

УДК: 517:957

## Бегущие волны в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности

Ю. А. Хазова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,  
Россия, 295007, г. Симферополь, просп. Академика Вернадского, д. 4  
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

*Получено 26.05.2017, после доработки — 03.07.2017.*

*Принято к публикации 04.08.2017.*

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей.

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью является нелинейное параболическое уравнение с преобразованием поворота пространственной переменной и условиями периодичности на окружности.

Исследуются вопросы бифуркации рождения стационарных структур типа бегущей волны, эволюции их форм при уменьшении бифуркационного параметра (коэффициента диффузии) и динамики их устойчивости при отходе от критического значения параметра бифуркации и дальнейшем его уменьшении. Впервые в качестве бифуркационного параметра был взят коэффициент диффузии.

В работе используются метод центральных многообразий и метод Галёркина. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании, форме и устойчивости решения типа бегущей волны в окрестности бифуркационного значения коэффициента диффузии. Получено представление первой бегущей волны, рождающейся в результате бифуркации Андронова – Хопфа при переходе бифуркационного параметра через критическое значение. Согласно теореме о центральном многообразии первая бегущая волна рождается орбитально устойчивой.

Поскольку доказанная теорема дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра, то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности был использован формализм метода Галёркина. В соответствии с методом центральных многообразий составлена галёркинская аппроксимация приближенных решений поставленной задачи. При уменьшении параметра бифуркации и его переходе через критическое значение нулевое решение задачи теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Эта волна рождается орбитально устойчивой. При дальнейшем уменьшении параметра и его прохождении через следующее критическое значение от нулевого решения в результате бифуркации Андронова – Хопфа рождается второе решение типа бегущей волны. Данная волна рождается неустойчивой, с индексом неустойчивости два.

Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами, и могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью.

**Ключевые слова:** параболическая задача, бифуркация, устойчивость, бегущая волна, метод центральных многообразий, метод Галёркина

Исследование выполнено при поддержке Программы развития федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского» на 2015–2024 годы по проекту «Сеть академической мобильности «Академическая мобильность молодых ученых России» в 2016 году на базе ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН», лаборатория дифференциальных и разностных уравнений.

UDC: 517:957

## Traveling waves in a parabolic problem with a rotation on the circle

Yu. A. Khazova

V. I. Vernadsky Crimean Federal University,  
Vernadskogo Prospekt 4, Simferopol, 295007, Russia  
E-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

*Received 26.05.2017, after completion — 03.07.2017.*

*Accepted for publication 04.08.2017.*

Optical systems with two-dimensional feedback demonstrate wide possibilities for studying the nucleation and development processes of dissipative structures. Feedback allows to influence the dynamics of the optical system by controlling the transformation of spatial variables performed by prisms, lenses, dynamic holograms and other devices. A nonlinear interferometer with a mirror image of a field in two-dimensional feedback is one of the simplest optical systems in which is realized the nonlocal nature of light fields.

A mathematical model of optical systems with two-dimensional feedback is a nonlinear parabolic equation with rotation transformation of a spatial variable and periodicity conditions on a circle. Such problems are investigated: bifurcation of the traveling wave type stationary structures, how the form of the solution changes as the diffusion coefficient decreases, dynamics of the solution's stability when the bifurcation parameter leaves the critical value. For the first time as a parameter bifurcation was taken of diffusion coefficient.

The method of central manifolds and the Galerkin's method are used in this paper. The method of central manifolds and the Galerkin's method are used in this paper. The method of central manifolds allows to prove a theorem on the existence and form of the traveling wave type solution neighborhood of the bifurcation value. The first traveling wave born as a result of the Andronov–Hopf bifurcation in the transition of the bifurcation parameter through the critical value. According to the central manifold theorem, the first traveling wave is born orbitally stable.

Since the above theorem gives the opportunity to explore solutions are born only in the vicinity of the critical values of the bifurcation parameter, the decision to study the dynamics of traveling waves of change during the withdrawal of the bifurcation parameter in the supercritical region, the formalism of the Galerkin method was used. In accordance with the method of the central manifold is made Galerkin's approximation of the problem solution. As the bifurcation parameter decreases and its transition through the critical value, the zero solution of the problem loses stability in an oscillatory manner. As a result, a periodic solution of the traveling wave type branches off from the zero solution. This wave is born orbitally stable. With further reduction of the parameter and its passage through the next critical value from the zero solution, the second solution of the traveling wave type is produced as a result of the Andronov–Hopf bifurcation. This wave is born unstable with an instability index of two.

Numerical calculations have shown that the application of the Galerkin's method leads to correct results. The results obtained are in good agreement with the results obtained by other authors and can be used to establish experiments on the study of phenomena in optical systems with feedback.

**Keywords:** parabolic problem, bifurcation, stability, traveling wave, method central manifolds, Galerkin's method

**Citation:** *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 5, pp. 705–716 (Russian).

The research was carried out with the support of the Academic Mobility Network “Academic Mobility of Young Scientists of Russia” by V. I. Vernadsky Crimean Federal University on the basis by Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Laboratory of Differential and Difference Equations in 2016 year.

