

УДК: 519.8

Стабилизирующая роль структуры рыбной популяции в условиях промысла при случайных воздействиях среды обитания

А. И. Абакумов, Ю. Г. Израильский^а

Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

E-mail: ^аizrailsk@iacp.dvo.ru

Получено 05.04.2017, после доработки — 23.06.2017.

Принято к публикации 24.07.2017.

Исследуется влияние промысла на структурированную рыбную популяцию в случайным образом меняющихся условиях среды обитания. Параметры популяции соответствуют массовым видам пелагических рыб дальневосточных морей северо-западной части Тихого океана (минтай, сельдь, сардина). В различных частях Мирового океана обитают похожие виды рыб. В качестве основного признака принимается различие особей по размеру. Это легко измеряемая в промысловых условиях характеристика, она достаточно хорошо определяет основные свойства особей: возраст, половозрелость, другие морфологические и физиологические особенности. Флуктуации внешней среды оказывают существенное влияние на особей в ранних стадиях развития, во взрослом состоянии наблюдающиеся изменения во внешней среде слабо влияют на жизнедеятельность особей. Характеристики промысла выбираются оптимальными с точки зрения дохода от него. Основной управляющей характеристикой промысла являются промысловые усилия. Зависимость дохода от количества промысловых усилий выбрана квадратичной в части затрат от промысла, что соответствует экономическим представлениям о росте затрат при увеличении объемов производства. Модельное исследование показывает, что структура популяции обеспечивает повышенную стабильность популяции. В процессе роста особей и их выбывания из-за естественной смертности сглаживаются колебания плотности численности, возникающие из-за сильного влияния на особей флуктуаций среды обитания на ранних стадиях развития. Сглаживающую роль играет диффузионная составляющая процессов роста. В свою очередь, промысел обладает сглаживающим воздействием по отношению к изменениям (в том числе и стохастическим) среды обитания, существенно влияющим на обилие молоди и последующую динамику обилия популяции рыб. В сравнении с оптимальным переменным по интенсивности промыслом исследован постоянный по интенсивности режим промысла. При этом оказалось, что в динамичных условиях среды и стохастической динамике численности пополнения существует постоянное по времени промысловое усилие, по эффективности близкое к оптимальному переменному промыслу. Это означает, что постоянный или слабо меняющийся по количеству промысловых усилий промысел может оказаться весьма эффективным с точки зрения дохода.

Ключевые слова: математическая модель, популяция, размер особи, флуктуации среды обитания, оптимальный сбор урожая, рыболовство, промысловое усилие, доход

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных исследований Дальневосточного отделения РАН «Дальний Восток», проект № 15-I-4-006 о (0262-2015-0067).

UDC: 519.8

The stabilizing role of fish population structure under the influence of fishery and random environment variations

A. I. Abakumov, Yu. G. Izrail'sky^a

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences,
Radio st. 5, Vladivostok, 690041, Russia

E-mail: ^aizrail'sk@iacp.dvo.ru

*Received 05.04.2017, after completion — 23.06.2017.
Accepted for publication 24.07.2017.*

We study the influence of fishery on a structured fish population under random changes of habitat conditions. The population parameters correspond to dominant pelagic fish species of Far-Eastern seas of the north-western part of the Pacific Ocean (pollack, herring, sardine). Similar species inhabit various parts of the World Ocean. The species body size distribution was chosen as a main population feature. This characteristic is easy to measure and adequately defines main specimen qualities such as age, maturity and other morphological and physiological peculiarities. Environmental fluctuations have a great influence on the individuals in early stages of development and have little influence on the vital activity of mature individuals. The fishery revenue was chosen as an optimality criterion. The main control characteristic is fishing effort. We have chosen quadratic dependence of fishing revenue on the fishing effort according to accepted economic ideas stating that the expenses grow with the production volume. The model study shows that the population structure ensures the increased population stability. The growth and drop out of the individuals' due to natural mortality smoothens the oscillations of population density arising from the strong influence of the fluctuations of environment on young individuals. The smoothing part is played by diffusion component of the growth processes. The fishery in its turn smooths the fluctuations (including random fluctuations) of the environment and has a substantial impact upon the abundance of fry and the subsequent population dynamics. The optimal time-dependent fishing effort strategy was compared to stationary fishing effort strategy. It is shown that in the case of quickly changing habitat conditions and stochastic dynamics of population replenishment there exists a stationary fishing effort having approximately the same efficiency as an optimal time-dependent fishing effort. This means that a constant or weakly varying fishing effort can be very efficient strategy in terms of revenue.

Keywords: mathematical model, population, size of individual, environment fluctuation, optimal harvesting, fishery, fishing effort, profit

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 609–620 (Russian).

