

УДК: 519.246.8

О некоторых свойствах коротковолновой статистики временных рядов FOREX

Е. И. Белобородова^{1, a}, М. В. Тамм^{2, b}

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова,
Россия, 123458, г. Москва, ул. Таллинская, д. 34

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет,
Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

E-mail: ^a beloborodovaei@gmail.com, ^b thumm.m@gmail.com

Получено 02.05.2017, после доработки — 31.07.2017.

Принято к публикации 04.08.2017.

Финансовая математика является одним из наиболее естественных приложений для статистического анализа временных рядов. Действительно, финансовые временные ряды являются порождением одно-временной деятельности большого числа различных экономических агентов, что дает основания ожидать, что к ним могут быть применимы методы статистической физики и теории случайных процессов.

В настоящей работе проведен статистический анализ временных рядов для пар валют на рынке FOREX. Особый интерес представляет сравнение поведения временного ряда как функции, с одной стороны, физического времени и, с другой стороны, условного торгового времени, измеряемого в числе элементарных актов изменения цены (тиков). Экспериментально наблюдаемая статистика рассмотренных временных рядов (пар валют «евро–доллар» для первых половин 2007 и 2009 годов и «британский фунт – доллар» для 2007 года) радикально отличается в зависимости от выбора способа измерения времени. Так, при измерении времени в единицах тиков распределение приращений цены может быть хорошо описано нормальным распределением уже на масштабе порядка десяти тиков. При этом при измерении приращений цены как функции реального физического времени распределение приращений продолжает радикально отличаться от нормального, вплоть до масштабов порядка минут и даже часов.

Для объяснения этого явления нами исследованы статистические свойства элементарных приращений по цене и по времени. В частности, показано, что распределение времени между тиками для всех трех рассмотренных временных рядов имеет длинные (1-2 порядка по времени) степенные хвосты с экспоненциальным обрезанием на больших временах. Получены приближенные выражения для распределений времен ожидания для всех трех рассмотренных случаев. Другие статистические характеристики временного ряда (распределение элементарных изменений цены, парные корреляционные функции для приращений цены и для времен ожидания) демонстрируют достаточно простое поведение. Таким образом, именно аномально широкое распределение времен ожидания играет наиболее важную роль в наблюдаемом отклонении распределения приращений от нормального. В связи с этим результатом мы обсуждаем возможность применения модели случайного процесса с непрерывным временем (continuous time random walk, CTRW) для описания временных рядов FOREX.

Ключевые слова: временной ряд FOREX, распределение времен ожидания, распределение вероятностей с тяжелыми хвостами, корреляционный анализ временных рядов, случайное блуждание в непрерывном времени

UDC: 519.246.8

On some properties of short-wave statistics of FOREX time series

E. I. Beloborodova^{1, a}, M. V. Tamm^{2, b}

¹National Research University “Higher School of Economics”,
Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
Tallinskaya st. 34, Moscow, 123458, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Physics department,
Leninskie gory 1-2, Moscow, GSP-1, 119991, Russia

E-mail: ^a beloborodovaei@gmail.com, ^b thumm.m@gmail.com

Received 02.05.2017, after completion — 31.07.2017.

Accepted for publication 04.08.2017.

Financial mathematics is one of the most natural applications for the statistical analysis of time series. Financial time series reflect simultaneous activity of a large number of different economic agents. Consequently, one expects that methods of statistical physics and the theory of random processes can be applied to them.

In this paper, we provide a statistical analysis of time series of the FOREX currency market. Of particular interest is the comparison of the time series behavior depending on the way time is measured: physical time versus trading time measured in the number of elementary price changes (ticks). The experimentally observed statistics of the time series under consideration (euro–dollar for the first half of 2007 and for 2009 and British pound – dollar for 2007) radically differs depending on the choice of the method of time measurement. When measuring time in ticks, the distribution of price increments can be well described by the normal distribution already on a scale of the order of ten ticks. At the same time, when price increments are measured in real physical time, the distribution of increments continues to differ radically from the normal up to scales of the order of minutes and even hours.

To explain this phenomenon, we investigate the statistical properties of elementary increments in price and time. In particular, we show that the distribution of time between ticks for all three time series has a long (1-2 orders of magnitude) power-law tails with exponential cutoff at large times. We obtained approximate expressions for the distributions of waiting times for all three cases. Other statistical characteristics of the time series (the distribution of elementary price changes, pair correlation functions for price increments and for waiting times) demonstrate fairly simple behavior. Thus, it is the anomalously wide distribution of the waiting times that plays the most important role in the deviation of the distribution of increments from the normal. As a result, we discuss the possibility of applying a continuous time random walk (CTRW) model to describe the FOREX time series.

Keywords: FOREX time series, waiting time distribution, heavy-tailed probability distribution, correlation analyses of time series, continuous time random walk

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 657–669 (Russian).

Введение

Исследование статистических свойств финансовых временных рядов и попытки предсказания их поведения представляют не только очевидный практический, но и существенный фундаментальный интерес. Действительно, поведение финансовых временных рядов представляет собой результат самостоятельных действий большого числа индивидуальных агентов, что дает основание надеяться на применимость к ним подходов и методов, развитых в математической статистике [Cootner, 1964; Ingersoll, 1987] и статистической физике [Mantegna, Stanley, 1999; Bouchaud, Potters, 2000]. С другой стороны, поведение агентов на финансовых рынках не является независимым, их взаимодействия сложны и, как правило, не могут быть формально описаны. Благодаря этому в финансовых системах может наблюдаться поведение, существенно более сложное, чем в системах идентичных невзаимодействующих частиц, и типичное в целом для так называемых сложных систем [Bak, 1996; Сетна, 2013; Holovatch et al., 2017].

