параметра шума  $\sigma$  методом ММ13 при различных значениях величины полезного сигнала, показаны зависимости отклонений расчетных значений параметра стандартного отклонения  $\sigma$  от реальных, исходно заданных значений этого параметра при различных значениях исходной величины полезного сигнала  $\nu$ . Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра  $\sigma$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра, т. е. отклонения ломаных сплошной и пунктирной линий от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. Сплошные и пунктирные линии на рис. 2, а и рис. 2, б получены для значений  $\nu = 3.0$  и  $\nu = 1.5$  соответственно. Как и в случае расчета полезного сигнала, точ-

ность расчета величины шума  $\sigma$  существенно зависит как от длины выборки, так и от значения отношения сигнала к шуму.

Таким образом, из представленных результатов численного моделирования метода ММ13 следует ожидаемый вывод: с ростом величины отношения сигнала к шуму точность расчета статистических параметров задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$  заметно растет, причем диапазон относительно высокой точности вычислений, обеспечиваемых методом ММ13, определяется условием  $\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ .

Развитый в настоящей работе метод ММ13 расчета параметров сигнала и шума на основе метода нечетных моментов низших порядков расширяет группу методов двухпараметрического анализа райсовских данных, ранее развитых автором настоящей статьи [Яковлева, 2014; Яковлева, 2016]. При этом преимуществом метода ММ13 для практических приложений является тот факт, что при относительной несложности расчетов данный метод, работая на основе измеренных данных для моментов низших порядков, требует меньшего количества численных операций по возведению измеряемой величины анализируемого сигнала в степень и, таким образом, обеспечивает более высокое быстродействие и лучшую точность, так как выполнение каждой дополнительной численной операции неизбежно приводит к снижению точности вычислений.

Сопоставление вариантов метода моментов ММ13 и ММ24 иллюстрируется графиками на рис. 3 и рис. 4.

На рис. 3 и рис. 4 представлены графические данные численных экспериментов, выполненных с целью сопоставления точности метода ММ13 и метода ММ24 [Яковлева, 2014], который также является достаточно простым по объему вычислений, но связан с измерениями моментов более высоких порядков.

На рис. 3 представлены результаты численного расчета параметра полезного сигнала  $\nu$  посредством методов ММ13 и ММ24 при заданном значении параметра шума  $\sigma = 1.5$  и длине выборки  $n = 8$ : сплошная ломаная линия соответствует расчету параметра полезного сигнала  $\nu$  методом ММ13, а пунктирная линия соответствует методу ММ24. При этом исходно заданные значения  $\nu$  изменялись в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2 (по оси абсцисс отмечены точки отсчета), длина выборки  $n$  измерений случайного сигнала составляла  $n = 16$ , величина параметра шума (стандартного отклонения) составляла  $\sigma = 1.5$ . Как видно из представленных графиков, при малых значениях отношения сигнала к шуму метод ММ13 обеспечивает более высокую точность расчетов искомого параметра по сравнению с методом ММ24, что согласуется с вышеизложенными соображениями. Аналогично: на рис. 4 представлены графические результаты численного расчета параметра шума  $\sigma$  сопоставляемыми методами ММ13 и ММ24 при заданном значении параметра полезного сигнала  $\nu = 3.0$  и длине выборки  $n = 8$ .

