КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 Т. 9 № 4 С. 639–655
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-639-655

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.254

Синхронные компоненты финансовых временных рядов

А. А. Любушин[a], Ю. А. Фарков[b]

[a] Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН,
Россия, 123242, г. Москва, ул. Б. Грузинская, д. 10, стр. 1

[b] Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ,
Россия, 119571, г. Москва, проспект Вернадского, д. 82

E-mail: [a] lyubushin@yandex.ru, [b] farkov@list.ru

Получено 07.02.2017, после доработки — 08.06.2017.
Принято к публикации 23.06.2017.

В статье предлагается метод совместного анализа многомерных финансовых временных рядов, основанный на оценке набора свойств котировок акций в скользящем временном окне и последующем усреднении значений свойств по всем анализируемым компаниям. Основной целью анализа является построение мер совместного поведения временных рядов, реагирующих на возникновение синхронной или когерентной составляющей. Когерентность поведения характеристик сложной системы является важным признаком, позволяющим оценить приближение системы к резким изменениям своего состояния. Фундаментом для поиска предвестников резких изменений является общая идея увеличения корреляции случайных флуктуаций параметров системы по мере ее приближения к критическому состоянию. Приращения временных рядов стоимостей акций имеют выраженный хаотический характер и обладают большой амплитудой индивидуальных помех, на фоне которых слабый общий сигнал может быть выделен лишь на основе его коррелированности в разных скалярных компонентах многомерного временного ряда. Известно, что классические методы анализа, основанные на использовании корреляций между соседними отсчетами, являются малоэффективными при обработке финансовых временных рядов, поскольку с точки зрения корреляционной теории случайных процессов приращения стоимости акций формально имеют все признаки белого шума (в частности, «плоский спектр» и «дельта-образную» автокорреляционную функцию). В связи с этим предлагается перейти от анализа исходных сигналов к рассмотрению последовательностей их нелинейных свойств, вычисленных во временных фрагментах малой длины. В качестве таких свойств используются энтропия вейвлет-коэффициентов при разложении в базис Добеши, показатели мультифрактальности и авторегрессионная мера нестационарности сигнала. Построены меры синхронного поведения свойств временных рядов в скользящем временном окне с использованием метода главных компонент, значений модулей всех попарных коэффициентов корреляции и множественной спектральной меры когерентности, являющейся обобщением квадратичного спектра когерентности между двумя сигналами. Исследованы акции 16 крупных российских компаний с начала 2010 по конец 2016 годов. С помощью предложенного метода идентифицированы два интервала времени синхронизации российского фондового рынка: с середины декабря 2013 г. по середину марта 2014 г. и с середины октября 2014 г. по середину января 2016 г.

Ключевые слова: финансовые временные ряды, вейвлеты, энтропия, мульти-фракталы, предсказуемость, синхронизация

© 2017 Алексей Александрович Любушин, Юрий Анатольевич Фарков

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2017 VOL. 9 NO. 4 P. 639–655
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-639-655

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 519.254

Synchronous components of financial time series

A. A. Lyubushin[a], Yu. A. Farkov[b]

[a] Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,
Bolshaya Gruzinskaya st. 10-1, Moscow, 123242, Russia

[b] The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration,
Vernadskogo pr. 82, Moscow, 119571, Russia

E-mail: [a] lyubushin@yandex.ru, [b] farkov@list.ru

Received 07.02.2017, after completion — 08.06.2017.
Accepted for publication 23.06.2017.

The article proposes a method of joint analysis of multidimensional financial time series based on the evaluation of the set of properties of stock quotes in a sliding time window and the subsequent averaging of property values for all analyzed companies. The main purpose of the analysis is to construct measures of joint behavior of time series reacting to the occurrence of a synchronous or coherent component. The coherence of the behavior of the characteristics of a complex system is an important feature that makes it possible to evaluate the approach of the system to sharp changes in its state. The basis for the search for precursors of sharp changes is the general idea of increasing the correlation of random fluctuations of the system parameters as it approaches the critical state. The increments in time series of stock values have a pronounced chaotic character and have a large amplitude of individual noises, against which a weak common signal can be detected only on the basis of its correlation in different scalar components of a multidimensional time series. It is known that classical methods of analysis based on the use of correlations between neighboring samples are ineffective in the processing of financial time series, since from the point of view of the correlation theory of random processes, increments in the value of shares formally have all the attributes of white noise (in particular, the "flat spectrum" and "delta-shaped" autocorrelation function). In connection with this, it is proposed to go from analyzing the initial signals to examining the sequences of their nonlinear properties calculated in time fragments of small length. As such properties, the entropy of the wavelet coefficients is used in the decomposition into the Daubechies basis, the multifractal parameters and the autoregressive measure of signal nonstationarity. Measures of synchronous behavior of time series properties in a sliding time window are constructed using the principal component method, moduli values of all pairwise correlation coefficients, and a multiple spectral coherence measure that is a generalization of the quadratic coherence spectrum between two signals. The shares of 16 large Russian companies from the beginning of 2010 to the end of 2016 were studied. Using the proposed method, two synchronization time intervals of the Russian stock market were identified: from mid-December 2013 to mid-March 2014 and from mid-October 2014 to mid-January 2016.

Keywords: financial time series, wavelets, entropy, multi-fractals, predictability, synchronization

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 639–655 (Russian).

© 2017 Alexey A. Lyubushin, Yuri A. Farkov

1. Введение

Финансовые временные ряды являются одним из наиболее сложных объектов исследования в прикладной статистике. Это связано, в частности, с тем, что для них оказываются неработоспособными классические методы прогноза, основанные на использовании корреляций между соседними отсчетами временных рядов [Box, Jenkins, 2016; Kashayp, Rao, 1976], поскольку автокорреляционная функция для приращений котировок акций близка к нулю почти всюду [Мандельброт, 2004; Voit, 2005].

Синхронизация, увеличение степени коррелированности случайных флуктуаций параметров сложных систем, является важным индикатором изменений в их динамике. Временные ряды котировок акций ряда ведущих компаний отражают как индивидуальные шумы, возникающие вследствие особенностей деятельности той или иной компании, так и некоторую временную компоненту, общую для всех участников фондового рынка страны. Возникает проблема выделения синхронной компоненты путем совместной обработки котировок акций нескольких компаний. Следует отметить, что вычисление линейных мер корреляции непосредственно между исходными данными финансовых временных рядов малоэффективно, поскольку формально, с точки зрения корреляционной теории случайных процессов, приращения финансовых временных рядов являются белыми шумами. Однако преобразование исходных временных рядов в последовательности значений их свойств, вычисленных в скользящих временных окнах, позволяет обойти эту трудность.

Одним из широко применяемых в настоящее время методов анализа финансовых временных рядов является вейвлет-анализ. Основные подходы к обработке сигналов с помощью непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований даны в монографии [Малла, 2005]. В работе [Schleicher, 2002] проиллюстрированы основные подходы теории вейвлетов к анализу финансовых временных рядов. В статьях [Ramsey, Zhang, 1995; Capobianco, 2004] вейвлеты использовались для анализа динамической структуры валютных курсов и для кратномасштабного анализа высокочастотных данных индекса Токийской фондовой биржи (Nikkei Stock Index Data); кроме того, они применялись для выявления скрытых периодических компонент финансовых временных рядов. В работе [Lee, 2004] с помощью вейвлетов исследовалась связь волатильностей на американском и корейском рынках. В статье [Perello et al., 2004] вейвлеты применялись для исследования свойств масштабирования волатильности валютных курсов. В работах [Fernandez, Lucey, 2007; Subbotin, 2008] вейвлетное преобразование применялось в рамках модели управления портфелем на множественных горизонтах. Ряд практически важных вопросов, связанных с исследованием финансовых временных рядов методами вейвлет-анализа, в том числе анализ «долгой памяти рынка», оценки рисков с использованием вейвлет-дисперсии, вейвлет-корреляции и кросс-корреляции и др., рассмотрен в сборниках [In, Kim, 2012; Gallegati, Semmler, 2014]. В недавней работе [Родионов, 2016] ортогональные диадические вейвлеты [Протасов, Фарков, 2006] применялись для вычисления мер близости финансовых временных рядов.