Простейшим случайным процессом, с которым наиболее естественно сравнить динамику финансовых рядов, является стандартное броуновское случайное блуждание, т. е. процесс,ращения которого — независимые равномерно распределенные случайные величины с конечной дисперсией [Hughes, 1995; Крапивский и др., 2012; Metzler, Klafter, 2000]. Прямое сравнение статистических данных о динамике финансовых рядов с известными результатами для броуновского движения показывает, что действительно в большом количестве случаев эти процессы обладают значительным сходством. Этот факт хорошо известен уже многие десятилетия и нашел очень широкое и успешное применение в экономической науке: упомянем, например, знаменитую модель Блэка–Шоулза–Мертон [Black, Scholes, 1973; Merton, 1973] для определения цены опционов, авторы которой удостоены в 1997 году Нобелевской премии по экономике.

Однако в последние два десятилетия существенное внимание исследователей привлекают отклонения поведения финансовых рядов от типичного для броуновского движения поведения. С одной стороны, наличие таких отклонений позволяет надеяться на частичную предсказуемость таких временных рядов. С другой стороны, детальное понимание неброуновского поведения в этой конкретной системе может иметь существенное фундаментальное значение для развития наших представлений о том, каким образом вообще возникает коллективное поведение в сильно взаимодействующих системах, что делает эту область родственной теории самоорганизующейся критичности [Bak, 1996; Bak et al., 1997] и теории фракталов [Mandelbrot, 2013]. Наконец, отклонения от гауссовской статистики, характерной для броуновского движения, особенно важны для оценки вероятности и возможности предсказания редких экстремальных событий на рынках, так называемых «черных лебедей» [Талеб, 2009]. Известно, что неправильная оценка вероятности таких событий моделями, основанными на броуновской динамике, породила диспропорции в мировой финансовой системе, следствием которых стал финансовый кризис 2008 года [Сильвер, 2015].

В числе различных подходов, позволяющих находить во временных рядах регулярности, выходящие за пределы гауссовой статистики, упомянем подходы, основанные на использовании процессов Леви [Bouchaud, Sornette, 1994; Koronen, 1995; Mantegna, Stanley, 1999; Bouchaud, Potters, 2000], аналогии между поведением финансовых рынков и теорией турбулентности [Ghashghaie et al., 1996] и другими нелинейно-динамическими процессами [Tribelsky et al., 2001, p. 241; Tribelsky, 2003, p. 131; Petrov, Tribelsky, 2015], описании финансовых рядов случайными процессами с памятью о предыдущих состояниях [Takayasu et al., 2007] и случайными процессами в зависящем от времени внешнем потенциале [Watanabe et al., 2008].

Важной особенностью финансовых временных рядов является то, что в них естественным образом имеются два различных естественных способа измерения времени. Один из них — обычное физическое время наблюдения, другой — время, измеренное в количестве актов элементарных изменений цены (тиков). В связи с тем, что динамика торгов на бирже обладает свойством крайней неравномерности во времени (что вообще является отличительной чертой темпоральной динамики социальных процессов, см., например, [Mryglod et al., 2015]), стати-

стика финансового временного ряда оказывается существенно различной в зависимости от выбранного способа измерения времени. В настоящей работе мы более подробно остановимся на исследовании этого вопроса.

В качестве объекта исследования мы рассмотрим динамику финансовых рядов FOREX — рынка, на котором по свободным ценам торгуются пары валют. В силу огромного объема торгов и количества участвующих игроков этот рынок является, пожалуй, наиболее удобным объектом для анализа методами статистической физики. Мы остановимся на высокочастотной динамике временного ряда FOREX, в частности на статистических свойствах элементарных приращений цены, называемых тиками.

Дальнейшее изложение материала построено следующим образом: во-первых, мы описываем источники и структуру исходных данных; во-вторых, исследуем статистические свойства элементарных шагов (тиков) по цене и по времени; в-третьих, обсуждаем полученные результаты в свете возможной применимости модели случайного блуждания с непрерывным временем (continuous time random walk, CTRW) [Metzler et al., 2014] к описанию временных рядов FOREX на малых временах.

Исходные данные

В настоящей работе мы рассматриваем временной ряд цен на рынке FOREX с разрешением до одного элементарного акта изменения цены (тика) для двух пар валют. Для пары валют «евро–доллар» (EUR–USD) использовались данные для первых половин 2007 и 2009 годов (до и после мирового финансового кризиса), для пары «британский фунт – доллар» (GBP–USD) — данные для всего 2007 года.

Исходные данные получены из открытых источников — с сайта <http://ratedata.gaincapital.com/> [Historic rate data, 2016]. Исходные данные имеют структуру, указанную ниже (см. таблицу 1). Поля включают в себя:

- идентификационный номер,
- наименование пары валют,
- время и дату,
- цену спроса,
- цену предложения.