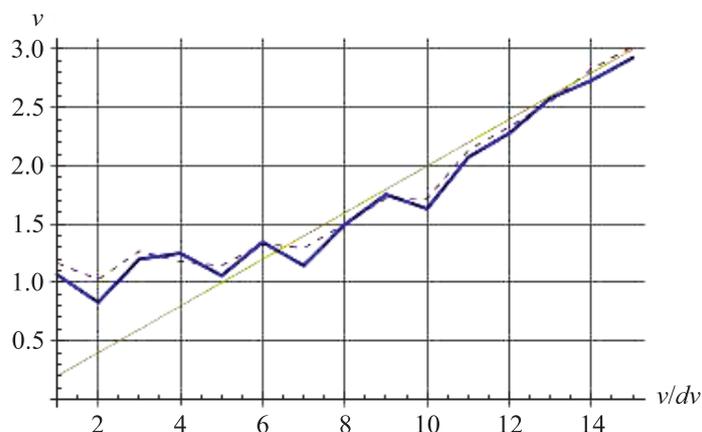
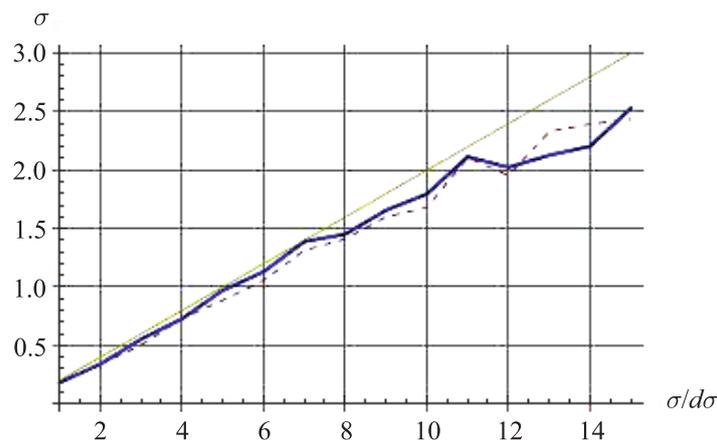


Рис. 3. Сопоставление точности расчета параметра  $\nu$  методами ММ13 и ММ24

Рис. 4. Сопоставление точности расчета параметра  $\sigma$  методами ММ13 и ММ24

## 6. Заключение

В работе развит, обоснован и проанализирован новый математический метод для расчета параметров сигнала и шума при анализе стохастических данных в условиях распределения Райса, основанный на измерениях начальных моментов анализируемой райсовской величины 1-го и 3-го порядков. Получена в явном виде система уравнений для искомым параметров. Система двух существенно нелинейных уравнений с двумя неизвестными сведена к одному уравнению с одной неизвестной величиной. Тем самым решение двухпараметрической задачи сведено к решению однопараметрической задачи, что означает существенное снижение требований к необходимым вычислительным ресурсам.

Развитый в работе метод представляет собой эффективный инструмент в решении задач разделения информативной и шумовой составляющих при обработке данных, в частности изображений, обрабатываемых на основе анализа огибающей (или амплитуды) сигнала и тем самым подчиняющихся статистическому распределению Райса.

Теоретические выводы работы подтверждаются представленными результатами численных экспериментов, которые демонстрируют возможность вычисления искомым параметров сигнала  $\nu$  и шума  $\sigma^2$  на основе данных выборок измерений с достаточно высокой точностью, причем диапазон относительно высокой точности вычислений определяется условием

$$\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2.$$

## Список литературы (References)

- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.  
*Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Applied Mathematics Series 55. Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. (Russ. ed.: Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po special'nym funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979).*
- Яковлева Т. В. Обзор методов обработки магнитно-резонансных изображений и развитие нового двухпараметрического метода моментов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 231–244.  
*Yakovleva T. V. Obzor metodov obrabotki magnitno-rezonansnykh izobrazhenij i razvitie novogo dvuxparametričeskogo metoda momentov [Review of MRI processing techniques and elaboration of a new two-parametric method of moments] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, no. 2. — P. 231–244 (in Russian).*

- Яковлева Т. В.* Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 3. — С. 445–473.
- Yakovleva T. V.* Teoreticheskoe obosnovanie matematicheskikh metodov sovmestnogo otseivnaniya parametrov signala i shuma pri analize raisovskih dannyh [Theoretical substantiation of the mathematical techniques for joint signal and noise estimation at rician data analysis] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, no. 3. — P. 445–473 (in Russian).
- Benedict T. R., Soong T. T.* The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. — Jul. 1967. — Vol. IT-13, no. 3. — P. 447–454.
- Carobbi C. F. M., Cati M.* The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — April 2008. — Vol. 57, no 4. — P. 682–689.
- Park J. H., Jr.* Moments of generalized Rayleigh distribution // Q. Appl. Math. — 1961. — Vol. 19, no. 1. — P. 45–49.
- Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.
- Sijbers J, den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V.* Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // IEEE Transactions on Medical Imaging. — June 1998. — Vol. 17, no. 3. — P. 357–361.
- Talukdar K. K., Lawing W. D.* Estimation of the parameters of Rice distribution // J. Acoust. Soc. Amer. — Mar. 1991. — Vol. 89, no. 3. — P. 1193–1197.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2013. — Vol. 2, no. 3. — P. 67–79.