## Введение

В оптических системах с обратной связью реализуются два типа взаимодействия поля: локальное, связанное с диффузией частиц нелинейной среды и самовоздействием поля, и крупномасштабное, вызванное преобразованием поперечных пространственных аргументов поля внутри резонатора, например, поворотом на угол  $h$ , сжатием или отражением пространственной переменной в контуре обратной связи [Белан, Хазова, 2014; Хазова, 2014; Хазова, 2015а; Хазова, 2015b]. Как следует из эксперимента, описанного в работах [Ахманов и др., 1990; Воронцов, Железных, 1990], наличие крупномасштабного взаимодействия существенно обогащает пространственно-временную динамику фазовой модуляции. Варьированием угла поворота  $h$  аргументов в контуре обратной связи можно добиться визуализации различных типов вращающихся пространственно неоднородных структур, наблюдать изменение их количества и при определенных условиях — переход к оптическому хаосу. Для исследования наблюдаемых явлений могут быть использованы различные подходы. Одним из них является метод, основанный на анализе «в целом» динамики семейства траекторий, выходящих из некоторого ограниченного в том или ином пространстве множества начальных данных. Отметим, что к глобальному аттрактору притягиваются множества траекторий динамической системы при больших значениях времени. Однако глобальный аттрактор динамических систем шире множества физически реализующихся при больших временах предельных режимов. Поэтому наряду с глобальным анализом поведения системы важно выделить характерные типы наблюдаемых решений, а также выяснить причины возникновения того или иного типа решений. Один из подходов к решению намеченной проблемы — локальный анализ [Разгулин, 2008], основанный на линеаризации задачи в окрестности какого-либо известного решения, например пространственно однородного стационарного решения. Такие автоколебания при определенных условиях возбуждались из стационарного состояния при изменении параметров модели, что свидетельствует о бифуркационной природе их возникновения. Для исследования бифуркационных автоколебаний может быть использована методика, основанная на построении иерархии упрощенных математических моделей в окрестности точки бифуркации. Построение разложений периодических решений в такого рода задачах основано на методах центрального многообразия [Белан, 2004; Белан, 2009] и методе Галёркина [Хазова, 2014; Хазова, 2015а].

Для описания различных автоволновых процессов, протекающих в нелинейном интерферометре (т. е. нелинейная оптическая система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи), может быть использована одномерная по пространству модель

$$v_t + v = \mu \Delta v + K(1 + \gamma \cos Qv(\varphi, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$v(\varphi + 2\pi, t) = v(\varphi, t). \quad (2)$$

Такая постановка задачи использовалась в работах А. В. Разгулина, например [Разгулин, 2008]. Краевая задача (1)–(2) моделирует динамику фазовой модуляции  $v(\varphi, t)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $t > 0$ , световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием поворота координат в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь  $\mu$  — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент  $K$  пропорционален интенсивности входного поля,  $\gamma$  — видность (контрастность) интерференционной картины,  $0 < \gamma < 1$ ,  $Qv(\varphi) = v(\varphi + h)$  — оператор поворота на угол  $h$ .

Особенностью данной задачи является наличие пространственно однородного решения, описывающего невозмущенное распределение фазовой модуляции. При изменении параметров модели, например при уменьшении коэффициента диффузии нелинейной среды и, соответственно, изменении коэффициента  $\mu$ , это решение теряет устойчивость. Наличие поворота координат

позволяет промоделировать ситуацию, когда такая потеря устойчивости происходит колебательным образом. В результате возбуждается бегущая волна, скорость вращения которой и ее пространственный масштаб могут быть предсказаны и проанализированы на основе теории бифуркаций. При определенных условиях на параметры задачи будут рассмотрены вопросы существования, единственности и устойчивости периодического пространственно неоднородного решения, ответвляющегося от пространственно однородного стационарного решения в результате бифуркации Андронова – Хопфа. Это пространственно однородное решение  $v(\varphi, t) = \omega$  определяется из уравнения

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega). \quad (3)$$

С ростом  $K$  количество корней этого уравнения неограниченно растет, причем при  $K \rightarrow \infty$  их состав постоянно меняется: возникают новые состояния равновесия и исчезают старые. Поэтому фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K, \gamma), \quad 1 + K\gamma \sin \omega(K, \gamma) \neq 0, \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем (1)–(2) на выбранном  $\omega(K, \gamma)$ :  $v = u + \omega$ .

В результате получаем уравнение на окружности  $S^1$ :

$$u_t = \mu \Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6} Qu^3, \quad (5)$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t), \quad (6)$$

где  $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin \omega$ ,  $Qu(\varphi) = u(\varphi + \frac{2\pi}{3})$  — оператор поворота на угол  $h = \frac{2\pi}{3}$ .

Здесь  $\mu$  — бифуркационный параметр,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

**Лемма 1.** Собственными функциями оператора  $L(\mu)u = \mu \Delta u - u - \Lambda Qu$ , рассматриваемого в качестве линейного оператора на пространстве  $L_2(S^1)$ , и областью определения  $H^2(S^1)$  (норма задается формулой  $\|u\|_2^2 = \langle (-\Delta)^2 u, u \rangle + \langle u, u \rangle$ ) являются функции  $e^{ik\varphi}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , с соответствующими собственными числами  $\lambda_k(\mu) = -1 - k^2\mu - \Lambda e^{ik\frac{2\pi}{3}}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Интерес представляет случай, когда при уменьшении бифуркационного параметра  $\mu$  знак собственных чисел  $\lambda_k(\mu)$  может поменять знак. Поэтому справедливо следующее условие:  $\Lambda > 1$ .