Таблица 1. Структура исходных данных. Поля таблицы: идентификационный номер котировки, название пары валюты, дата изменения цены, время изменения цены, цена спроса, цена предложения

| ID | Currency | Date | Demand Price | Supply Price |
|-----------|----------|-------------------|--------------|--------------|
| 284314832 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:00 | 1,323200 | 1,323700 |
| 284314845 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:00 | 1,323200 | 1,323600 |
| 284314846 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:00 | 1,323100 | 1,323600 |
| 284314850 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:00 | 1,323200 | 1,323700 |
| 284314942 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:01 | 1,323100 | 1,323600 |
| 284314981 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:01 | 1,323200 | 1,323700 |
| 284315009 | EUR/USD | 01.01.2007, 20:01 | 1,323100 | 1,323600 |

Каждая строка соответствует, таким образом, одному тикю. В общей сложности в рядах для пары «евро–доллар» за 2007 г. содержится 1 013 096 строк, для пары «евро–доллар» за 2009 г. — 3 271 060 строк, для пары «британский фунт – доллар» за 2007 г. — 2 422 976 строк.

Так как разница между ценой спроса и предложения стабильна, можно исследовать одну из них. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением цены спроса.

В дальнейших разделах мы рассмотрим статистические свойства приращений времени и цены за один тик и сравним их свойства с типичными для обычных случайных блужданий.

Статистика элементарных шагов по цене

Были подсчитаны разницы цен по формуле $P_{t-1} - P_t$ по тикам. В SAS были построены распределения изменений цен (см. рис. 1).

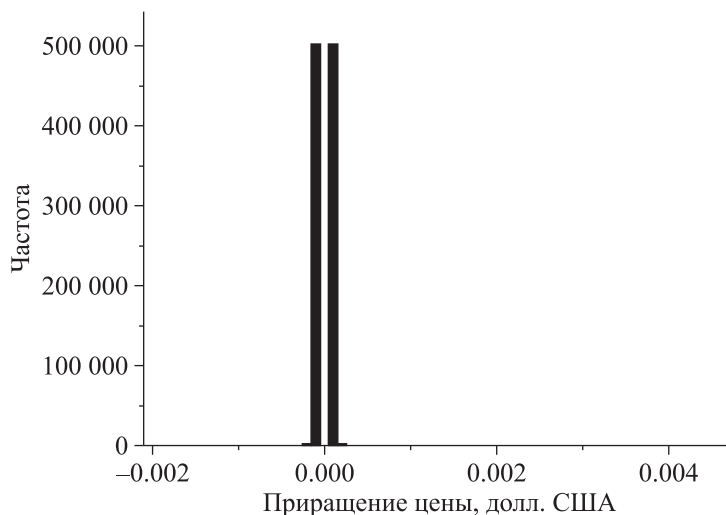


Рис. 1. Распределение разниц цен по тикам для пары EUR–USD за 2007 г.

Таким образом, в подавляющем большинстве случаев за один тик цена меняется на +0.0001 или –0.0001, с вероятностью практически неотличимой от 50 %.

Корреляционные свойства шагов по цене

Помимо распределения индивидуальных шагов, существенное значение для крупномасштабных свойств процесса может иметь наличие корреляций между ними. Напомним, что в классических случайных блужданиях последовательные шаги предполагаются независимыми. Количественной мерой корреляций во временном ряду P_n может служить корреляционная функция

$$G(k) = \frac{\langle P_n \cdot P_{n+k} \rangle - \langle P_n \rangle^2}{\langle P_n^2 \rangle - \langle P_n \rangle^2}. \tag{1}$$

Эта функция положительна, если P_n и P_{n+k} склонны отклоняться от своих средних в одну и ту же сторону, и отрицательна в противном случае. В случае полностью некоррелированных членов временного ряда $G(k=0)=1$, при этом $G(k > 1)=0$.

Нами были вычислены значения корреляционной функции для приращений цены в паре EUR–USD за 2007 год, данные приведены в таблице 2 и на рис. 2.

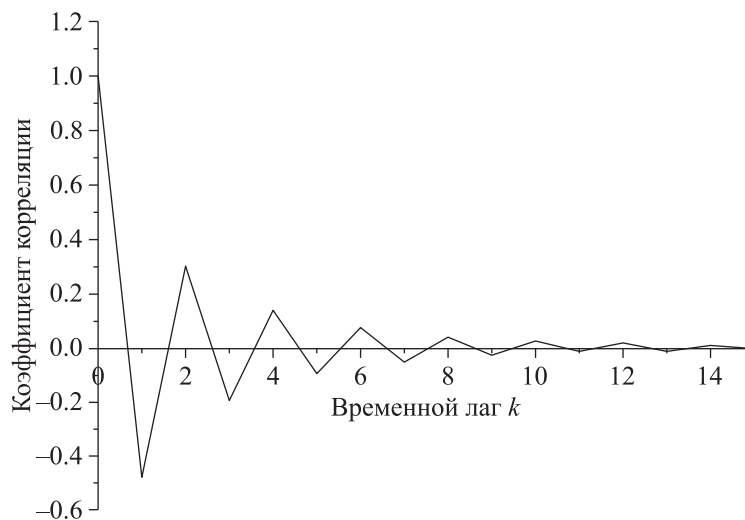
Видно, что между соседними шагами имеются заметные отрицательные корреляции, которые, однако, быстро спадают с ростом k . Корреляционная функция может быть с хорошей точностью приближена формулой вида

$$G(k) = (-1)^k \exp(-k / k_0),$$

где k_0 примерно равно 3. Таким образом, корреляции в приращении цены быстро спадают.