В данной статье делается попытка многомерного анализа финансовых временных рядов с целью выделения «аномальных» временных интервалов, когда наблюдаются синхронные изменения в наборе исследуемых акций. При этом наряду с вейвлет-анализом используется программный аппарат, разработанный для поиска предвестников сильных землетрясений по многомерным данным геофизического мониторинга [Любушин, 2007, 2012, 2014]. Методической основой интереса к поиску синхронной компоненты в различных наблюдениях является общая идея увеличения корреляции случайных флуктуаций параметров сложной системы по мере ее приближения к резкому изменению своих свойств вследствие собственной динамики [Gilmore, 1981; Nicolis, Prigogine, 1989]. В исследуемых временных рядах котировок акций мы стремимся выделить «аномальные» интервалы времени, когда во всех анализируемых сигналах появляется некоторая общая составляющая, которая часто не может быть замечена при скалярном анализе вследствие высокого уровня индивидуальных шумов. Совместное использование информации

от нескольких временных рядов и от рассмотрения нескольких статистик — свойств этих рядов — позволяет определить «аномальные» интервалы времени с достаточно высокой статистической значимостью, несмотря на то что интенсивность общей составляющей может быть невелика.

2. Данные

Анализировались временные ряды котировки акций Московской биржи [Московская биржа акции]. Брались данные котировок акций 16 российских компаний за 7 лет, с начала 2010 года по конец 2016 года. Котировки приведены для рабочих дней с 11:00 по 19:00, с шагом 1 час, по 9 значений в рабочие дни. На рис. 1 изображены графики приращений котировок этих акций, именно эти сигналы будут анализироваться в статье.

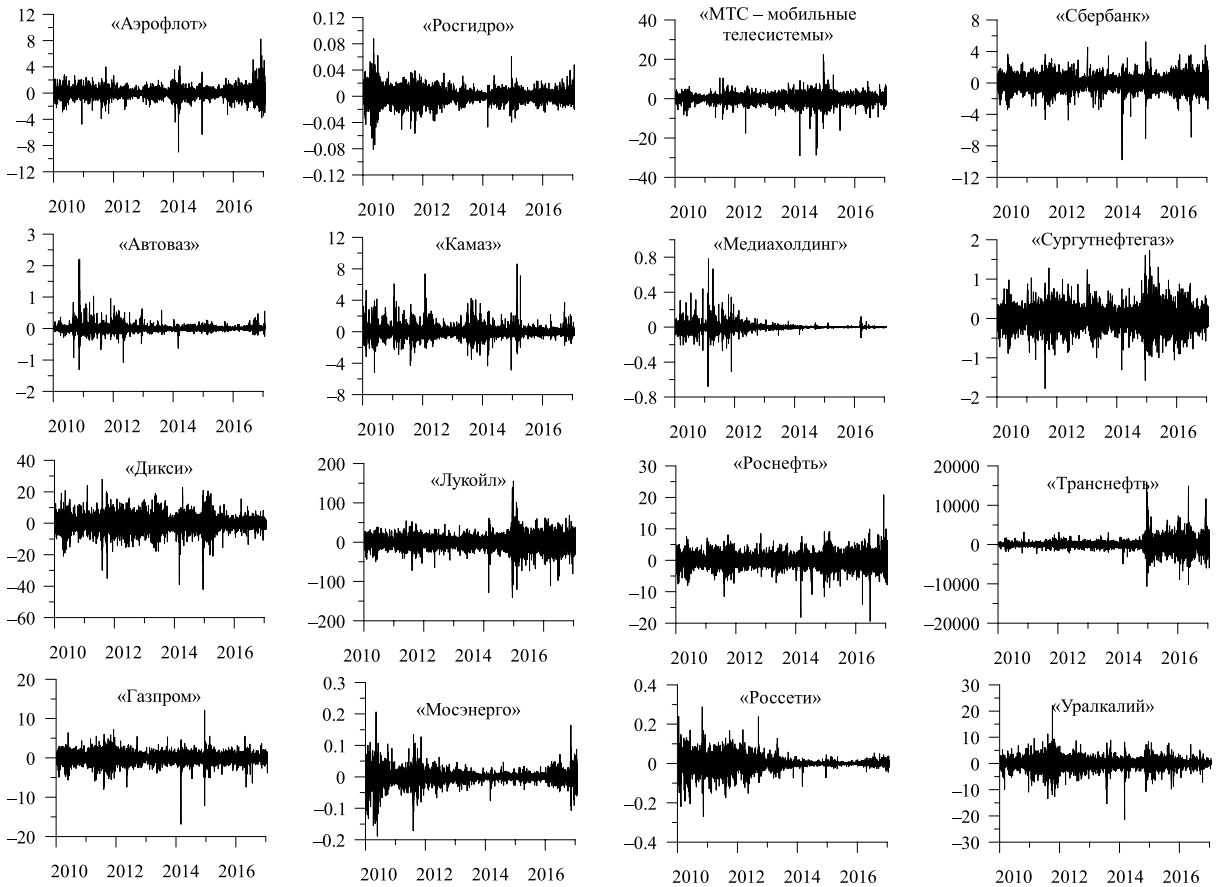

Рис. 1. Приращения временных рядов котировок акций 16 российских компаний на Московской бирже с шагом по времени 1 час, 2010–2016 гг.

3. Методы анализа данных

В этом параграфе будут кратко описаны 7 свойств временных рядов, которые оценивались в скользящих временных окнах и которые тем самым давали представление об изменениях статистических свойств сигналов. Подчеркнем, что все используемые свойства являются безразмерными и не зависят от масштаба изменений анализируемых величин.

Минимальная нормализованная энтропия вейвлет-коэффициентов En

Пусть $x(t)$ — конечная выборка некоторого случайного сигнала, $t = 1,...,N$ — индекс, нумерующий последовательные отсчеты (дискретное время). Определим нормализованную энтропию конечной выборки формулой

$$En = -\sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \log(p_k) / \log(N), \quad p_k = c_k^2 / \sum_{j=1}^{N} c_j^2, \quad 0 \le En \le 1. \tag{1}$$

Здесь c_k, $k = 1, N$, — коэффициенты ортогонального вейвлет-разложения с некоторым базисом. Ниже использовались 17 ортогональных вейвлетов Добеши: 10 обычных базисов с минимальным носителем, с числом обнуляемых от 1 до 10, и 7 так называемых симлетов Добеши [Малла, 2005], с числом обнуляемых моментов от 4 до 10. Для каждого из базисов вычислялась нормализованная энтропия распределения квадратов коэффициентов (1) и находился базис, обеспечивающий минимум величине (1). Заметим, что в силу ортогональности вейвлет-преобразования сумма квадратов коэффициентов равна дисперсии (энергии) сигнала $x(t)$. Таким образом, величина (1) вычисляет энтропию распределения энергии колебаний на различных пространственных и временных масштабах. Статистика En использовалась в работах [Lyubushin, 2012, 2014] при исследовании прогностических свойств сейсмического шума на Японских островах.

Вейвлетный индекс Донохо–Джонстона γ

После того как вейвлет-базис определен для данного сигнала из условия минимума энтропии, мы можем определить набор вейвлет-коэффициентов, которые являются наименьшими по модулю. В вейвлет-фильтрации эти вейвлет-коэффициенты могут быть обнулены перед обратным вейвлет-преобразованием с целью «уменьшения шума» [Donoho, Johnstone, 1995; Малла, 2005]. Мы предполагаем, что шум концентрируется в основном в вариациях на первом уровне детальности. Из-за ортогональности вейвлет-преобразования дисперсия вейвлет-коэффициентов равна дисперсии исходного сигнала. Таким образом, мы оцениваем стандартное отклонение шума как стандартное отклонение вейвлет-коэффициентов на первом уровне детализации. Эта оценка должна быть устойчивой, т. е. нечувствительна к выбросам в значениях вейвлет-коэффициентов на первом уровне. Для этого мы можем использовать робастную медианную оценку стандартного отклонения для нормальной случайной величины:

$$\sigma = med\{|c_k^{(1)}|, k = 1,..., N/2\} / 0.6745, \tag{2}$$

где $c_k^{(1)}$ — вейвлет-коэффициенты на первом уровне детальности, $N/2$ — число таких коэффициентов. Оценка стандартного отклонения σ из формулы (2) определяет величину $\sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$ как «естественный» порог для выделения шумовых вейвлет-коэффициентов. Величина $\sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$ известна в вейвлет-анализе как порог Донохо–Джонстона, а само выражение для этой величины основано на формуле для асимптотической вероятности максимальных уклонений гауссовского белого шума [Малла, 2005]. В результате можно определить безразмерную характеристику сигнала γ, $0 < \gamma < 1$, как отношение числа наиболее информативных вейвлет-коэффициентов, для которых выполнено неравенство $|c_k| > \sigma\sqrt{2 \cdot \ln N}$, к общему числу N всех вейвлет-коэффициентов. Формально чем больше индекс γ, тем более информативным (менее «шумовым») является сигнал.