Существует значение параметра  $\mu = \mu^*$  такое, что при  $\mu > \mu^*$  нулевое решение задачи (5)–(6) экспоненциально устойчиво. При уменьшении  $\mu$  и его прохождении через  $\mu^*$  нулевое решение задачи (5)–(6) теряет устойчивость. Пара комплексно сопряженных точек спектра проходит через мнимую ось с ненулевой скоростью. В результате от нулевого решения бифурцирует однопараметрическое семейство периодических решений типа бегущих волн.

## Применение метода центральных многообразий

Воспользуемся для построения бегущих волн и их представления методом центральных многообразий [Марсден, Мак-Кракен, 1980; Хенри, 1985]. Построим решение (5)–(6) в виде

$$u(\varphi, t) = ze^{i\varphi} + \bar{z}e^{-i\varphi} + \sigma_3(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi}) + \sigma_5(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi}) + \dots, \quad (7)$$

где  $z = z(t)$ ,  $\bar{z} = \bar{z}(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\lambda_1(\mu) + c_3|z|^2 + c_5|z|^4 + \dots)z, \\ \dot{\bar{z}} &= (\bar{\lambda}_1(\mu) + \bar{c}_3|\bar{z}|^2 + \bar{c}_5|\bar{z}|^4 + \dots)\bar{z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь черта над символом обозначает комплексное сопряжение,  $\sigma_3(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi})$ ,  $\sigma_5(ze^{i\varphi}, \bar{z}e^{-i\varphi})$  — форма 3-й, 5-й степени относительно  $z, \bar{z}$ . Будем обозначать  $z(t, \mu) = z(\mu)$ ,  $\bar{z}(t, \mu) = \bar{z}(\mu)$ . Подставим (7), (8) в (5) и затем в полученном равенстве сделаем замену  $ze^{i\varphi} \rightarrow z$ . В результате относительно  $\sigma_3$  приходим к уравнению

$$(c_3 z + \bar{c}_3 \bar{z})|z|^2 + B(\mu)\sigma_3 = \bar{Q}(z + \bar{z})^3. \quad (9)$$

Здесь  $\bar{Q}z^\alpha \bar{z}^{-\beta} = z^\alpha \bar{z}^{-\beta} e^{i(\alpha-\beta)\frac{2\pi}{3}}$ . Оператор  $B(\mu)$  на пространстве многочленов относительно  $z, \bar{z}$  является диагональным оператором

$$B(\mu)z^\alpha \bar{z}^{-\beta} = (\lambda_1 \alpha + \bar{\lambda}_1 \beta - \lambda_{\alpha-\beta})z^\alpha \bar{z}^{-\beta}, \quad (10)$$

$\lambda_{-s} = \bar{\lambda}_s, s > 0$ . Из условия разрешимости уравнения (9) следует, что

$$c_3 = \frac{\Lambda}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \bar{c}_3 = \frac{\Lambda}{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}}. \quad (11)$$

Очевидно, что  $\operatorname{Re} c_3 < 0, \operatorname{Re} \bar{c}_3 < 0$ . В этом случае уравнение (9) очевидно разрешимо:

$$\sigma_3 = \frac{\Lambda}{6} \left( \frac{z^3(\mu)e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\bar{z}^3(\mu)e^{-3i\varphi}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3} \right). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь уравнение относительно  $\sigma_5$ :

$$(c_5 z + \bar{c}_5 \bar{z})|z|^4 + B(\mu)\sigma_5 = P_5 \bar{Q}(z + \bar{z} + \sigma_3(z, \bar{z}))^3 - \left( \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} c_1 z + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \bar{z}} \bar{c}_1 \bar{z} \right) |z|^2. \quad (13)$$

Здесь  $P_5$  — проектор в пространстве многочленов относительно  $z, \bar{z}$  формы степени 5 (проектор на пространство однородных многочленов порядка 5). Из условия разрешимости  $\sigma_5$  в классе гладких по параметру  $\mu$  функций следует, что

$$c_5 = \frac{\Lambda}{2} \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3\lambda_1 - \lambda_3}, \quad \bar{c}_5 = \frac{\Lambda}{2} \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3}, \quad (14)$$

значит,

$$\sigma_5 = \frac{\Lambda}{6} \left( \frac{3z^5(\mu)e^{5i\varphi}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{(3\lambda_1 - \lambda_3)(5\lambda_1 - \lambda_5)} + \frac{3\bar{z}^5(\mu)e^{5i\varphi}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{(3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3)(5\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_5)} + \right. \\ \left. + \frac{z^4(\mu)\bar{z}(\mu)(6 - 9e^{i\frac{2\pi}{3}})e^{3i\varphi}}{(3\lambda_1 - \lambda_3)(4\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 - \lambda_3)} + \frac{z(\mu)\bar{z}^4(\mu)(6 - 9e^{-i\frac{2\pi}{3}})e^{-3i\varphi}}{(3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3)(4\bar{\lambda}_1 + \lambda_1 - \lambda_3)} \right). \quad (15)$$