Таблица 2. Коэффициенты корреляции для шагов по цене для пары «евро–доллар» за 2007 г.

| k | Коэффициент корреляции |
|-----|------------------------|
| 0 | 1,0000 |
| 1 | −0,47867 |
| 2 | 0,29849 |
| 3 | −0,19771 |
| 4 | 0,13792 |
| 5 | −0,09900 |
| 6 | 0,07076 |
| 7 | −0,05278 |
| 8 | 0,03962 |
| 9 | −0,02952 |
| 10 | 0,02243 |
| 11 | −0,01653 |
| 12 | 0,01345 |
| 13 | −0,01240 |
| 14 | 0,00943 |
| 15 | −0,00835 |

Рис. 2. График коэффициентов корреляции для шагов по цене для пары «евро–доллар» за 2007 г. в зависимости от временного лага k , измеренного в единицах тиков

Свойства элементарного шага по времени

Экспериментальные гистограммы длин шагов в секундах для пары валют EUR–USD за 2007 г. представлены на рис. 3.

Распределение имеет гораздо более богатую структуру, чем распределение разниц цен по тикам. На рис. 4 приведено распределение длин тиков для пары EUR–USD за 2007 год в логарифмических координатах. Видно, что есть длинный участок от длин тиков порядка 3–5 с до 100–200 с, который можно считать почти линейным, что соответствует степенному распределению. Распределение для других рассмотренных временных рядов демонстрирует схожее поведение.

Естественно попытаться приблизить это распределение кривой вида

$$Ct^{-\alpha} \exp(-T/T_0). \quad (2)$$

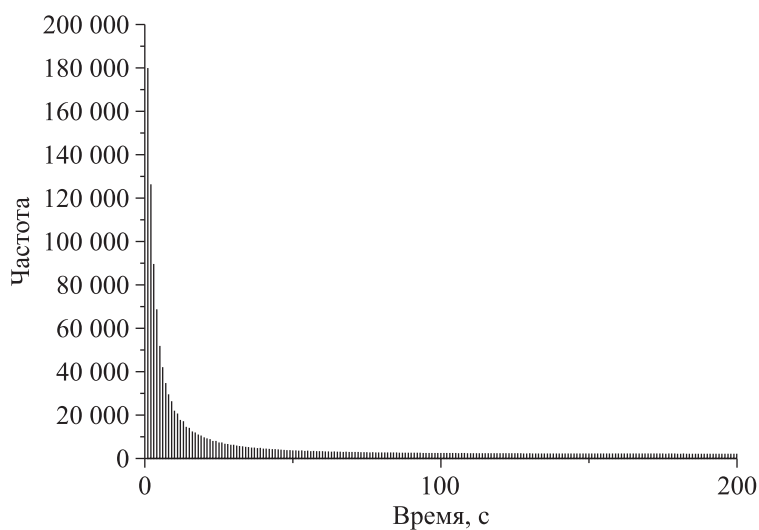


Рис. 3. Экспериментальная частотная диаграмма времен ожидания для пары валют EUR–USD за 2007 г.

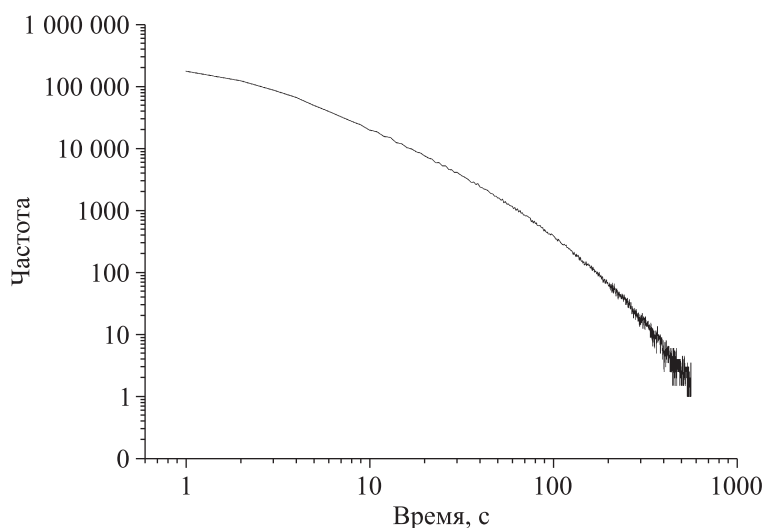


Рис. 4. Распределение времен ожидания для пары валют EUR–USD за 2007 г. в логарифмических шкалах

При подборе параметров α , T_0 мы пытались добиться максимально точного воспроизведения хвоста распределения. В таблице 3 приведены результаты подбора значений параметров для каждой из трех пар.

Таблица 3. Коэффициенты моделей α и T_0 для пар валют «евро–доллар» за 2007 г., «евро–доллар» за 2009 г., «британский фунт – доллар» за 2007 г.

| Временной ряд | α | T_0 |
|---------------|----------|-------|
| EUR–USD 2007 | 1.4 | 124 |
| EUR–USD 2009 | 2.1 | 83 |
| GBP–USD 2007 | 1.75 | 172 |

Видно, что обрезание для пары «фунт–доллар» происходит на больших временах, что соответствует меньшей интенсивности торгов на рынке «фунт–доллар» по сравнению с рынком «доллар–евро». Существенное изменение параметров распределения для пары «евро–доллар» в 2009 году по сравнению с 2007 может быть, по-видимому, объяснено последствиями мирово-

го финансового кризиса: естественно ожидать, что волатильность рынка в 2009 году была выше и, соответственно, длинных пауз между изменениями цены было меньше.

На рис. 5а, 5б, 5в приведены экспериментальные распределения и результаты их приближения по формуле (2) (сплошная и пунктирная линии соответственно).