Индекс линейной предсказуемости ρ

Индекс линейной предсказуемости был введен в работе [Любушин, 2010]; см. также [Lyubushin, 2012]. Рассмотрим величину $\rho = V_0 / V_{AR} - 1$. Здесь V_0 — дисперсия ошибки $\varepsilon_0(t+1)$ тривиального прогноза $\hat{x}_0(t+1)$ на 1 шаг вперед для $x(t)$ сигналов, который равен среднему

по предыдущему «малому» временному окну длиной n отсчетов: $\hat{x}_0(t+1) = \sum_{s=t-n+1}^{t} x(t)/n$. Таким образом, $\varepsilon_0(t+1) = x(t+1) - \hat{x}_0(t+1)$, а $V_0 = \sum_{t=n+1}^{N} \varepsilon_0^2(t)/(N-n)$, где $N > n$ — число отсчетов в последовательных «больших» временных фрагментах. Величина V_{AR} вычисляется по аналогичной формуле: $V_{AR} = \sum_{t=n+1}^{N} \varepsilon_{AR}^2(t)/(N-n)$, в которой $\varepsilon_{AR}(t+1) = x(t+1) - \hat{x}_{AR}(t+1)$ — ошибка линейного прогноза $\hat{x}_{AR}(t+1)$ на 1 шаг вперед с помощью модели авторегрессии 2-го порядка (AR-прогноз), коэффициенты которой оцениваются также по предыдущему «малому» временному окну длиной n отсчетов. То есть рассматривается модель

$$x(t) + a_1 \cdot x(t-1) + a_2 \cdot x(t-2) = e(t) + d, \tag{3}$$

в которой вектор $c = (a_1, a_2, d)^T$ является вектором неизвестных параметров, определяемых по скользящему «малому» окну длиной n отсчетов из условия минимума суммы квадратов невязок $e(t)$. Введем вектор $Y(t) = (-x(t-1), -x(t-2), 1)^T$. Тогда авторегрессионную модель можно коротко записать в виде $x(t) = c^T \cdot Y(t) + e(t)$. Для вычисления прогноза на шаг вперед $\hat{x}_{AR}(t+1)$ найдем вектор c из условия минимума суммы квадратов невязок $e(t)$ по предыдущим n отсчетам: $\sum_{\lambda=t-n+3}^{t} e^2(\lambda) = \sum_{\lambda=t-n+3}^{t} (x(\lambda) - c^T Y(\lambda))^2 \to \min_c$, откуда можно получить формулы для оценки методом наименьших квадратов вектора параметров и прогноза на 1 шаг вперед:

$$\begin{gathered} \hat{c}(t) = A^{-1}(t) \cdot R(t), \quad A(t) = \sum_{\lambda=t-n+3}^{t} Y(\lambda) \cdot Y^T(\lambda), \quad R(t) = \sum_{\lambda=t-n+3}^{t} x(\lambda) \cdot Y(\lambda), \\ \hat{x}_{AR}(t+1) = x(t+1) - \hat{c}^T(t) \cdot Y(t). \end{gathered} \tag{4}$$

Выбор 2-го порядка авторегрессии обусловлен тем, что этот порядок минимальный для AR-модели, при котором описывается колебательное движение и допускается положение максимума спектральной плотности в значениях частот между частотой Найквиста и нулевой [Box, Jenkins, 2016; Kashyap, Rao, 1976]. AR-прогноз использует свойство коррелированности соседних значений приращений записей, и если она имеет место, то $V_{AR} < V_0$ и $\rho > 0$.

Заметим, что для приращений финансовых временных рядов индекс линейной предсказуемости всегда отрицателен, это известный факт неэффективности классической корреляционной теории прогноза временных рядов применительно к финансовым временным рядам. Поэтому индекс ρ может использоваться как обратная «мера непредсказуемости» финансовых временных рядов.

Мультифрактальные параметры $\Delta\alpha$ и α^*

Рассмотрим некоторое случайное колебание $x(t)$ на интервале времени $[t-\delta/2, t+\delta/2]$ длиной δ, с центром во временной точке t. Рассмотрим размах $\mu(t,\delta)$ случайного колебания на этом интервале, то есть разницу между максимальным и минимальным значениям:

$$\mu(t,\delta) = \max_{t-\delta/2 \le s \le t+\delta/2} x(s) - \min_{t-\delta/2 \le s \le t+\delta/2} x(s). \tag{5}$$

Если устремить $\delta \to 0$, то $\mu(t,\delta)$ будет также стремиться к нулю, но здесь важна скорость этого убывания. Если скорость определяется законом $\delta^{h(t)}$: $\mu(t,\delta) \underset{\delta\to 0}{\sim} \delta^{h(t)}$ или если существует предел $h(t) = \lim_{\delta\to 0} \dfrac{\log(\mu(t,\delta))}{\log(\delta)}$, то величина $h(t)$ называется экспонентой Гельдера–Липшица.

Если величина $h(t)$ не зависит от момента времени t: $h(t) = \text{const} = H$, то случайное колебание $X(t)$ называется монофрактальным, а величина H — экспонентой Херста. Если же экспоненты Гельдера–Липшица $h(t)$ существенно различаются для разных моментов времени t, то случайное колебание называется мультифракталом и для него можно определить понятие спектра сингулярности $F(\alpha)$ [Feder, 1991]. Для этого мысленно выделим множество $C(\alpha)$ таких моментов времени t, которые имеют одно и то же значение α экспоненты Гельдера–Липшица: $h(t) = \alpha$. Множества $C(\alpha)$ существуют (то есть содержат какие-то элементы, не являются пустыми множествами) не для всех значений α, то есть существуют некоторые минимальное $\alpha_{\min}$ и максимальное $\alpha_{\max}$, такие, что лишь для $\alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max}$ множества $C(\alpha)$ непустые. Мультифрактальный спектр сингулярности $F(\alpha)$ — это фрактальная размерность множества точек $C(\alpha)$. Параметр $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$, называемый шириной носителя спектра сингулярности, представляется важной мультифрактальной характеристикой. Кроме того, значительный интерес представляет аргумент α^*, доставляющего максимум спектру сингулярности: $F(\alpha^*) = \max\limits_{\alpha_{\max} \le \alpha \le \alpha_{\min}} F(\alpha)$, называемый обобщенным показателем Херста. Максимум спектра сингулярности не может превосходить 1 — размерности вмещающего множества или оси времени, $0 < F(\alpha^*) \le 1$, обычно $F(\alpha^*) = 1$. Заметим, что для монофрактального сигнала $\Delta\alpha = 0$, $\alpha^* = H$. Ниже для оценки мультифрактальных характеристик сигналов использовался метод, основанный на анализе флуктуаций после устранения масштабно-зависимых трендов [Kantelhardt et al., 2002]. В работах [Lyubushin, 2010, 2012, 2014] мультифрактальные параметры $\Delta\alpha$ и α^* были использованы при оценке сейсмической опасности по свойствам сейсмического шума в Японии (см. также [Любушин, 2012, 2014]).

Коэффициент эксцесса κ определяется формулой [Cramer, 1999]

$$\kappa = \left\langle x^4 \right\rangle \Big/ \left\langle x^2 \right\rangle^2 - 3. \tag{6}$$

Здесь угловые скобки $\langle ... \rangle$ означают вычисление выборочного среднего случайной величины x с нулевым математическим ожиданием. Коэффициент эксцесса характеризует «остроту» графика плотности вероятности распределения случайной величины и дает меру отклонения плотности вероятности от нормального закона, для которого $\kappa = 0$.