The work was supported by Complex Program of Fundamental Researching of Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences "Far East", project no. 15-I-4-006 o (0262-2015-0067)

Введение

Природные популяции подвергаются антропогенным воздействиям разных видов, среди которых наиболее частыми являются загрязнение и сбор урожая [Jorgensen, 1980; Jorgensen, Fath, 2007]. Эти воздействия можно трактовать как управляющие. Динамика обилия видов в сообществе под воздействием управления модельно может описываться задачами оптимального управления над системами дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений разного вида [Clark, 2010; Абакумов, 1993; Алексеев и др., 1979]. Математическая теория оптимального управления развита достаточно хорошо [Иоффе, Тихомиров, 1974], в том числе и для дифференциальных уравнений [Фурсиков, 1999]. В применении к биологическим системам подобные задачи чаще всего существенно нелинейны, что создает трудности в применении известных методов при исследовании проблем существования допустимых и оптимальных решений. В этой ситуации полезны различные соображения в направлении поиска оптимальных решений.

Задачи сбора урожая представляют собой внушительную когорту работ о популяциях и сообществах. Для популяций накопилось большое количество публикаций. Популяции исследовались без учета структур или же со структурами. Модели являются дискретными или непрерывными по времени. Для популяций без учета структур с критерием максимизации дохода от собранного урожая или величины урожая выяснено существование свойств магистральности по аналогии с моделями экономической динамики [Clark, 2010; Свирежев, Елизаров, 1972; Свирежев и др., 1985].

Несколько групп работ посвящены исследованию математических свойств моделей и их решений в случае, когда они описываются уравнениями в частных производных (квазилинейных или параболического типа) с ограничениями, выражаемыми в том числе интегральными операторами. Эти работы касаются моделей популяций с возрастной [Gurtin, MacCamy, 1974; Anita, 2000; Ainseba et al., 2002] или размерной [Kato, 2000, 2008] структурой. Описывается пространственное распределение особей популяции. Речь идет о математических свойствах задач и их решений. В первую очередь это проблемы существования и единственности. Рассматривается динамика пространственного распределения популяций. Используются параболические уравнения с интегральными функционалами — критериями качества решения. Результаты исследований касаются условий существования решений в сложных оптимизационных задачах.

Рыболовство представляет собой обширную область человеческой деятельности. Морское и океаническое рыболовство связано со многими проблемами, в том числе и информационного характера [Меншуткин, Егорова, 2015; Winemiller, 2005; Абакумов и др., 2007]. В первую очередь сказывается недостаток знаний о биологических ресурсах, их состоянии и функционировании. Для рыбных популяций трудноопределяемыми характеристиками являются их пространственно-временная динамика, естественная смертность и формирование пополнения [Ricker, 1975]. Научные экспедиции, промысловая статистика и иные источники информации лишь частично восполняют эти пробелы. Соответствующую область исследований известный специалист в области анализа водных биоресурсов и управления рыбным промыслом К. У. Кларк назвал «Bioeconomics» в своей книге [Clark, 2010] и ее более ранних изданиях. Существенное место занимают экономические аспекты рыболовства [Матишов, Ильичев, 2006].

Другой проблемой рыболовства является сам процесс промысла. С экологической точки зрения важны проблемы технологий промысла (потери неиспользуемой части вылова) и экологические последствия изъятия биоресурса. В теории рыболовства [Ricker, 1975; Clark, 2010] разработаны различные варианты стратегий промысла. В большинстве случаев они описывают какое-либо закономерное состояние популяции или сообщества, например равновесное, или как-либо соответствующее известным характеристикам рыб [Жданова, Фрисман, 2013]. Если же рассматривать динамический режим, то система может находиться в состоянии далеко от равновесного, что существенно влияет на динамику популяции, результаты промысла и последствия промыслового воздействия [Hilborn et al., 2015].

Именно динамические сценарии мы рассматриваем в этой работе. Изучается промысловая популяция рыб с размерной структурой. Сценарии имитируют стохастически меняющуюся численность пополнения. Исследуются динамические режимы процесса промысла и его последствия для популяции рыб.