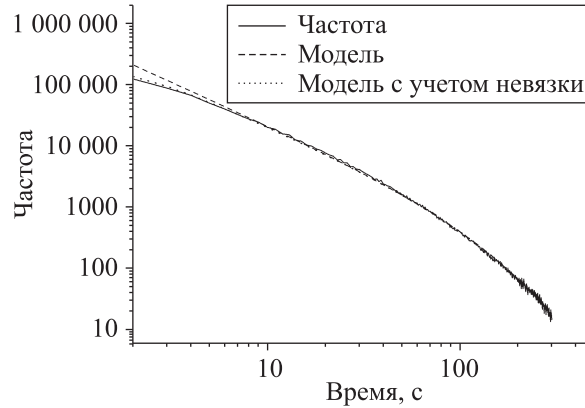


Рис. 5а. Модель распределения времени ожидания для пары EUR–USD за 2007 г. (в логарифмических шкалах). Сплошной линией отображен реальный набор данных; точкой — модель, действующая на малых временах ожидания; пунктиром — на средних и больших. По горизонтали значения показаны начиная с 2. Значения времен ожидания 0 и 1 моделью не описываются

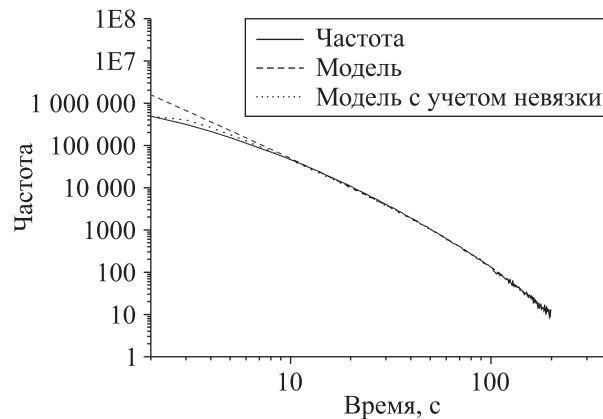


Рис. 5б. Модель распределения времени ожидания для пары EUR–USD за 2009 г. в обозначениях, использованных на рис. 5а

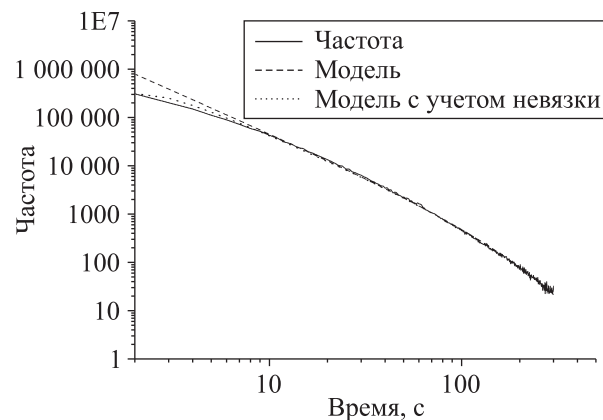


Рис. 5в. Модель распределения времени ожидания для пары GBP–USD за 2007 г. в обозначениях, использованных на рис. 5а

Видно, что предложенная формула практически идеально соответствует экспериментально наблюдаемым частотным кривым на средних и больших временах. Однако на малых временах (в особенности при $T < 8$ с) имеется существенная невязка, для описания которой нами предложена приближенная формула

$$AT^{-\beta},$$

где оптимальное значение параметра β равно 2.8 для пары «евро–доллар» за 2007 г., 3.5 для пары «евро–доллар» за 2009 г. и 3.09 для пары «британский фунт – доллар», соответственно.

В результате была получена модель для пары валют EUR–USD за 2007 г. (рис. 5а):

$$P_{EUR-USD\ 2007}(T) = \begin{cases} 5.62 \cdot 10^5 T^{-1.4} \exp(-0.008T) - 5.19 \cdot 10^5 T^{-2.8}, & T < 8, \\ 5.62 \cdot 10^5 T^{-1.4} \exp(-0.008T), & T > 8. \end{cases}$$

Для других пар валют и временных промежутков была проделана аналогичная работа.

Для EUR–USD за 2009 г. была построена следующая модель (рис. 5б):

$$P_{EUR-USD\ 2009}(T) = \begin{cases} 6.92 \cdot 10^6 T^{-2.1} \exp(-0.012T) - 12.48 \cdot 10^6 T^{-3.5}, & T < 8, \\ 6.92 \cdot 10^6 T^{-2.1} \exp(-0.012T), & T > 8. \end{cases}$$

Для пары GBP–USD за 2007 г. была построена следующая модель (рис. 5в):

$$P_{GBP-USD\ 2007}(T) = \begin{cases} 2.67 \cdot 10^6 T^{-1.75} \exp(-0.006T) - 4.07 \cdot 10^6 T^{-3.09}, & T < 8, \\ 2.67 \cdot 10^6 T^{-1.75} \exp(-0.006T), & T > 8. \end{cases}$$

Корреляционные свойства шагов по времени

Подобно проведенному выше исследованию корреляционных свойств шагов по цене, обсудим, имеются ли корреляции в шагах по времени. По формуле (1) были вычислены корреляционные функции приращений по времени для пар EUR–USD (рис. 6, а, б) и GBP–USD (рис. 7, а, б) за 2007 год.

Видно, что уже для соседних по времени шагов ($k=1$) корреляции достаточно малы (коэффициент корреляции не превышает 0.15). С другой стороны, небольшие, но устойчивые корреляции между длинами шагов сохраняются весьма продолжительное время. Мы полагаем, что это явление может быть связано с наличием суточного ритма торгов: интенсивность торгов, а следовательно, и типичное время между изменениями цены систематически меняются в зависимости от времени суток.