Подставим теперь в (8) найденные согласно (11), (14) значения  $c_3, c_5$  и опустим затем остальные слагаемые. Тогда периодическим решением, ответвляющимся от нуля при переходе через критическое бифуркационное значение  $\mu^*$ :  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu_1^*) = 0$ , является

$$z_1 = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t},$$

где  $\rho_1(\mu) > 0$  — непрерывная ветвь решений уравнения

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Re} c_3 \rho_1^2(\mu) + \operatorname{Re} c_5 \rho_1^4(\mu) = 0, \\ \omega_1(\mu) = \operatorname{Im} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Im} c_3 \rho_1^2(\mu) + \operatorname{Im} c_5 \rho_1^4(\mu).$$

В результате приближенным периодическим решением исходной задачи, ответвляющимся от нуля при прохождении параметра  $\mu$  через  $\mu^*$ , является

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu)e^{i\omega_1(\mu)t}e^{i\varphi} + \rho_1(\mu)e^{-i\omega_1(\mu)t}e^{-i\varphi} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu)e^{3i\omega_1(\mu)t}e^{3i\varphi}}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu)e^{-3i\omega_1(\mu)t}e^{-3i\varphi}}{2(3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3)} + \dots$$

Таким образом, сформулируем теорему.

**Теорема 1.** Существует такое  $\delta_0 > 0$ , что если  $0 < \mu^* - \mu < \delta_0$ , где  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu_1^*) = 0$ , то задача (5)–(6) имеет решение типа бегущей волны:

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t} e^{i\varphi} + \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t} e^{-i\varphi} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{3i\omega_1(\mu)t} e^{3i\varphi}}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\Lambda \rho_1^3(\mu) e^{-3i\omega_1(\mu)t} e^{-3i\varphi}}{2(3\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_3)} + \dots, \quad (16)$$

$\rho_1(\mu) > 0$  является положительным корнем уравнения

$$\operatorname{Re} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Re} c_3 \rho_1^2(\mu) + \operatorname{Re} c_5 \rho_1^4(\mu) = 0, \quad (17)$$

$$\omega_1(\mu) = \operatorname{Im} \lambda_1(\mu) + \operatorname{Im} c_3 \rho_1^2(\mu) + \operatorname{Im} c_5 \rho_1^4(\mu). \quad (18)$$

Решения  $u(\varphi, t)$  экспоненциально орбитально устойчивы.

### Схема аппроксимации параболической задачи с преобразованием поворота пространственной переменной

Поскольку теорема 1 дает возможность исследовать рожденные решения только в окрестности критического значения бифуркационного параметра  $\mu$ , то для изучения динамики изменений решения типа бегущей волны при отходе бифуркационного параметра в область надкритичности воспользуемся формализмом метода Галёркина.

В соответствии с методом центральных многообразий будем использовать галёркинскую аппроксимацию в таком виде:

$$u = \sum_{k=1}^N (x_k e^{ik\varphi} + \bar{x}_k e^{-ik\varphi}). \quad (19)$$

Подставим (19) в (5) и затем в полученном равенстве приравняем коэффициенты при  $e^{\pm ik\varphi}$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_k z_k + g_k(z, \bar{z}), \\ \dot{\bar{x}}_k &= \bar{\lambda}_k \bar{z}_k + \bar{g}_k(z, \bar{z}), \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $z = (z_1, \dots, z_N)$ ,  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$ ,  $g_k, \bar{g}_k$  — формы 3-й степени относительно  $(z, \bar{z})$ ,  $\lambda_k = \lambda_k(\mu)$ .

При уменьшении параметра  $\mu$  и его переходе через критическое значение  $\mu_1^*$  такое, что  $\operatorname{Re} \lambda_1(\mu_1^*) = 0$ , нулевое решение (5)–(6) теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нулевого решения (5)–(6) ответвляется периодическое решение типа бегущей волны. Для построения указанного решения (5)–(6) воспользуемся системой (20), в которой нулевое решение теряет устойчивость при уменьшении  $\mu$  и его прохождении через  $\mu_1^*$ . Построим это решение в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad x_3 = \rho_3 e^{i(3\varphi_1 + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5 e^{i(5\varphi_1 + \alpha_5)}, \\ \rho_k &= \rho_k(t, \mu), \quad \varphi_1 = \varphi_1(t, \mu) \end{aligned} \quad (21)$$

и соответствующие им комплексные переменные  $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$ . Остальные компоненты в (20) положим нулевыми. В полученной после подстановки (21) в (20) системе находим стационарные  $\rho_k > 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\alpha_3, \alpha_5$  и  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1(\mu)$ . Следовательно, система (20) имеет периодическое решение

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)t}, \quad x_3 = \rho_3(\mu) e^{i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad x_5 = \rho_5(\mu) e^{i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}, \\ \bar{x}_1 &= \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)t}, \quad \bar{x}_3 = \rho_3(\mu) e^{-i(3\omega_1(\mu)t + \alpha_3)}, \quad \bar{x}_5 = \rho_5(\mu) e^{-i(5\omega_1(\mu)t + \alpha_5)}. \end{aligned} \quad (22)$$



Подставив (22) в (19), получим приближенное периодическое решение (19) типа «бегущая волна». Это решение рождается орбитально устойчивым периодическим решением.