Нормализованная энтропия дисперсии EnVar

Пусть $x(t)$ — конечная выборка некоторого случайного сигнала, $t = 1,...,N$ — индекс, нумерующий последовательные отсчеты. Разобьем временной отрезок длиной N отсчетов на m равных частей, и пусть V_α, $\alpha = 1,...,m$, — значения дисперсии сигнала для каждого из этих интервалов. Определим нормализованную энтропию дисперсии формулой

$$EnVar = -\sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha \cdot \log(p_\alpha) / \log(m), \quad p_\alpha = V_\alpha / \sum_{\beta=1}^{m} V_\beta, \quad 0 \le EnVar \le 1. \tag{7}$$

Нормализованная энтропия дисперсии была введена в работе [Lyubushin, 2014]. Выше в формуле (7) мы использовали длину временного окна $N = 500$, которое разбивали на 10 интервалов длиной 50 отсчетов, то есть $m = 10$.

Авторегрессионная мера нестационарности сигнала R^2

Пусть $x(t)$ — изучаемый сигнал, L — половина длины скользящего временного окна, которое далее будем называть коротким. Пусть τ — центр двойного скользящего временного окна, в которое тем самым входят временные отсчеты t, удовлетворяющие условию $\tau - L \le t \le \tau + L$.

Для левой и правой половин короткого окна построим скалярную авторегрессионную модель порядка p сигнала $x(t)$:

$$x(t)+\sum_{k=1}^{p}a_k x(t-k)=\varepsilon(t)+d, \tag{8}$$

где a_k — коэффициенты авторегрессии (параметры модели), d — параметр статического смещения, $\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2. Модель (8) можно записать в компактной форме:

$$x(t)=c^T Y(t)+\varepsilon(t),\quad Y(t)=(-x(t-1),...,-x(t-p),1)^T,\quad c=(a_1,...,a_p,d)^T. \tag{9}$$

Пусть имеется конечная выборка $\{x(t), t=1,\ldots,L\}$. Тогда оценка вектора параметров c из условия минимума суммы квадратов остатков $\sum_{t=p+1}^{L}\varepsilon^2(t)\to\min$ сводится к решению системы нормальных уравнений с симметричной положительно-определенной матрицей A:

$$Ac=R,\quad A=\sum_{t=p+1}^{L}Y(t)Y^T(t),\quad R=\sum_{t=p+1}^{L}x(t)Y(t). \tag{10}$$

Полный вектор параметров модели есть $\theta=(c^T,\sigma)^T$, где σ^2 — дисперсия остатка $\varepsilon(t)$ модели (8). Оценивая модель независимо по выборкам, попавшим в левую и правую половины двойного скользящего временного окна, получим два вектора параметров: $\theta^{(1)}$ и $\theta^{(2)}$ соответственно, которые вычисляются для левой половины окна, например, согласно формулам (10). Обозначим $\Delta\theta=\theta^{(2)}-\theta^{(1)}$ разницу между векторами оценок на левой и правой половинах скользящего временного окна.

Если поведение изучаемого сигнала на левой и правой половинах сильно различается, то будет увеличиваться разница $\Delta\theta$. Для «взвешивания» вектора $\Delta\theta$ в качестве метрической матрицы логично использовать матрицу Фишера, поскольку она определяет скорость изменения логарифмической функции правдоподобия в окрестности точки максимума по параметрам

$$B=-\frac{\partial^2\ln(\Phi)}{\partial\theta\,\partial\theta},\quad \ln(\Phi)=-(L-p)\ln(\sigma)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_t(x(t)-c^TY(t))^2 \tag{11}$$

— матрицы вторых производных по параметрам от условной логарифмической функции правдоподобия авторегрессионной модели. Обозначим через $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ матрицы, вычисленные по левой и правой половинам скользящего окна соответственно. Тогда мерой нестационарности поведения процесса $x(t)$ в симметричной окрестности точки τ будет величина

$$r^2(\tau)=(\Delta\theta^T B^{(1)}\Delta\theta+\Delta\theta^T B^{(2)}\Delta\theta)\,/\,(2(L-p)). \tag{12}$$

В формуле (12) полусумма длин вектора разности параметров $\Delta\theta$, измеряемых с помощью метрических матриц $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, делится на $(L-p)$ — число отсчетов в левой и правой частях скользящего окна за вычетом числа авторегрессионных параметров. Такая метрика обеспечивает естественную безразмерную меру нестационарности поведения исследуемого сигнала. Проведя несложные выкладки, нетрудно получить следующее выражение:

$$\Delta\theta^T B\Delta\theta=\frac{2(\Delta\sigma)^2}{\sigma^2}+\frac{\Delta c^T\left(\sum_t Y(t)Y^T(t)\right)\Delta c}{\sigma^2(L-p)}+\frac{4\Delta c^T\Delta\sigma\sum_t\varepsilon(t)Y(t)}{\sigma^3(L-p)}, \tag{13}$$

полезное при вычислении значения меры нестационарности (12). Мера нестационарного поведения (12)–(13) была введена в работе [Любушин и др., 1999], см. также [Любушин, 2007]. В работе [Osorio et al., 2011] статистика (13) была использована для анализа электроэнцефалограмм при исследовании эпилепсии.

Используя формулы (12), (13) можно определить другую, более устойчивую меру нестационарного поведения исследуемого сигнала внутри «длинного» временного интервала, состоящего из N последовательных отсчетов. Для этого возьмем короткое окно радиуса L отсчетов, $2L+1<N$, и вычислим меру нестационарного поведения $r^2(\tau)$ для всех возможных положений центральной точки τ внутри длинного окна, при которых короткое окно целиком лежит внутри длинного. Нетрудно посчитать, что число таких допустимых положений центральной точки τ равно $N-2L$. Теперь можно определить интегральную меру нестационарности R^2 для длинного окна как медиану значений $r^2(\tau)$ для всех допустимых положений центральной точки τ короткого окна внутри длинного.

Для исследования нестационарного поведения сигналов ниже бралось длинное временное окно, состоящее из $N=500$ отсчетов, со смещением 100 отсчетов. Для каждого положения длинного временного окна вычислялись значения меры (12) для короткого окна радиусом $L=50$ отсчетов с использованием модели авторегрессии 2-го порядка ($p=2$).

4. Результаты анализа данных

Мы не будем приводить графики вариаций всех 7 статистик — En, $EnVar$, ρ, γ, α^*, R^2 и κ для приращений котировок акций 16 российских компаний для интервала времени 2010–2016 гг. и ограничимся лишь двумя — нормализованной энтропией квадратов вейвлет-коэффициентов En и мерой нестационарности R^2. Графики изменения этих статистик представлены на рис. 2 и 3.