Модель рыбного промысла

Для рыб одной из важных и легко определяемых характеристик является линейный размер особи [Ricker, 1975]. Обозначим через x нормированный размер особи — в долях к наибольшему возможному размеру, который принят за единицу. Поэтому размер особи в дальнейшем считается величиной безразмерной. В этом случае множество D представляет собой промежуток $D = [0, 1] \subset R$. Время изменяется в промежутке $t \in T = [0, T]$. Время измеряем в годах, и относительно этой единицы определяются все параметры модели (см. таблицу 1). Тогда задача принимает вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(v(x)y)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m(x)y^r - q(x)u(t)y. \quad (1)$$

Здесь $y(t, x)$ — плотность численности особей по размеру в момент времени t . Величина $y(t, x)$ будет измеряться в условных единицах. Через $m(x)$ обозначена удельная естественная смертность (скорость вымирания в силу естественных причин). Часто скорость вымирания принимают линейной относительно плотности численности популяции, но применяются и нелинейные зависимости [Свирижев, Логофет, 1978]. Мы выбрали второй вариант, учитывая конкуренцию особей за жизненные ресурсы. В то же время для природного водоема мы предполагаем эту нелинейность незначительной, что отражено в численном значении параметра r (см. таблицу 1). Функция $q(x)$ обозначает свойство улавливаемости рыб применяемым орудием лова [Ricker, 1975]. Функция v характеризует скорость роста, коэффициент диффузии k определяет разброс при росте особи. Функция $u(t)$ характеризует количество применяемых в единицу времени орудий промысла, то есть промысловые усилия. Это интенсивность промысла, она является управляющей и зависит от времени; размерные характеристики вылавливаемых рыб определяются функцией улавливаемости. Управляющая функция u выбирается из класса кусочно-непрерывных функций U по критерию максимизации дохода от промысла за период времени T :

$$\int_{T \times D} [p(x)q(x)u(t)y(t, x) - c(x)u^2(t)] dt dx \rightarrow \sup_{u \in U}. \quad (2)$$

Функция $p(x)$ описывает удельный доход от промысла, функция $c(x)$ характеризует затраты на интенсивность промысла.

В целом в уравнении (1) описаны рост рыб (первая и вторая производные по переменной размера особей), естественная и промысловая смертности (справа). Критерий (2) определяет доход от промысла с учетом затрат на него. В отличие от большинства моделей сбора урожая [Clark, 2010] затраты на проведение промысла постулированы нелинейной зависимостью от интенсивности промысла: $c(x)u^2(t)$. Это один из примеров подобной нелинейной зависимости, используемой также в моделях экономической динамики [Charles et al., 2015]. Случай линейной зависимости от u изучен весьма основательно, в этом случае управление имеет вид *bang-bang*, принимая минимальные или максимальные значения и являясь кусочно-непрерывной функцией времени [Clark, 2010]. Нам представляется, что такое разрывное управление трудно реализовать в реальной ситуации рыбного промысла. Функция дохода от промысла кусочно-линейна:

$$p(x) = p_0 \frac{1-x}{1-x_0} \theta(x-x_0), \text{ где } \theta(x) \text{ — функция Хэвисайда. Модель описывает ситуацию, когда}$$

промысел осуществляется в местах нереста рыб. Он возможен только для половозрелых рыб, когда они концентрируются в местах промысла. Промысел неполовозрелых особей запрещен.

Многие рыбы в морях промысляются именно таким образом [Ricker, 1975]. Функция $c(x)$ затрат на интенсивность промысла предполагается постоянной.

Метод решения этой задачи может быть изложен в рамках одной из общих схем решения задач оптимального управления над системами уравнений в частных производных [Иоффе, Тихомиров, 1974; Фурсиков, 1999], в алгоритмической форме метод излагается в работе [Абакумов, 2011].

Модельные характеристики популяции

В качестве начального состояния выбираем равновесное состояние при отсутствии промысла. Процедура расчета параметров описана в работе [Абакумов, Израильский, 2016]. Здесь кратко перечислим полученные соотношения, функции и параметры.

Функция $m(x) = m_0 m_1(x)$ естественной смертности содержит функцию $m_1(x)$ с нормировкой $m_1(0) = 1$. Функция $m_1(x)$ подобрана так, что равновесное распределение имеет достаточно традиционный вид [New Advances and Contributions..., 2012]. Параметр m_0 , характеризующий удельную естественную смертность мальков, подбирается из условия равновесности.

Функция улавливаемости является кусочно-постоянной и означает, что рыбы вылавливаются при достижении половозрелости: $q(x) = q_0 \theta(x - x_0)$, где x_0 — размер рыбы, при котором она вступает в половую зрелость. Параметр $q_0 = m_0$ назначен достаточно произвольно, поскольку он просто масштабирует другие параметры.

Функция $v(x) = v_0(1 - x)^\alpha$ характеризует скорость роста, вид такой функции постулируется ихтиологами в рамках теории рыболовства [Fish Physiology, 1979] и соответствует общим представлениям о росте организмов. Коэффициент k разброса скоростей роста особей принимаем равным константе.