При уменьшении  $\mu$  и его прохождении через следующее значение  $\mu_2^*$ :  $\operatorname{Re} \lambda_2(\mu_2^*) = 0$  от нулевого решения (5)–(6) в результате бифуркации типа Андронова–Хопфа рождается второе решение типа «бегущая волна». Для построения указанного периодического решения вновь переходим к (20) и строим эти решения в виде

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho_2 e^{i2\varphi_2}, & x_6 &= \rho_6 e^{i(6\varphi_2+\beta_3)}, & x_{10} &= \rho_{10} e^{i(10\varphi_2+\beta_5)}, \\ \rho_k &= \rho_k(t, \mu), & \varphi_2 &= \varphi_2(t, \mu) \end{aligned} \quad (23)$$

и соответствующие им комплексные переменные  $\bar{x}_2, \bar{x}_6, \bar{x}_{10}$ . Остальные компоненты в (20) полагаются нулевыми. В полученной системе относительно  $\rho_2, \rho_6, \rho_{10}$  находим стационарные  $\rho_k = \rho_k(\mu) > 0, k = 2, 6, 10; \beta_3, \beta_5$  и  $\dot{\varphi}_2 = \omega_2(\mu)$ . Следовательно, система (20) имеет периодическое решение при  $\mu < \mu_2^*$  вида

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho_2(\mu) e^{i2\omega_2(\mu)t}, & x_6 &= \rho_6(\mu) e^{i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, & x_{10} &= \rho_{10}(\mu) e^{i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)}, \\ \bar{x}_2 &= \rho_2(\mu) e^{-i2\omega_2(\mu)t}, & \bar{x}_6 &= \rho_6(\mu) e^{-i(6\omega_2(\mu)t+\beta_3)}, & \bar{x}_{10} &= \rho_{10}(\mu) e^{-i(10\omega_2(\mu)t+\beta_5)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение (24) системы (20) рождается неустойчивым, с индексом неустойчивости 2.

Обратимся к вопросу о динамике устойчивости решения (24) при уменьшении  $\mu$ . Для этого перейдем к анализу линеаризованной в окрестности периодического решения (24) системе (20). Для получения этой линеаризованной системы линеаризуем исходное уравнение (5)–(6) на найденном периодическом решении (24). В результате получим

$$\dot{u} = \mu \Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{2} Qu_2^2 \cdot Qu, \quad (25)$$

где  $u_2$  — вторая бегущая волна.

Отметим, что ключевую роль в анализе динамики устойчивости играют переменные  $x_1, x_3, x_5$  и сопряженные с ними  $\bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_5$ . Проведенная линеаризация приводит относительно этих переменных к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_1 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} \bar{x}_3 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)} \bar{x}_3 + \right. \\ &\quad \left. + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(2\omega_2 t+\beta_5-\beta_3)} \bar{x}_3 + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(-2\omega_2 t-\beta_5+\beta_3)} x_5 \right) e^{i\frac{2\pi}{3}}, \\ \dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_3 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} \bar{x}_1 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)} x_1 + \right. \\ &\quad \left. + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(2\omega_2 t+\beta_5-\beta_3)} x_1 + 6\rho_2 \rho_{10} e^{i(-4\omega_2 t-\beta_5)} x_5 \right) e^{3i\frac{2\pi}{3}}, \\ \dot{x}_5 &= \lambda_5 x_5 + \left( (6\rho_2^2 + 6\rho_6^2 + 6\rho_{10}^2)x_5 + 3\rho_2^2 e^{i2\omega_2 t} x_1 + 6\rho_2 \rho_6 e^{i(2\omega_2 t+\beta_3)} x_1 + 6\rho_6 \rho_{10} e^{i(4\omega_2 t+\beta_5)} y_3 \right) e^{5i\frac{2\pi}{3}}, \end{aligned}$$

кроме того, добавляются соответствующие выражения для сопряженной части. Анализ матрицы коэффициентов полученной системы и сопряженной с ней системы дает возможность ответить на вопросы об устойчивости решения (24).

## Численные результаты анализа параболической задачи

Для численных расчетов применялась модельная задача (условие  $\cos \omega = 0$ )

$$u_t = \mu \Delta u - u - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6} Qu^3, \quad t > 0,$$