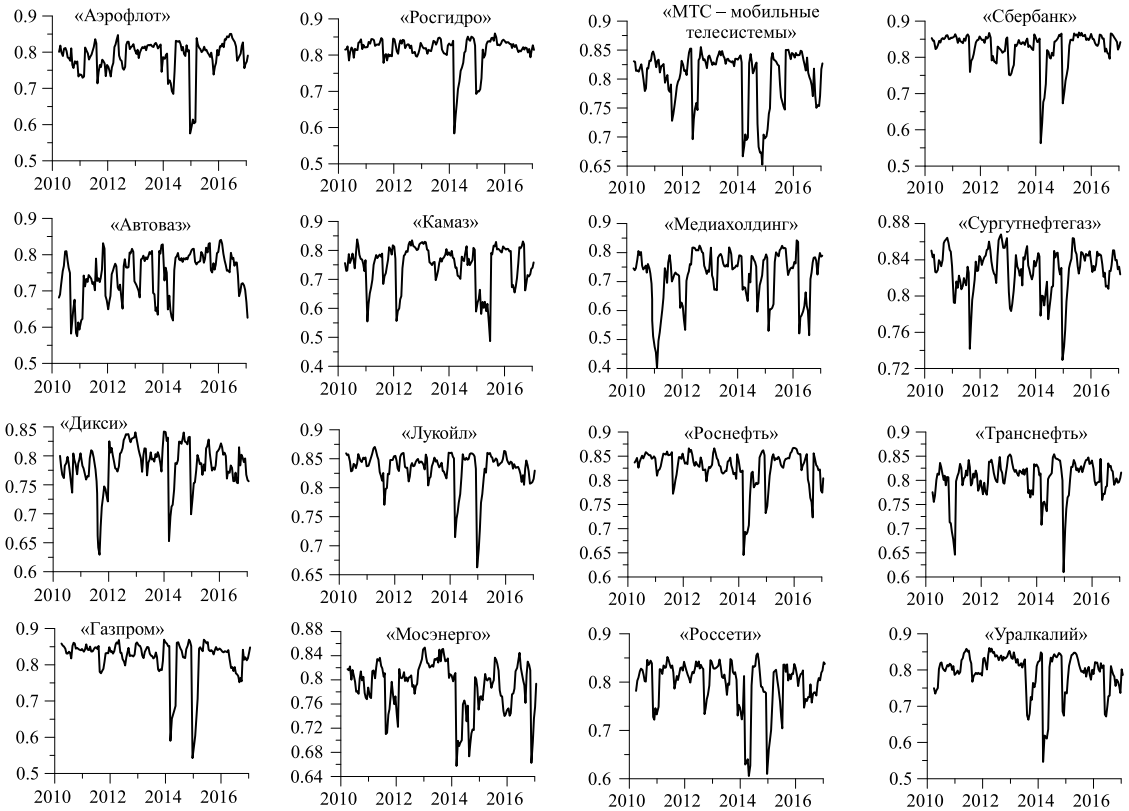

Рис. 2. Оценки минимальной нормализованной энтропии распределения квадратов ортогональных вейвлет-коэффициентов для приращений котировок акций 16 российских компаний, шаг по времени — 1 час. Оценки в скользящем временном окне длиной 500 отсчетов со смещением 100 отсчетов. Временные метки соответствуют правому концу скользящего временного окна

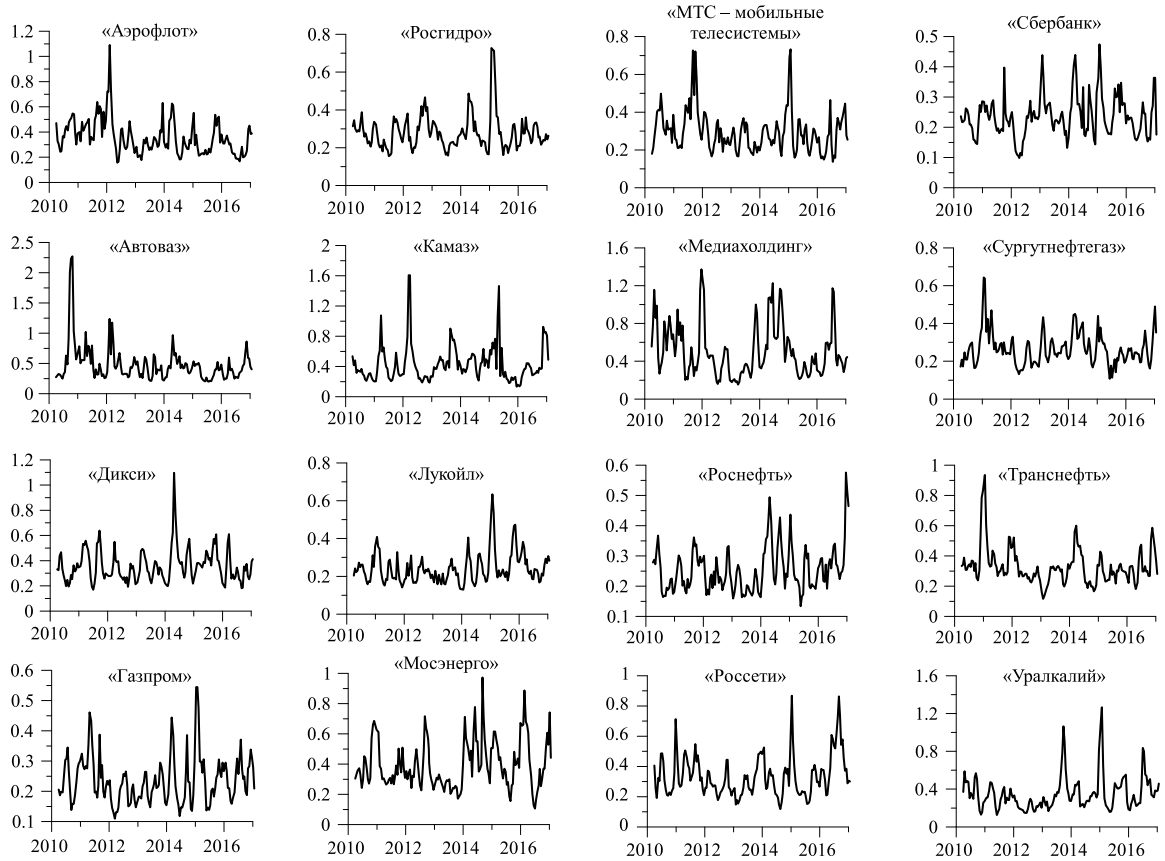

Рис. 3. Оценки авторегрессионной меры нестационарности приращений котировок акций 16 российских компаний, шаг по времени — 1 час. Оценки в скользящем временном окне длиной 500 отсчетов со смещением 100 отсчетов. Временные метки соответствуют правому концу скользящего временного окна

Значения статистик вычислены в скользящем временном окне длиной 500 значений со смещением 100 значений; графики построены в зависимости от временных меток правого конца скользящего временного окна. Физическая длина окна варьируется от 77 до 91 суток, со средним значением 81 суток и медианой 80 суток.

Используемые свойства сигналов можно разбить на 2 группы. Первая группа состоит из трех величин: En, $EnVar$, ρ, для которых мерой отличия анализируемого сигнала от чистого шума являются уменьшенные значения этих статистик. То есть при анализе графиков этих величин аномалиями следует считать временные интервалы, соответствующие глубоким минимумам («провалам») на их графиках (см. рис. 2). Например, наличие больших высокоамплитудных вариаций сигналов, выделяющихся на общем шумовом фоне, очевидно, приводит к уменьшению значений энтропий En, $EnVar$ и меры предсказуемости ρ. Вторая группа величин состоит из параметров γ, α^*, R^2 и κ, для которых, наоборот, аномальные интервалы времени выделяются повышенными значениями (см. рис. 3).

Из графиков на рис. 2 и 3 видно, что котировки акций для различных компаний имеют как индивидуальные, так и общие особенности вариаций значений свойств сигналов в скользящих временных окнах. Поскольку нашей целью является выделение общих аномалий, то простым способом достижения этой цели является усреднение значений анализируемых свойств по всем 16 компаниям в каждом временном окне. Рис. 4 представляет графики таких усредненных величин, и из них уже видно, что выделяются два аномальных интервала времени: конец 2013 г – начало 2014 г. и конец 2014 г. – начало 2015 г.