Среда обитания моделируется с медленными изменениями (эпохально) периодической функцией $1 + \sin \frac{4\pi t}{T}$ и ежегодными случайными вариациями ξ_i обилия появляющегося в году $i = [t]$ поколения (здесь $[t]$ — целая часть числа t). Таким образом, на границе $x = 0$ для уравнения (1) задается функция $\xi_i \left(1 + \sin \frac{4\pi t}{T}\right) y_0$, где y_0 — начальная численность особей нулевого размера (пополнение). Под рыбами нулевого размера в содержательном смысле мы понимаем состояние малька. Стадии икры, личинок у нас «спрятаны» в описанном случайном процессе зарождения особей. С помощью случайной переменной ξ_i описывается случайный характер формирования пополнения. Параметр ξ_i представляет собой случайную величину со значениями на промежутке $[0, \xi_{\max}]$ ($\xi_{\max} > 1$) и функцией плотности вероятности

$$\begin{cases} \frac{2}{\xi_{\max}} \xi, & \xi \in [0, 1], \\ \frac{2}{\xi_{\max} (\xi_{\max} - 1)} (\xi_{\max} - \xi), & \xi \in [1, \xi_{\max}]. \end{cases} \quad (3)$$

Традиционная связь «запас–пополнение» не используется, так как пополнение у рыб формируется под действием следующих обстоятельств: самки имеют чрезвычайно высокую плодовитость, а икра и личинки подвержены чрезвычайно большой смертности. Смертность особей на ранних стадиях онтогенеза определяется природными условиями среды в местах нереста и чрезвычайно вариабельна. Это означает, что продуктивность нереста зачастую определяется не численностью родителей, а случайно складывающимися условиями среды обитания в местах нереста. Такая ситуация справедлива для многих видов рыб. Наше модельное описание ориентировано именно на такие виды рыб. Это, например, многие пелагические и мезопелагические

промысловые рыбы в дальневосточных морях Тихого океана и других океанов. Среди массовых рыб можно назвать минтай, сельдь, треску, навагу и многие другие виды рыб [Моисеев, 1989].

Расчеты и результаты

Назначенные параметры приведены в таблице 1. Конкретные значения этих параметров не влияют на качественные свойства решений. Единицы измерения также достаточно условны.

Нулевой возраст в нашей модели соответствует возрасту малька, а стадии икры, личинки не рассматриваются. Поэтому в модели сравнительно невелики значения y_0 начальной плотности численности особей нулевого размера (и возраста). Скорость роста, в отличие от классических зависимостей [Ricker, 1975], нелинейно зависит от самого размера: $\alpha < 1$. Классическая зависимость ($\alpha = 1$) соответствует возможности неограниченного возраста жизни. Наш случай согласован с указанной конечной величиной возраста дожития. Коэффициент диффузии соответствует представлению о слабом разбросе скоростей роста.

Зависимость естественной смертности от численности популяции определяется не равным единице параметром $\gamma > 1$. Тем самым мы учитываем нелинейное влияние численности на смертность. Остальные параметры вычислены из данных таблицы 1 согласно схеме предыдущего пункта. Период моделирования мы берем удвоенным по сравнению с максимальным возрастом τ_e жизни: $T = 2\tau_e$.

Таблица 1. Назначаемые параметры

Обозначение	Название	Единица измерения	Численное значение
y_0	Начальная плотность численности особей нулевого размера	усл. ед.	10^2
x_0	Размер вступления в половую зрелость	безразм.	0.35
α	Параметр скорости роста	безразм.	0.83
γ	Параметр функции удельной смертности	безразм.	1.1
k	Коэффициент диффузии	год ⁻¹	10^{-2}
ξ_{\max}	Параметр вариации рождаемости	безразм.	10
τ_e	Максимальный возраст жизни	год	25

Внимание сосредоточено на эффектах случайного пополнения. Пополнение симитировано датчиком случайных чисел. Выбранный сценарий изменения плотности численности пополнения назван *основным* (рис. 1). Все дальнейшие построения основаны на этом сценарии.

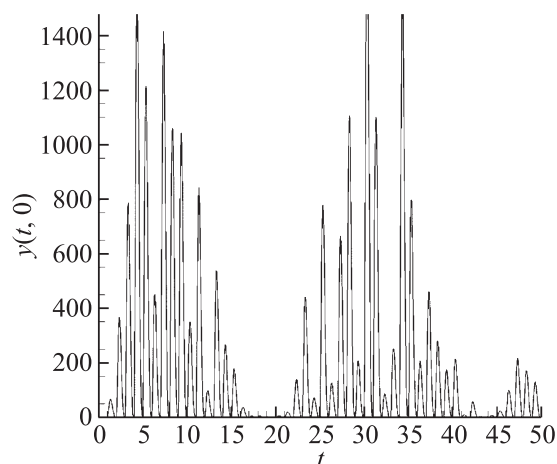


Рис. 1. Основной разыгранный сценарий случайного изменения плотности численности пополнения согласно формуле (3)

Плотность численности рыб без промысла имеет ожидаемый вид (рис. 2). Плотность численности без промысла и с промыслом в своем изменении «следует» за колебаниями численности пополнения с гораздо меньшими градиентами, чем у пополнения.