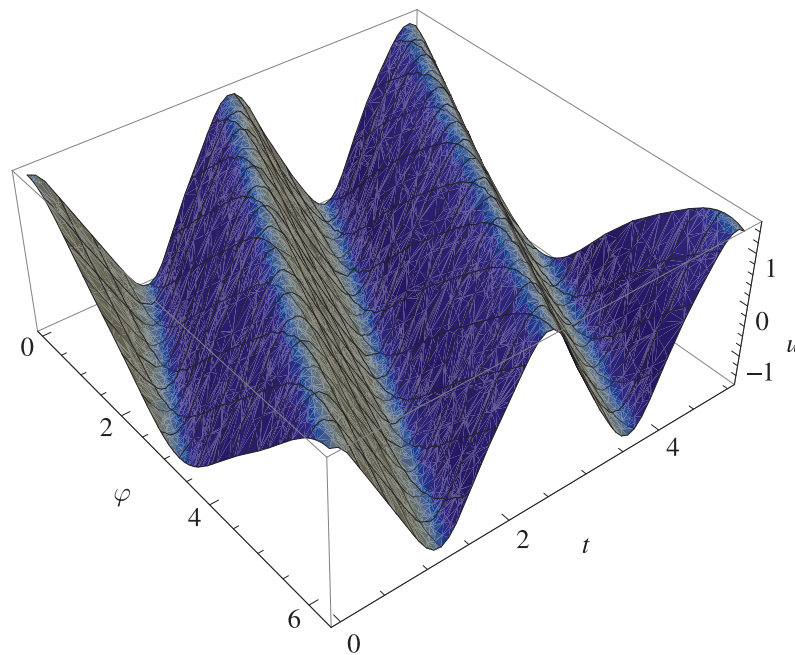


Рис. 1. Первая бегущая волна при фиксированном значении  $N = 6$ , рождающаяся орбитально устойчивой в результате бифуркации Андронова – Хопфа при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через значение  $\mu_1^* = 0.5$ ; здесь  $\varphi$  — пространственная переменная,  $t$  — переменная времени,  $u$  — значение функции  $u(\varphi, t)$

а также задача с квадратичным слагаемым

$$u_t = \mu \Delta u - u + \Lambda \frac{1}{2!} \operatorname{ctg} \omega \cdot Qu^2 - \Lambda Qu + \frac{\Lambda}{6} Qu^3, \quad t > 0,$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t),$$

где  $L = L(\mu) = -1 - \mu\Delta - \Lambda Q$ ,  $Qu(\varphi) = u(\varphi + \frac{2\pi}{3})$ .

Зафиксируем следующие переменные:  $K = 8$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $\omega = -0.675132$ ,  $\Lambda = 3$ .

Численный анализ показал, что первая бегущая волна, рождающаяся в результате бифуркации Андронова – Хопфа, при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через  $\mu_1^* = 0.5$ , рождается орбитально устойчивой. Данное решение возникает, когда собственное значение нулевого решения переходит через ноль колебательным образом. С учетом формализма метода Галёркина была проанализирована динамика изменений решения при уменьшении параметра  $\mu$ . Так, при отходе бифуркационного параметра от критического значения в область надкритичности амплитуда решения незначительно возрастает; точки отрицательного спектра возрастают и приближаются к нулю, но не переходят на положительную полуось. Максимальной точкой спектра на всем промежутке изменения параметра  $(0, \mu_1^*)$  является 0. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод, что первая бегущая волна сохраняет устойчивость на всем промежутке изменения параметра  $(0, \mu_1^*)$ .

Аналогичная ситуация наблюдается и в параболической задаче с квадратичным слагаемым.

Вторая бегущая волна рождается в результате бифуркации Андронова – Хопфа, при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через  $\mu_2^* = 0.125$ . Решение рождается неустойчивым, с индексом неустойчивости два, так как две комплексно сопряженные точки спектра имеют положительную действительную часть.

Исследование динамики спектра при уменьшении параметра  $\mu$  показало различное поведение максимальных точек спектра для задачи только с кубическим слагаемым и в задаче с квадратичным слагаемым. В задаче с кубическим слагаемым согласно анализу при уменьшении  $\mu$



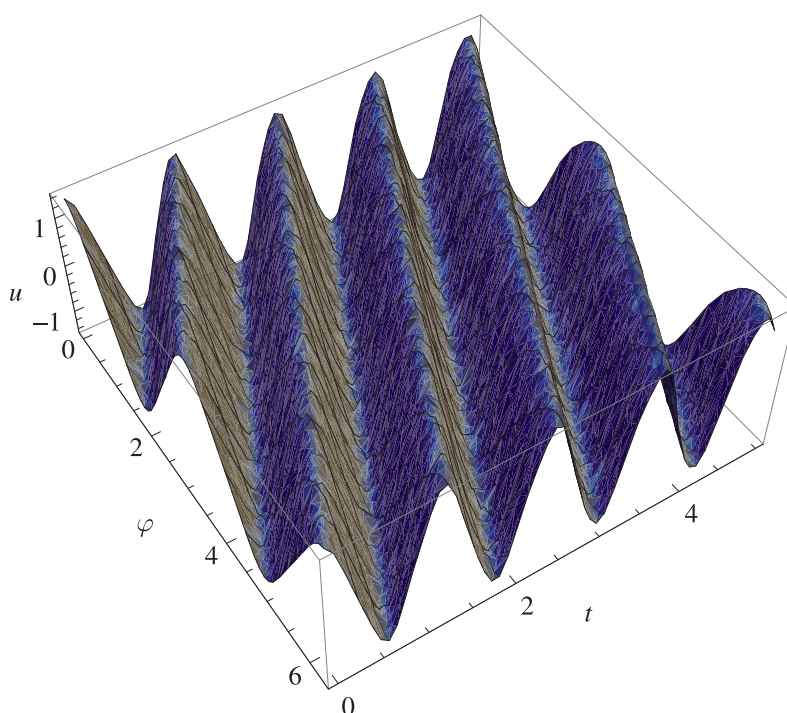


Рис. 2. Вторая бегущая волна при фиксированном значении  $N = 6$ , рождающаяся неустойчивой, с индексом неустойчивости два, в результате бифуркации Андронова – Хопфа при переходе бифуркационного параметра  $\mu$  через значение  $\mu_2^* = 0.125$ ; здесь  $\varphi$  — пространственная переменная,  $t$  — переменная времени,  $u$  — значение функции  $u(\varphi, t)$