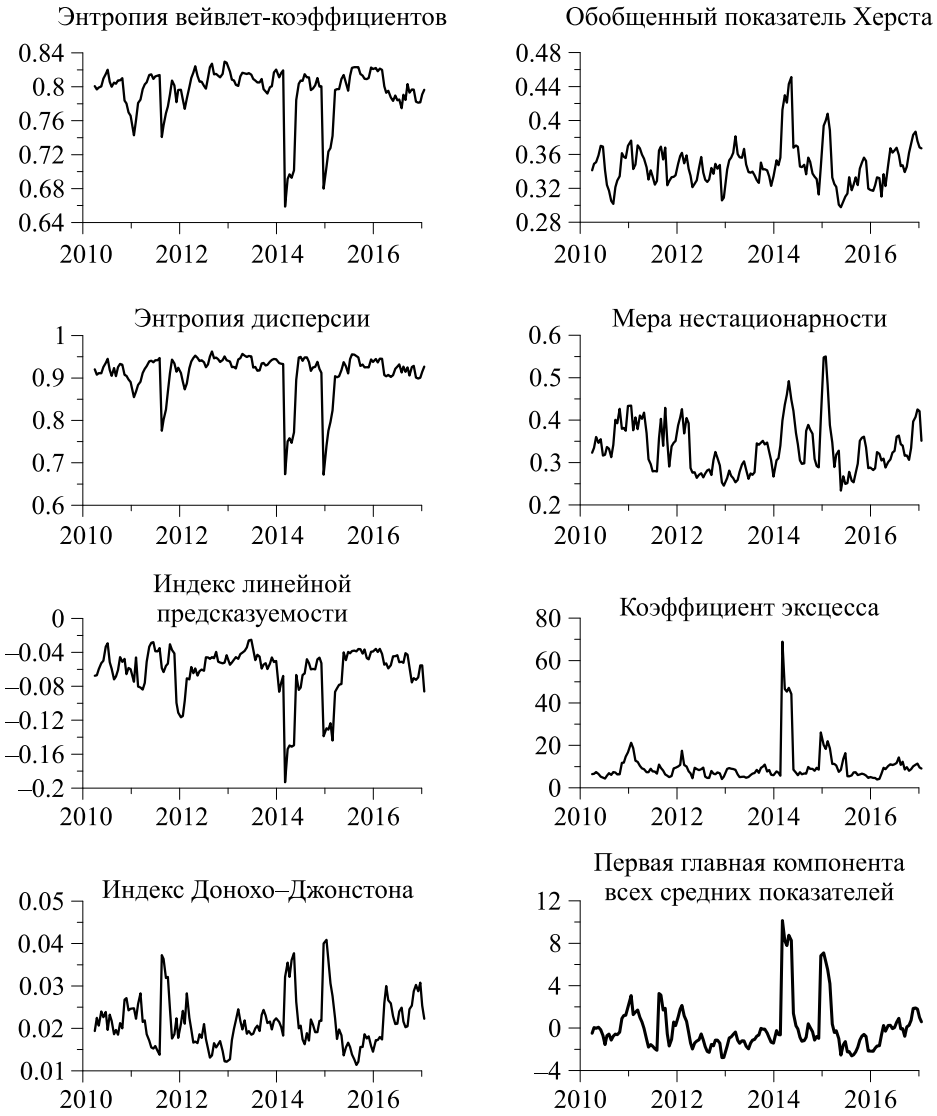

Рис. 4. Графики оценок свойств временных рядов приращений 1-часовых котировок акций в скользящем временном окне длиной 500 отсчетов со смещением 100 отсчетов, усредненных по 16 российским компаниям, и их первой главной компоненты. Временные метки соответствуют правому концу скользящего временного окна

Для последующего более четкого выделения «аномальных» временных интервалов была вычислена первая главная компонента [Айвазян и др., 1989] всех усредненных показателей, то есть результат проекции средних показателей на собственный вектор их ковариационной матрицы, соответствующий максимальному собственному числу. Перед вычислением первой главной компоненты усредненные показатели нормировались: из них вычитались средние значения, после чего они делились на оценки их стандартных отклонений. График первой главной компоненты также представлен на рис. 4. Максимальные значения первой главной компоненты в двух аномалиях соответствуют интервалам времени с 13 декабря 2013 г. по 7 марта 2014 г. и с 19 октября 2014 г. по 11 января 2015 г.

Возникает вопрос о поиске таких интегральных характеристик временных рядов котировок рассматриваемых компаний, которые, возможно, выделяют временные интервалы, предвещающие вхождение рынка в «аномальные» состояния. В качестве такой характеристики рассмотрим среднее значение модулей попарных коэффициентов корреляции между 7 средними статистиками, графики которых представлены на рис. 4, за исключением их первой главной компоненты.

Насчитывается 21 попарный коэффициент корреляции. Вычислим их среднее в скользящем временном окне объемом 30 значений. Физическая длина такого окна (с учетом того, что каждое значение статистики вычисляется по 500 исходным значениям временных рядов, соответствующих 9 часам рабочих дней) варьируется от 535 до 559 суток, со средним значением 550 суток. График среднего значения модулей попарных корреляций представлен на рис. 5.

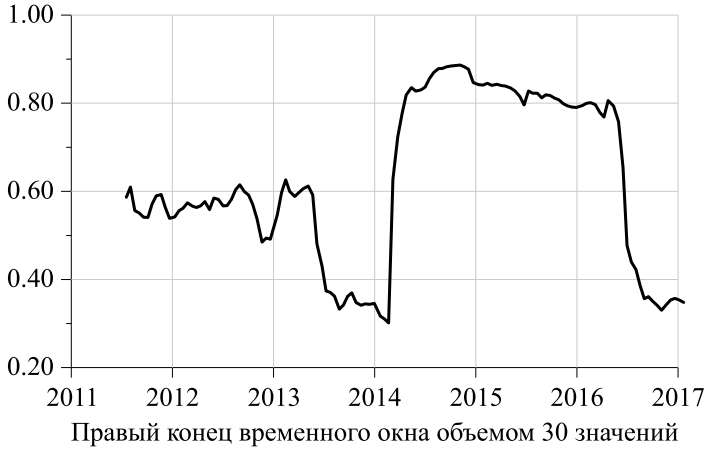

Рис. 5. График среднего, вычисленного от модулей попарных корреляций между значениями 7 исследуемых статистик, усредненных по 16 российским компаниям в скользящем временном окне объемом 30 значений, в зависимости от временной метки правого конца окна

Из графика на рис. 5 видно, что резкое падение средней корреляции от уровня 0.6 до 0.4 и ниже наблюдается для временной метки, соответствующей середине 2013 года, что, с учетом физической длины временного окна, занимает примерно 1.5 года от начала 2012 г. Таким образом, умеренная средняя корреляция на уровне 0.6 претерпевает резкое падение до уровня 0.4, прежде чем столь же резко увеличиться до уровня 0.8 после начала режима санкций.

При рассмотрении эффектов коррелированности свойств большого числа временных рядов возникает естественный вопрос о том, насколько выделенные свойства в действительности являются неочевидными и их выделение требует значительной математической обработки. Нельзя ли увидеть коррелированность на глазок? Визуальный анализ исходных данных на рис. 1, очевидно, не дает такой возможности из-за хаотического поведения приращений сигналов и обилия выбросов. Подвергнем исходные данные достаточно элементарной операции оценки изменения спектра мощности (а точнее, его логарифма) в годовом скользящем временном окне. На рис. 6 представлены такие частотно-временные диаграммы для 16 исходных временных рядов, представленных ранее на рис. 1. Из рассмотрения диаграмм на рис. 6 однозначного вывода о том, что, например, существуют временные интервалы, когда все спектры мощности одновременно убывают или возрастают, сделать нельзя, хотя определенные общие элементы поведения мощности временных рядов наблюдаются для определенных сигналов.

Следует отметить, что переход в частотную область дает возможность анализировать более тонкие эффекты синхронизации по сравнению с вычислением обычных коэффициентов корреляции (рис. 5). Вычислим множественную спектральную меру когерености 7-мерного временного ряда усредненных свойств, графики которых представлены на рис. 4. Для этого пересчитаем изменение этих свойств в скользящем окне длиной 500 значений, но взятых с взаимным сдвигом 5 значений (вместо 100). Уменьшение сдвига временного окна позволяет перейти к более высокому частотному разрешению.

Спектральная мера когерентности [Любушин, 1998, 2007] $\nu(\tau,\omega)$ строится как произведение модулей покомпонентных канонических когерентностей