При оптимальном по критерию (2) режиме промысла плотность численности существенно снижается (рис. 3).

Особенно существенно изменяется промысловая численность. Промысловая численность популяции при сборе урожая в 4-5 раз меньше таковой без промысла (рис. 4).

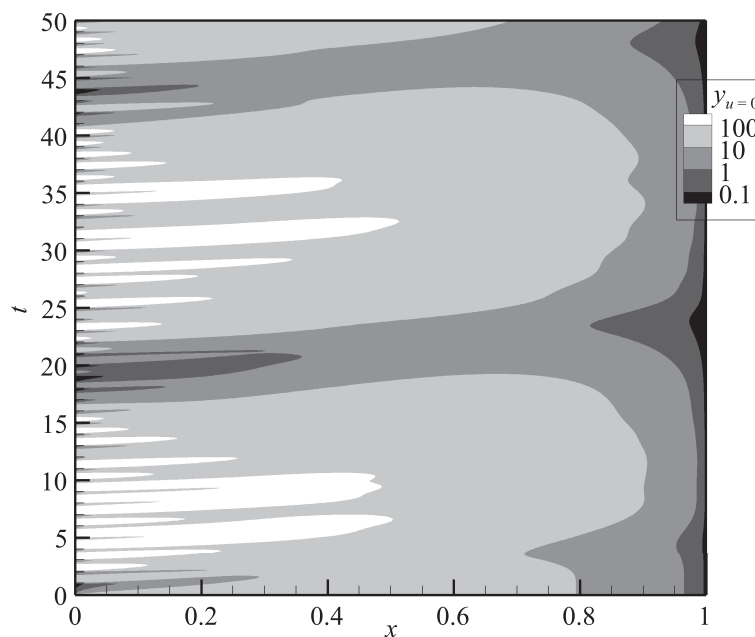


Рис. 2. Плотность численности рыб при отсутствии промысла

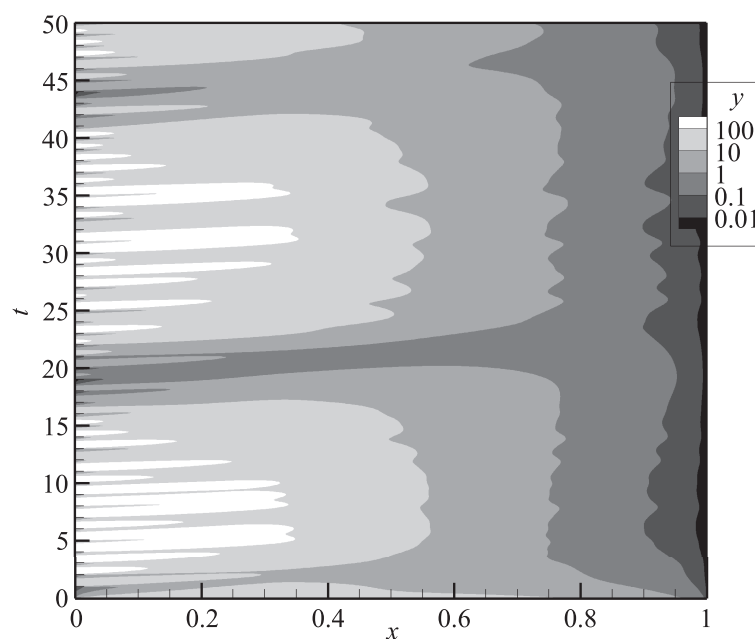


Рис. 3. Плотность численности при оптимальном промысле

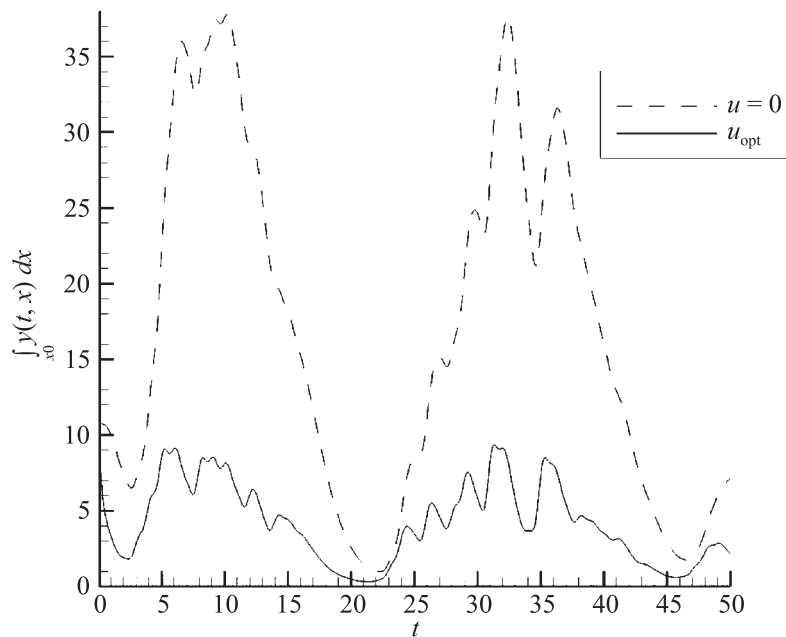


Рис. 4. Плотность промысловой численности без сбора урожая и при оптимальном сборе урожая