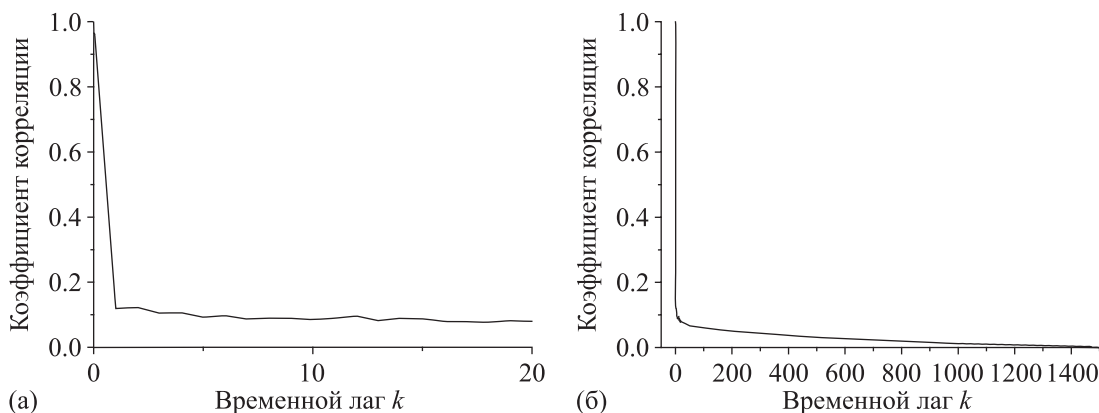


Рис. 6. Зависимость коэффициента автокорреляции для пары EUR–USD за 2007 г. от временного лага k , измеренного в единицах тиков: а) $k = 0 \dots 20$; б) $k = 0 \dots 1500$

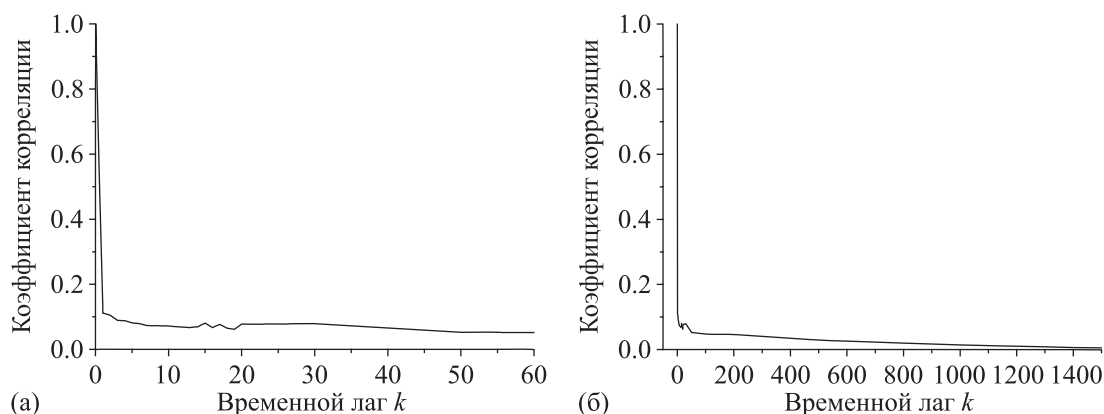


Рис. 7. Зависимость коэффициента автокорреляции для пары GBP–USD за 2007 г. от временного лага k , измеренного в единицах тиков: а) $k = 0 \dots 20$; б) $k = 0 \dots 1500$

Обсуждение и выводы

Таким образом, нами были исследованы распределения времен ожидания между тиками и парные корреляционные функции по времени и по цене для пар валют «евро–доллар» за первые половины 2007 и 2009 годов и «британский фунт – доллар» за 2007 год.

Видно, что корреляции между шагами как по времени, так и по цене имеют достаточно простой характер. Шаги по цене отрицательно коррелированы с корреляциями, спадающими экспоненциально на масштабе порядка 3 шагов. Между длинами шагов по времени имеются слабые долгоживущие корреляции, которые, по-видимому, могут быть описаны плавным регулярным изменением средней длины тика, связанным с суточным ритмом работы биржи.

Наиболее интересной особенностью задачи является наличие аномально широкого распределения единичных тиков по длине. Для всех трех исследованных временных рядов на средних и больших временах (более 8 секунд) эти распределения хорошо приближаются зависимостями вида $St^{-\alpha} \exp(-T/T_0)$ с параметром α от 1.4 до 2.1 и с временем экспоненциального обрезания T_0 порядка 100 с.

Влияние этого аномально широкого распределения длин тиков на поведение временного ряда может быть проиллюстрировано путем сравнения распределения приращения цен за фиксированное количество шагов (тиков) с распределением приращения цен за фиксированный промежуток физического времени.

На рис. 8, а и рис. 9, а представлены распределения приращения цены за 300 секунд и за 20 тиков соответственно для пары EUR–USD за 2007 год.

Видно, что при измерении времени в тиках распределение приращений имеет характерную пилообразную форму (большое число реализаций с четными приращениями, малое число реализаций с нечетными). Это объясняется тем, что более 99 % индивидуальных приращений равны 0.0001 по абсолютной величине (см. рис. 1). Соответственно, за 20 шагов реализации, в которых все приращения равны 0.0001, всегда дают четное суммарное приращение.

С точностью до этой особенности распределение приращений за 20 тиков может быть хорошо приближено распределением Гаусса:

$$p = \exp\left(\frac{-A \cdot (\Delta P)^2 \cdot 10^8}{20}\right), \quad (3)$$

как и следовало ожидать для обычного слабо коррелированного случайного блуждания с конечными шагами (рис. 9, б).