$$\nu(\tau,\omega)=\prod_{j=1}^{m}|\,\mu_j(\tau,\omega)\,|. \qquad (14)$$

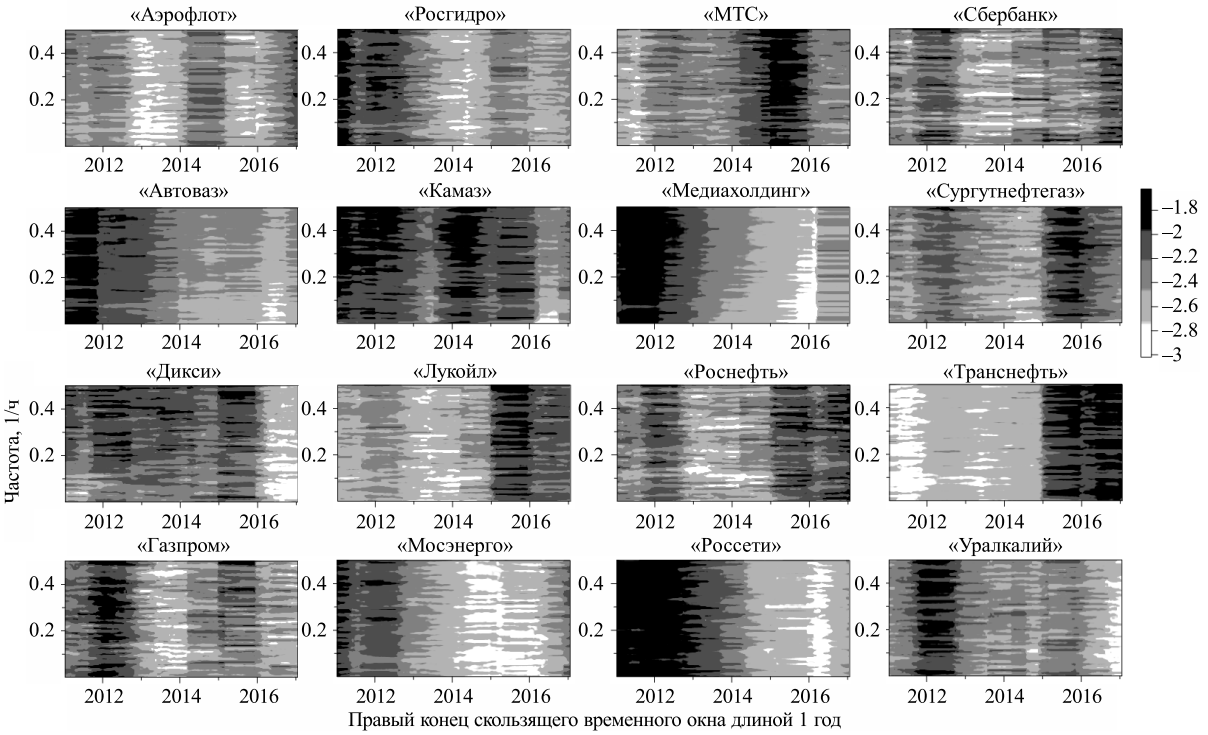

Рис. 6. Оценки эволюции логарифма спектра мощности исходных временных рядов, представленных на рис. 1, в скользящем временном окне длиной 1 год

Здесь $m \geq 2$ — общее число совместно анализируемых временных рядов (размерность многомерного временного ряда), ω — частота, τ — временная координата правого конца скользящего временного окна, состоящего из определенного числа смежных отсчетов, $\mu_j(\tau,\omega)$ — каноническая когерентность *j*-го скалярного временного ряда, которая описывает силу связанности этого ряда со всеми прочими рядами. Величина $|\mu_j(\tau,\omega)|^2$ является обобщением обычного квадратичного спектра когерентности между двумя сигналами на случай, когда второй сигнал является не скалярным, а векторным. Выполняется неравенство $0 \leq |\mu_j(\tau,\omega)| \leq 1,$ и чем ближе значение $|\mu_j(\tau,\omega)|$ к единице, тем сильнее линейно связаны вариации на частоте ω во временном окне с координатой τ *j*-го ряда с аналогичными вариациями во всех прочих рядах. Соответственно, величина $0 \leq \nu(\tau,\omega) \leq 1,$ в силу своего построения, описывает эффект совокупного когерентного (синхронного, коллективного) поведения всех сигналов. Заметим, что в силу построения значение величины $\nu(\tau,\omega)$ принадлежат интервалу [0, 1], и чем ближе соответствующее значение к единице, тем сильнее связь между вариациями компонент многомерного временного ряда на частоте ω для временного окна с координатой τ. Если рассматриваются лишь два временных ряда, $m = 2,$ то функция (14) становится обычным квадратичным спектром когерентности (частотно-зависимым квадратом коэффициента корреляции).

Частотно-зависимые канонические когерентности $\mu_j(\omega)$ вычисляются по формуле

$$\mu_j^2(\omega) = S_j^H(\omega)(S^{(j)}(\omega))^{-1} S_j(\omega) \big/ P_j(\omega). \tag{15}$$

Здесь $S^{(j)}(\omega)$ — эрмитова матрица размером $(m-1)\times(m-1),$ которая получается из полной спектральной матрицы $S(\omega)$ размером $m \times m$ многомерного временного ряда путем удаления

j-го столбца и j-й строки; $S_j(\omega)$ является $(m-1)$-мерным вектором, состоящим из кросс-спектров между j-й компонентой временного ряда и всеми прочими компонентами. Очевидно, что вектор $S_j(\omega)$ состоит из элементов j-го столбца полной спектральной матрицы $S(\omega)$, за исключением элемента в j-й строке; $S_j^H(\omega)$ — эрмитово сопряжение вектора $S_j(\omega)$. Наконец, $P_j(\omega)$ является спектром мощности j-й компоненты многомерного временного ряда, то есть j-м элементом на главной диагонали полной спектральной матрицы $S(\omega)$. Поскольку матрица $S^{(j)}(\omega)$ является эрмитовой и положительно-определенной, то квадратичная форма $S_j^H(\omega)(S^{(j)}(\omega))^{-1}S_j(\omega)$ вещественна и неотрицательна.

Для вычисления величин (15) необходимо вычислить в каждом временном окне спектральную матрицу многомерного временного ряда. Это делается с использованием модели векторной авторегрессии. Технические детали всех вычислений можно найти в [Любушин, 1998, 2007].

На рис. 7, *а* представлены результаты оценки величины множественной спектральной когерентности для 7-мерного временного ряда свойств финансовых временных рядов, усредненных по 16 российским компаниям в виде зависимости от логарифма периода и правого конца скользящего временного окна длиной 1 год. На рис. 7, *б* представлен график среднего значения величины (14) для периодов свыше 30 суток. Из сравнения рис. 5 и рис. 7, *б* видно, что они качественно подобны друг другу. Тем не менее использование спектрального подхода позволяет увидеть детали, недоступные для анализа с помощью вычисления обычных коэффициентов корреляции. Это касается в основном выделения тех частотных полос (или характерных периодов вариаций), на которых наблюдается когерентность.

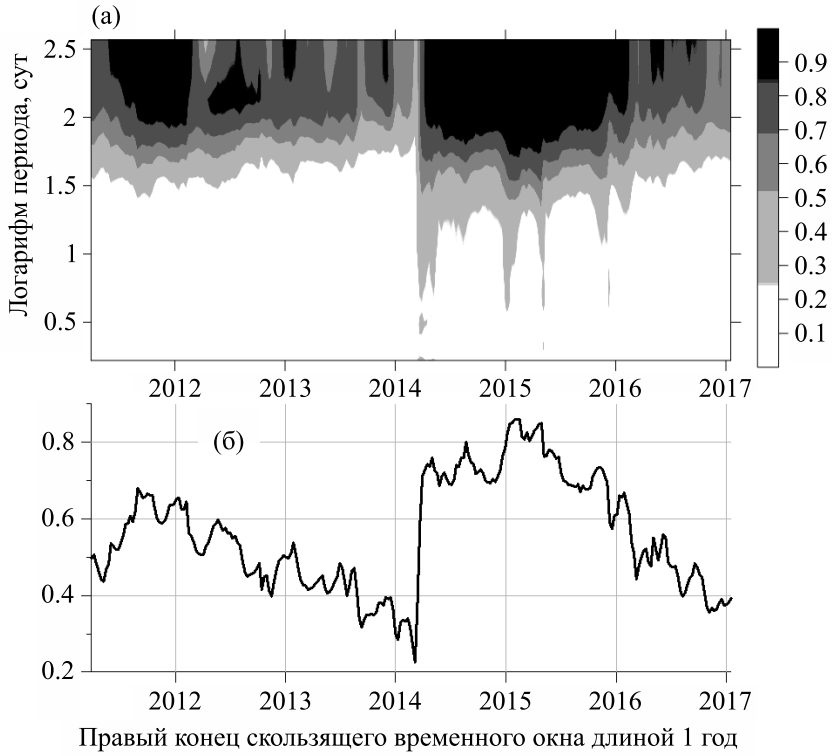

Рис. 7. Оценки эволюции множественного спектра когерентности 7 свойств временных рядов приращений котировок акций после их усреднения по 16 российским компаниям в скользящем временном окне длиной 1 год (а); график среднего значения множественного спектра когерентности, усредненного по периодам больше 30 суток (б)

5. Выводы

Предлагаемый метод является одной из реализаций достаточно универсального подхода к анализу временных рядов мониторинга сложных систем, как природного, так и социального характера (финансовые временные ряды, в частности), основанного на анализе эффектов синхронизации случайных флуктуаций параметров составляющих элементов этих сложных систем. Предложенный метод совместного анализа временных рядов котировок акций заданного числа российских компаний за промежуток времени 2010–2016 гг. позволил выделить два временных интервала, характеризуемых «аномальным» состоянием российского рынка. Первый временной интервал, с середины декабря 2013 г. по середину марта 2014 г., скорее всего, связан с политическим кризисом на Украине, причем следует заметить, что этот временной интервал предшествовал обострению отношений с ЕС и США после присоединения Крыма. Второй «аномальный» временной интервал, с середины октября 2014 г. по середину января 2016 г., вероятно, связан с введением экономических санкций против РФ и последующей адаптацией российского рынка к режиму санкций.