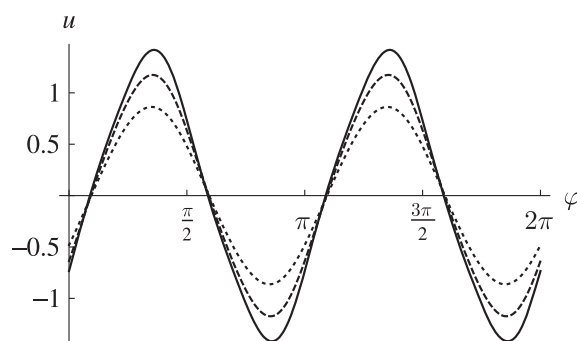


Рис. 3. График роста амплитуды второй бегущей волны при фиксированном  $N = 6$  в зависимости от уменьшения бифуркационного параметра  $\mu = 0.09, 0.06, 0.03$ ; здесь  $\varphi$  — пространственная переменная,  $u$  — значение функции  $u(\varphi, t)$

и прохождении через  $\mu_2^*$  положительная пара комплексно сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось и остается там при дальнейшем уменьшении бифуркационного параметра. Приведем в качестве примера численные результаты для  $N = 6$ ,  $\Lambda = 3$  и трех максимальных точек спектра  $\sigma(\mu)$  (комплексно сопряженная часть не приводится для упрощения):

$$\begin{aligned}\sigma(0.09) &= (\dots, -4.22893 + 0.01772I, -2.03197 + 2.10803I, 0.14313 - 2.10803I), \\ \sigma(0.07) &= (\dots, -3.68649 + 0.03473I, -1.69437 + 1.81965I, 0.025932 - 1.81965I), \\ \sigma(0.066) &= (\dots, -3.5745 + 0.03706I, -1.62682 + 1.76066I, 0.004200 - 1.76066I),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(0.065) &= (\dots, -3.54631 + 0.03753I, -1.60992 + 1.74582I, -0.001135 - 1.74582I), \\ \sigma(0.04) &= (\dots, -2.36862 - 1.52424I, -1.18399 + 1.35708I, -0.12119 - 1.35708I), \\ \sigma(0.005) &= (\dots, -1.17138 - 0.88224I, -0.52562 + 0.59945I, -0.29938 - 0.59945I).\end{aligned}$$

Здесь  $I$  — мнимая единица.

В отличие от предыдущего случая в задаче с квадратичным слагаемым положительная пара комплексно сопряженных точек спектра переходит на отрицательную полуось, некоторый промежуток изменения бифуркационного параметра точки остаются отрицательными, а потом снова возвращаются на положительную полуось. Приведем три максимальные точки спектра  $\sigma(\mu)$  (комплексно сопряженная часть не приводится для упрощения):

$$\begin{aligned}\sigma(0.12) &= (\dots, -4.79542 + 0.0058I, -2.64144 + 2.35328I, 0.24226 - 2.35328I), \\ \sigma(0.11) &= (\dots, -4.11974 + 0.06803I, -2.68903 + 1.84516I, -0.00413 - 1.8451I), \\ \sigma(0.024) &= (\dots, -2.3175 - 0.46781I, -0.01396 + 2.30471I, -0.17114 + 0.24031I), \\ \sigma(0.023) &= (\dots, 0.02288 + 2.34477I, -2.27568 - 0.47206I, -0.17476 + 0.23435I), \\ \sigma(0.01) &= (\dots, 0.53069 + 2.90497I, -1.73759 - 0.52668I, -0.2506 + 0.1267I).\end{aligned}$$

Такое поведение точек спектра дает возможность сделать вывод, что в системе реализуется бифуркация рождения семейства двуметрических торов. Дальнейший анализ поведения рожденных торов является более сложной задачей.

## Заключение

Для параболического уравнения с поворотом пространственной переменной на окружности рассмотрены вопросы о существовании, форме и устойчивости решений типа бегущих волн. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о существовании решения типа бегущих волн. В параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности найдены решения типа бегущей волны, рождающиеся в результате бифуркации Андронова – Хопфа. С использованием формализма метода Галёркина исследована динамика изменений рожденных решений при изменении бифуркационного параметра (уменьшении и отходе от бифуркационного значения в область надкритичности). Исследованы первая устойчивая и вторая неустойчивая бегущие волны. Для анализа устойчивости решения типа бегущей волны использовалась линеаризация в окрестности периодического решения. Численные расчеты с помощью пакета Mathematica показали, что применение метода Галёркина приводит к качественно и количественно правильным результатам. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами, и могут быть использованы для постановки экспериментов по изучению явлений в оптических системах с обратной связью.