В целом плотность численности по размеру снижается, но качественная структура остается похожей. Стохастическое пополнение вынуждает плотность численности популяции и динамику промысла к достаточно резким изменениям (рис. 2–4). В то же время промысловая численность популяции существенно сглажена по сравнению с пополнением. Интенсивность оптимального промысла следует за изменениями плотности численности, но колебания значительно менее интенсивные, чем у пополнения (рис. 5). Это связано с тем, что промысел в каждом году осуществляется в контакте с несколькими поколениями рыб. Это несколько усредняет воздействие урожайных и неурожайных поколений. Кроме того, стохастические изменения пополнений несколько сглаживаются ко времени вступления в промысловый возраст.

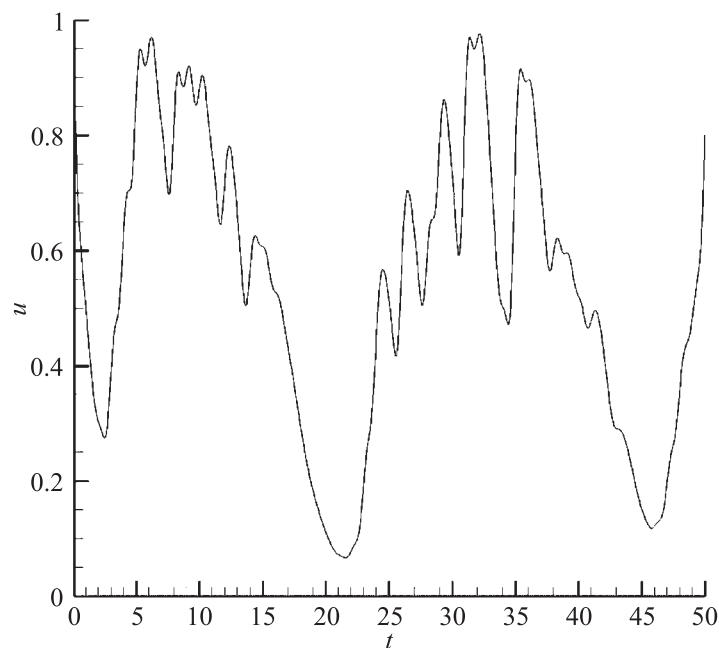


Рис. 5. Интенсивность оптимального сбора урожая

Наибольшее давление промысла особи испытывают при вступлении в промысловый запас. Сбор урожая сосредоточен в основном на рыбах начальных половозрелых размеров. Далее с увеличением размера промысловое давление убывает, но, как правило, в популяции наблюдается уменьшение среднего размера особей. Этот эффект давно отмечен ихтиологами [Моисеев, 1989]. Нелинейность функции дохода (2) от интенсивности промысла кардинально меняет свойства функции управления — интенсивности промысла. Эта функция становится непрерывной и реализуемой, в отличие от разрывного управления в линейном случае [Абакумов, 1993; Clark, 2010].

Рассмотрен вариант оптимального постоянного по интенсивности промысла при стохастическом пополнении. На рис. 6 показана зависимость целевого функционала (2) от промысловых усилий при постоянном по интенсивности промысле. График показывает, что максимальный доход в этом случае достигается при $u = 0.6$, при этом величина дохода от промысла составляет 994, что незначительно отличается от величины дохода при оптимальном переменном промысле, равной 1056.

На рис. 7 показана зависимость величины суммарного улова за все время промысла от постоянных по времени промысловых усилий. При $u = 0.6$ суммарный улов составляет 359 усл. ед. и слабо отличается от суммарного улова при оптимальном промысле, равном 370 усл. ед. На рис. 8 приведена детальная величина улова при оптимальном переменном и оптимальном постоянном ($u = 0.6$) промысле. Постоянная интенсивность промысла оказывает на популяцию воздействие, похожее на оптимальный переменный по интенсивности вариант.