Список литературы (References)

Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
Ayvazyan S. A., Buhshtaber V. M., Enyukov I. S., Meshalkin L. D. Prikladnaya statistica. Klassifikaciya i snizhenie razmernosti [Applied Statistics. Classification and Reduction of Dimensionality]. — Moscow: Finansy i statistica, 1989 (in Russian).

Любушин А. А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. — М.: Наука, 2007.
Lyubushin A. A. Analiz dannyh sistem geofizicheskogo i ekologicheskogo monitoringa [Analysis of the data from geophysical and ecological monitoring systems]. — Mosocw: Nauka, 2007 (in Russian).

Любушин А. А. Анализ канонических когерентностей в задачах геофизического мониторинга // Физика Земли. — 1998. — № 1. — С. 59–66.
Lyubushin A. A. Analysis of Canonical Coherences in the Problems of Geophysical Monitoring // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. — 1998. — Vol. 34, issue 1. — P. 52–58. (Original Russian paper: *Lyubushin A. A.* Analiz canonicheskih cogerentnostey v zadachah geofizicheskogo monitoringa // Fizika Zemli. — 1998. — No. 1. — P. 59–66.)

Любушин А. А. Прогноз Великого Японского землетрясения // Природа. — 2012. — № 8. — С. 23–33.
Lyubushin A. A. Prognoz Velikogo Yaponskogo zemletryaseniya [Prediction of Great Japanese Earthquake] // Russian Nature. — 2012. — No. 8. — P. 23–33 (in Russian).

Любушин А. А. Прогностические свойства случайных флуктуаций геофизических характеристик // Биосфера. — 2014. — № 4. — С. 319–338.
Lyubushin A. A. Prognosticheskie svoistva sluchainyh fluktuaciy geofizicheskih harakteristik [Prognostic properties of stochastic variations in geophysical parameters] // Biosphere. — 2014. — No. 4. — P. 319–338 (in Russian).

Любушин А. А. Статистики временных фрагментов низкочастотных микросейсм: их тренды и синхронизация // Физика Земли. — 2010. — № 6. — С. 86–96.
Lyubushin A. A. The statistics of the time segments of low-frequency microseisms: trends and synchronization // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. — 2010. — Vol. 46, issue 6. — P. 544–554. (Original Russian paper: *Lyubushin A. A.* Statistiki vremennyh fragmentov nizkochastotnyh microseism: ih trendy i sinhronizaciya // Fizika Zemli. — 2010. — No. 6. — P. 86–96.)

Любушин А. А., Малугин В. А., Казанцева О. С. Выделение «медленных событий» в асейсмическом регионе // Физика Земли. — 1999. — № 3. — С. 35–44.
Lyubushin A. A., Malugin V. A., Kazantceva O. S. Recognition of “Slow Events” in an Aseismic Region // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. — 1999. — Vol. 35, issue 3. — P. 195–203. (Original Russian paper: *Lyubushin A. A., Malugin V. A., Kazantceva O. S.* Vydelenie “medlennyh sobytiy” v aseismicheskom regione // Fizika Zemli. — 1999. — No. 3. — P. 35–44.)

Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. — М.: Мир, 2005.
Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. Second edition. 1999. Academic Press. San Diego, London, Boston, New York, Sydney, Tokyo, Toronto. (Russ. ed.: *Mallat S.* Veivlety v obrabotke signalov. — Moskva: Mir, 2005.)

Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
Mandelbrot B. Fractales, hazard et finance. Flammarion, 1997. (Russ. ed.: *Mandelbrot B.* Fraktaly, sluchaj i finansy. — Moskva–Izhevsk: Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, 2004.)

Московская биржа акции [электронный ресурс]: http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp (дата обращения: 06.02.2017).
Moscow Exchange Shares dataset [Electronic resource]: http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp

Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 10. — С. 129–160.
Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line // Mat. Sbornik. — 2006. — Vol. 197, no. 10. — P. 129–160. (English transl., Sbornik: Mathematics, 197 (2006), 1529–1558.)

Родионов Е. А. О применениях вейвлетов к цифровой обработке сигналов // Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, вып. 2. — С. 217–225.
Rodionov E. A. On applications of wavelets in digital signal processing // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. — 2016. — Vol. 16, issue 2. — P. 217–225 (in Russian).

Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C., Ljung G. M. Time Series Analysis: Forecasting and Control, 5th Edition. — John Wiley & Sons. Inc., 2016.

Capobianco E. Multiscale analysis of stock index return volatility // Computational Econom ics. — 2004. — Vol. 23, no. 3. — P. 219–237.

Cramer H. Mathematical Methods of Statistics. — Princeton University Press, 1999.

Donoho D. L., Johnstone I. M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // Journal of the American Statistical Association. — 1995. — Vol. 90, issue 432. — P. 1200–1224.

Feder J. Fractals. — Plenum Press, New York, London, 1988.

Fernandez V., Lucey M. Portfolio management under sudden changes in volatility and hetero geneous investment horizons // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2007. — Vol. 375, no. 2. — P. 612–624.

Gallegati M., Semmler W. Wavelet applications in economics and finance. — Springer, Berlin, 2014.

Gilmore R. Catastrophe theory for scientists and engineers. — John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.

In F., Kim S. An introduction to wavelet theory in finance. — World Scientific, Singapore, 2012.

Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Konscienly-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // Physica A. — 2002. — Vol. 316. — P. 87–114.

Kashyap R. L., Rao A. R. Dynamic stochastic models from empirical data. — New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1976.

Lee H. International transmission of stock market movements: A wavelet analysis // Applied Economics Letters. — 2004. — Vol. 11. — P. 197–201.

Lyubushin A. Multifractal Parameters of Low-Frequency Microseisms // V. de Rubeis et al. (eds.), Synchronization and Triggering: from Fracture to Earthquake Processes, GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg. — 2010. — Chapter 15. — P. 253–272.

Lyubushin A. Prognostic properties of low-frequency seismic noise // Natural Science. — 2012. — Vol. 4, issue 8A. — P. 659–666.

Lyubushin A. A. Dynamic estimate of seismic danger based on multifractal properties of low-frequency seismic noise // Natural Hazards. — 2014. — Vol. 70, issue 1. — P. 471–483.

Nicolis G., Prigogine I. Exploring complexity, an introduction. — W. H. Freedman and Co., New York, 1989.

Perello J., Masoliver J., Bouchaud J.-P. Multiple time scales in volatility and leverage correlations: A stochastic volatility model // Applied Mathematical Finance. — 2004. — Vol. 11. — P. 27–50.

Osorio I., Lyubushin A., Sornette D. Automated seizure detection: Unrecognized challenges, unexpected insights // Epilepsy & Behavior. — 2011. — Vol. 22, issue 1. — P. S7–S17.

Ramsey J., Zhang Z. The analysis of foreign exchange data using waveform dictionaries // C.V. Starr Center for Applied Economics Working paper, New York University, 1995.

Schleicher C. An introduction to wavelets for economists. — Bank of Canada Working Paper, Toronto, 2002.

Subbotin A. A multi-horizon scale for volatility // CES Working Paper 2008.20, University of Paris-1. — 2008. — 44 p.

Voit J. The statistical mechanics of financial markets. — Berlin: Springer, 2005.