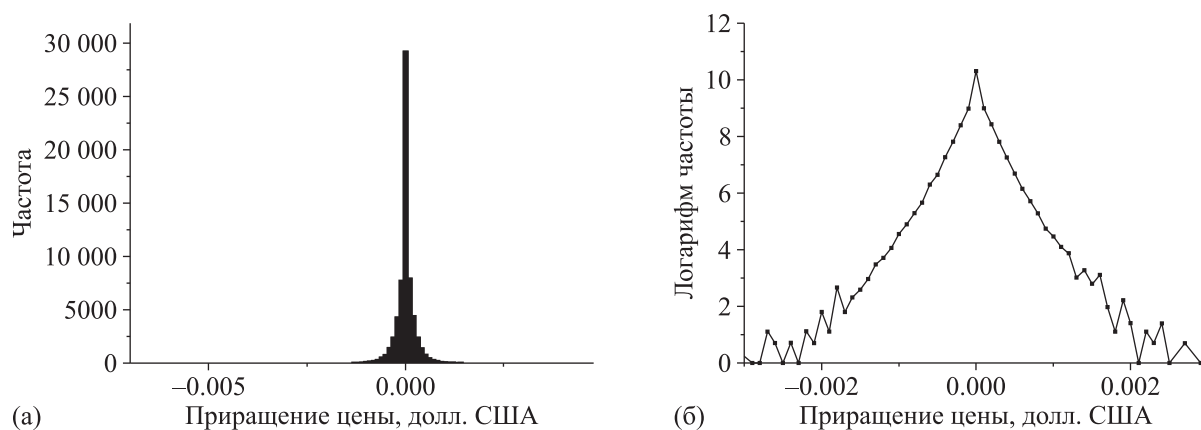


Рис. 8. а) Распределение приращения цены с лагом в 5 минут для пары «евро–доллар» за 2007 г. б) То же распределение в полулогарифмических координатах

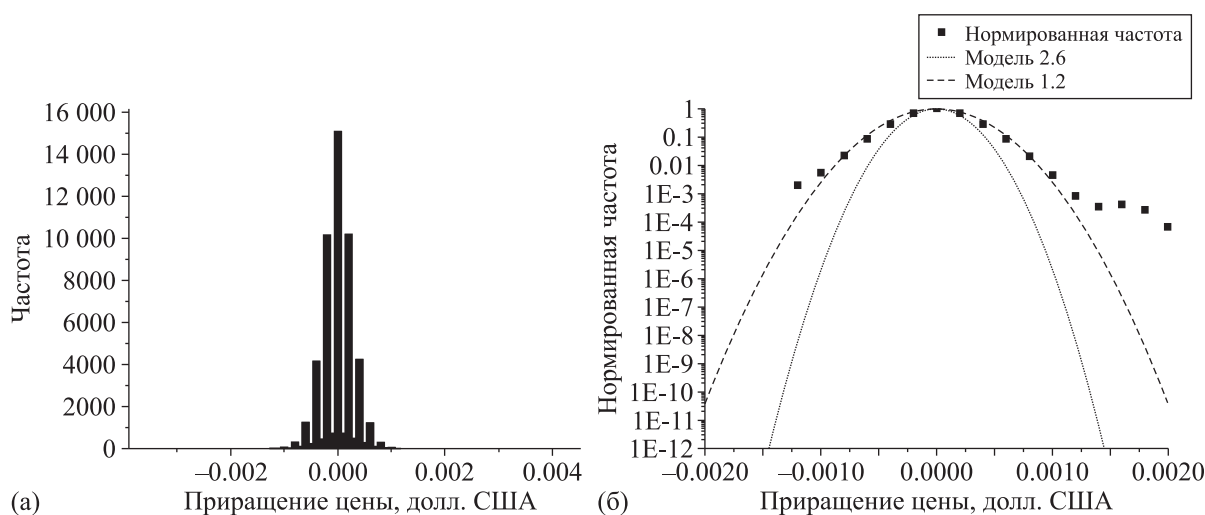


Рис. 9. а) Распределение приращения цены с лагом в 20 тиков для пары «евро–доллар» за 2007 г. б) Нормированное распределение приращения цены с лагом в 20 тиков (квадраты) для пары «евро–доллар» за 2007 г. Приближенные модели распределения по формуле (3) при A , равном 1.2 (пунктир) и 2.6 (точки)

С другой стороны, распределение приращений цены за фиксированный промежуток времени (рис. 8, б) радикально отличается от нормального, что связано с очень большими флуктуациями числа шагов (количества тиков) за заданный промежуток времени. Простейшей моделью аномальной диффузии, для которой характерно такое широкое распределение числа шагов за фиксированный промежуток времени, является модель случайных блужданий в непрерывном времени (continuous time random walk, CTRW [Крапивский и др., 2012; Metzler, Klafter, 2000; Metzler et al., 2014]).

Представляется, что любая попытка построения стохастической модели описания динамики временных рядов FOREX на малых временах должна прежде всего принимать во внимание наличие такого аномально широкого распределения длины шагов. Простейшей моделью такого описания (по крайней мере, на временах, не очень больших по сравнению с T_0) могла бы быть модель CTRW [Крапивский и др., 2012; Metzler, Klafter, 2000; Metzler et al., 2014], в которой распределение длины шага описывается степенным распределением с тяжелым хвостом, а корреляции между шагами по времени и по цене не учитываются. На более длинных временах можно ожидать, что наличие конечного масштаба обрезания для длины шага становится существенным и поведение временного ряда приближается к поведению обычного броуновского движения.