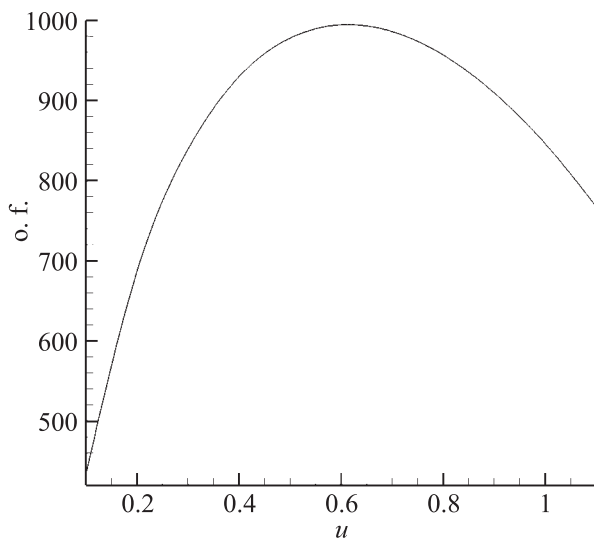


Рис. 6. Зависимость целевого функционала (o. f.) от промысловых усилий (u) при постоянном промысле

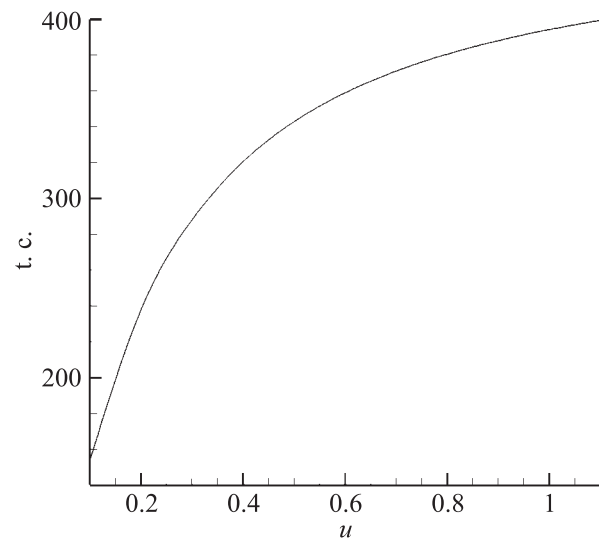


Рис. 7. Зависимость суммарного улова (t. c.) за все время промысла от промысловых усилий (u) при постоянном промысле

Плотность численности при оптимальном постоянном по интенсивности промысле незначительно отличается от нее при оптимальном переменном промысле. Режим оптимального переменного промысла тонко реагирует на вариации численности промысловых поколений, но интегральный результат близок к таковому для оптимального постоянного по интенсивности промысла (рис. 8). Такое свойство позволяет предполагать, что оптимальный режим промысла интегрально по времени близок к режиму, обладающему свойством магистральности аналогично моделям экономической динамики [Makarov, Rubinov, 1977]. Часто это свойство выражается в стационаровании характеристик, в нашем случае — в стационаровании интенсивности промысла.

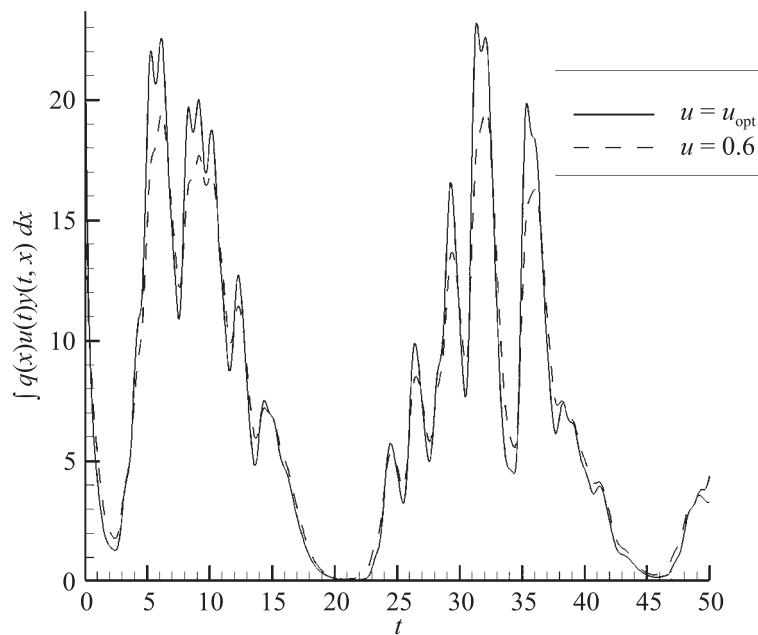


Рис. 8. Количество выловленных рыб при оптимальном переменном и оптимальном постоянном по интенсивности промысле

В целом надо признать, что оптимальный постоянный по интенсивности промысел интегрально по времени так же эффективен, как и оптимальный переменный по интенсивности промысел. На наш взгляд, это согласуется с известной практикой медленного изменения количества промысловых усилий на рыбном промысле от года к году.