## Список литературы (References)

- Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
- Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures // J. Optical Soc. Amer. Ser. B. — 1992. — Vol. 9, no. 1. — P. 78–90. (Russ. ed.: Akhmanov S. A., Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu. Generaciya struktur v opticheskikh sistemah s dvumernoy obratnoy svyazyu. — Moscow: Nauka, 1990. — P. 263–325.)

- Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 645–654.  
*Belan E. P. O vzaimodeystvii begushih voln v parabolicheskom funkcionalno-differencialnom uravnenii* [About the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation] // Differencialnie uravneniya. — 2004. — Vol. 40, no. 5. — P. 645–654 (in Russian).
- Белан Е. П., Лыкова О. Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // Динамические системы. — 2009. — Т. 27. — С. 3–16.  
*Belan E. P. Bifurkacii vrashayushihsyia struktur v parabolicheskom uravnenii s preobrazovaniem povorota prostranstvennoy peremennoy* [Bifurcations of rotating structures in a parabolic equation with rotation transformation of a space variable] // Dinamicheskie Sistemy. — 2009. — Vol. 27. — P. 3–16 (in Russian).
- Белан Е. П., Хазова Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4(32), № 1-2. — С. 43–57.  
*Belan E. P., Khazova Yu. A. Dinamika stazionarnih struktur v parabolicheskoy zadache na okruzhnosti s otrazheniem prostranstvennoy peremennoy* [Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle] // Dinamicheskie Sistemy. — 2014. — Vol. 4(32), no. 1-2. — P. 43–57 (in Russian).
- Варфоломеев Е. М. О бифуркации Андронова–Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 2. — С. 173–174.  
*Varfolomeev E. M. Andronov–Hopf bifurcation for quasi-linear parabolic functional differential equations with transformations of spatial variables* // Russian mathematical surveys. — 2007. — Vol. 62, no. 2. — P. 398–400. (Russ. ed.: *Varfolomeev E. M. O bifurkacii Andronova–Hopfa dlya kvazilineynih parabolicheskikh funkcionalno-differencialnom uravneniy s preobrazovaniyami prostranstvennih peremennih* // Uspehy matematicheskikh nauk. — 2007. — Vol. 62, no. 2. — P. 173–174.)
- Воронцов М. А., Железных Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Мат. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 2. — С. 31–38.  
*Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I. Poperechnaya bistabilnost i multistabilnost v nelineynih opticheskikh sistemah s obratnoi svyazyu* [Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback] // Matematicheskoe modelirovanie. — 1990. — Vol. 2, no. 2. — P. 31–38 (in Russian).
- Кащенко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — Т. 31, № 3. — С. 467–473.  
*Kashchenko S. A. Asymptotic form of spatially non-uniform structures in coherent nonlinear optical systems* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1991. — Vol. 31, no. 3. — P. 97–102. (Russ. ed.: *Kashchenko S. A. Asimptotika prostranstvinno-neodnorodnih struktur v kogerentnih nelineino-opticheskikh sistemah* // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. — 1991. — Vol. 31, no. 3. — P. 467–473.)
- Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.  
*Marsden J., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications* // Applied Mathematical Sciences. — 1976. — No. 19. (Russ. ed.: *Marsden J., McCracken M. Bifurkaciya rojdeniya cikla i ee prilozheniya*. — Moscow: Mir, 1980. — 368 p.)
- Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 203 с.  
*Razgulin A. V. Nelineynie modeli opticheskoi sinergetiki* [Nonlinear models of optical synergetics]. — Moscow: MAKS Press, 2008. — 203 p. (in Russian).
- Скубачевский А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1394–1401.  
*Skubachevskii A. L. On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation* // Differential Equations. — 1998. — Vol. 34, no. 10. — P. 1395–1402. (Russ. ed.: *Skubachevskii A. L. O bifurkacii Hopfa dlya kvazilineynogo parabolicheskogo funkcionalno-differencialnogo uravneniya* // Differencialnie uravneniya. — 1998. — Vol. 34, no. 10. — P. 1394–1401.)

Хазова Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 3-4. — С. 245–257.

*Khazova Yu. A. Dinamika stazionarnih struktur v parabolicheskoy zadache na otrezke s otrazheniem prostranstvennoy peremennoy* [Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of segment] // *Dinamicheskie Sistemy*. — 2014. — Vol. 4 (32), no. 3-4. — P. 245–257 (in Russian).

Хазова Ю. А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 82–95.

*Khazova Yu. A. Stacionarniye strukturi v parabolicheskoy zadache s otrazheniem prostranstvinnoy peremennoi* [Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable] // *Tavricheskiy vestnik informatiki i informatiki*. — 2015. — No. 3 (28). — P. 82–95 (in Russian).

Хазова Ю. А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — 2015. — Т. 3, № 8-4 (19-4). — С. 314–317.

*Khazova Yu. A. Stacionarniye strukturi v parabolicheskoy zadache s otrazheniem prostranstvinnoy peremennoi* [Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable] // *Aktualniye napravleniya nauchnih issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika*. — 2015. — Vol. 3. — P. 314–317 (in Russian).

Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

*Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations*. — Berlin etc., 1981. (Russ. ed.: *Henry D. geometricheskaya teoriya polulinyeynih parabolicheskikh uravneniy*. — Moscow: Mir, 1985. — 376 p.)