Список литературы (References)

- Крапивский П. Л., Реднер С., Бен-Наим Э.* Кинетический взгляд на статическую физику. — М.: Научный мир, 2012.
Krapivsky P. L., Redner S., Ben-Naim E. A kinetic view of statistical physics. — Cambridge University Press, 2010. (Russ. ed.: *Krapivsky P. L., Redner S., Ben-Naim E.* Kinetichesliy vzglyad na statisticheskuyu phisicu. — Moscow: Nauchniy mir, 2012.)
- Сетна Дж. П.* Статистическая механика: энтропия, параметры порядка и сложность. — М.: Научный мир, 2013.
Sethna J. P. Statistical mechanics: entropy, order parameters, and complexity. — USA: Oxford University Press, 2006. (Russ. ed.: *Setna J. P.* Statisticheskaya mehanika: entropiya, parametri poryadka i slojnost'. — Moscow: Nauchniy mir, 2013.)
- Сильвер Н.* Сигнал и шум: почему одни прогнозы сбываются, а другие — нет. — М.: КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2015.
Silver N. The Signal and the Noise: Why So Many Predictions Fail — but Some Don't. — USA: Penguin Group, 2012. (Russ. ed.: *Silver N.* Signal i shum: pochemy odni prognozi sbivayutsya, a drugie — net. — Moscow: CoLibri, Azbuka-Attikus, 2015.)
- Талеб Н. Н.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. — М.: КоЛибри, 2009.
Taleb N. N. The Black Swan: The Impact of Highly Improbable. — New York: Random House, 2007. (Russ. ed.: *Taleb N. N.* Cherniy lebed'. Pod znakom nepredskazuemosti. — Moscow: Colibri, 2009.)
- Bak P.* How Nature Works: the science of self-organized criticality. — Springer Science and Business Media, 1996.
- Bak P., Paczuski M., Shubik M.* Price Variations in a Stock Market with Many Agents // *Physica A*. — 1997. — Vol. 246, iss. 3. — P. 430–453.
- Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *Journal of Political Economy*. — 1973. — Vol. 81, iss. 3. — P. 637–654.
- Bouchaud J. P., Potters M.* Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management. — Cambridge University Press, 2000.
- Bouchaud J.-P., Sornette D.* The Black & Scholes Option Pricing Problem in Mathematical Finance: Generalization and Extensions for a Large Class of Stochastic Processes // *Journal de Physique*. — 1994. — Vol. 4. — P. 863–881.
- Cootner P. H.* Ed. The Random Character of Stock Market Prices. — MIT Press, Cambridge MA, 1964.
- Ghashghaie S., Breymann W., Peinke J., Talkner P., Dodge Y.* Turbulent Cascades in Foreign Exchange Markets // *Nature*. — 1996. — Vol. 381. — P. 767–770.
- Historic rate data. GAIN Capital. — URL: <http://ratedata.gaincapital.com/> (accessed: 10.09.2016).
- Holovatch Y., Kenna R., Thurner S.* Complex systems: physics beyond physics // *European Journal of Physics*. — 2017. — Vol. 38, iss. 2. — 023002.
- Hughes B. D.* Random walks and random environments. *Random Walks*. — Vol. 1. — Oxford University Press, 1995.
- Ingersoll J. E. Jr.* Theory of Financial Decision Making. — Rowman & Littlefield, Savage MD, 1987.
- Koponen I.* Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Levy Flights towards the Gaussian Stochastic Process // *Phys. Rev. E* — 1995. — Vol. 52. — P. 1197–1199.
- Mandelbrot B.* Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. — Springer Science and Business Media, 1997.
- Mantegna R. N., Stanley H. E.* Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance. — Cambridge university press, 1999.

- Metzler R., Jeon J. H., Cherstvy A. G., Barkai E.* Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2014. — Vol. 16, iss. 44. — P. 24128-64.
- Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics Report.* — December, 2000. — Vol. 339, iss. 1. — P. 1-77.
- Merton R.C.* Theory of Rational Option Pricing // *The Bell Journal of Economics and Management Science* — 1973. — Vol. 4, iss. 1. — P. 141-183.
- Mryglod O., Fuchs B., Szell M., Holovatch Yu., Thurner S.* Interevent time distributions of human multi-level activity in a virtual world // *Physica A: Statistical Mechanics and Applications.* — 2015. — Vol. 419. — P. 681-690.
- Petrov V. Yu., Tribelsky M. I.* FOREX trades: can the Takens algorithm help to obtain steady profit at investment reallocations? // *JETP Letters.* — 2015. — Vol. 102, iss. 12. — P. 958-961.
- Takayasu M., Mizuno T., Takayasu H.* Potentials force observed in market dynamics // *Physica A.* — 2006. — Vol. 370, iss. 1. — P. 91-97.
- Tribelsky M. I.* New complex approach to prediction of market prices / Ed. by H. Takayasu. *Toward Control of Economic Change — Application of Econophysics.* — Springer, 2003.
- Tribelsky M. I., Harada Y., Makarenko N., Kuandykov Y.* Predictability of market prices / Ed. by H. Takayasu. *Empirical Science of Financial Fluctuations. The Advent of Econophysics.* — Springer, 2001.
- Watanabe K., Takayasu H., Takayasu M.* Random walker in temporally deforming higher-order potential forces observed in a financial crisis // *Physical Review E.* — 2009. — Vol. 80, iss. 5. — P. 056110.