Заключение

Итак, рыбная популяция в стохастически меняющихся условиях внешней среды под воздействием промысла может сильно менять свою промысловую численность. Популяция омолаживается — средний возраст особей становится меньше. Но, если не подорван репродуктивный потенциал популяции, она стабилизирует себя при резких воздействиях среды или человека. Популяция сглаживает резкие воздействия среды, своей структурой обеспечивает стабилизацию. Промысел в оптимальном режиме еще более способствует такому сглаживанию. Популяция адекватно реагирует на промысловое давление, сглаживая его динамикой своей структуры. Особи в популяции могут обладать разными стратегиями поведения, но и сама по себе популяционная структура является стабилизирующим фактором при внешних воздействиях [Anita, 2000; Kato, 2008].

В наших расчетах оптимальный постоянный по интенсивности промысел близок по эффективности и результатам к оптимальному переменному по интенсивности промыслу. Этот факт оправдывает применение постоянного по интенсивности промысла в популяционной динамике [Жданова, Фрисман, 2013]. Это результат компьютерных экспериментов, позволяющий надеяться на наличие такого рода стационарности в распределенных моделях популяционной динамики. Можно увидеть аналогию с теоремами о магистралях в «точечных» моделях для популяций [Абакумов, 1993].

При управлении промыслом модельные расчеты позволяют численно оценить рациональные действия по оптимизации промысла и минимизации негативных последствий в динамических условиях внешней среды. Это можно проследить на примерах рыбного промысла в различных районах Мирового океана [Моисеев, 1989; Clark, 2010].

Список литературы (References)

- Абакумов А. И.* Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. — Владивосток: Дальнаука, 1993.
Abakumov A. I. Upravlenie i optimizaciya v modelyah ehkspluatiruemyh populyacij [Control and optimization in the models of exploited populations]. — Vladivostok: Dal'nauka, 1993 (in Russian).
- Абакумов А. И.* Оптимальное управление популяцией с распределенными параметрами // Информатика и системы управления. — 2011. — № 29. — С. 3–9.
Abakumov A. I. Optimal'noe upravlenie populyaciej s raspredelennymi parametrami [Optimal control of the population with distributed parameters] // Informatika i sistemy upravleniya. — 2011. — No. 29. — P. 3–9 (in Russian).
- Абакумов А. И., Бочаров Л. Н., Каредин Е. П., Решетняк Т. М.* Модельный анализ и ожидаемые результаты оптимизации многовидовых промыслов прикамчатских вод // Вопросы рыболовства. — 2007. — Т. 8, № 1 (29). — С. 93–109.
Abakumov A. I., Bocharov L. N., Kareidin E. P., Reshetnyak T. M. Model'nyj analiz i ozhidaemye rezul'taty optimizacii mnogovidovyh promyslov prikamchatskih vod [Model analysis and expected results of multi-species near Kamchatka fishery optimization] // Voprosy rybolovstva. — 2007. — Vol. 8, no. 1 (29). — P. 93–109 (in Russian).
- Абакумов А. И., Израильский Ю. Г.* Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию // Математическая биология и биоинформатика. — 2016. — Т. 11, № 2. — С. 191–204.
Abakumov A. I., Izrail'skij Yu. G. Effekty promyslovogo vozdejstviya na rybnuyu populyaciju [The impact of fishery on fish population] // Matematicheskaya biologiya i bioinformatika. — 2016. — Vol. 11, no. 2. — P. 191–204 (in Russian).
- Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.
Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. — Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
- Жданова О. Л., Фрисман Е. Я.* Влияние оптимального промысла на характер динамики численности и генетического состава двухвозрастной популяции // Известия РАН. Сер. биологическая. — 2013. — № 6. — С. 738–749.
Zhdanova O. L., Frisman E. Ya. Vliyanie optimal'nogo promysla na harakter dinamiki chislennosti i geneticheskogo sostava dvuhvozrastnoj populyacii [The influence of optimal harvesting on the character of population dynamics and its genetic composition for two age group population] // Izvestiya RAN. Ser. biologicheskaya. — 2013. — No. 6. — P. 738–749 (in Russian).
- Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
Ioffe A. D., Tihomirov V. M. Teoriya ehkstreml'nyh zadach [Theory of extremal problems]. — Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
- Матишов Г. Г., Ильичев В. Г.* Об оптимальной эксплуатации водных ресурсов. Концепция внутренних цен // Доклады Академии наук. — 2006. — Т. 406, № 2. — С. 249–251.
Matishov G. G., Il'ichev V. G. Ob optimal'noj ehkspluatatsii vodnyh resursov. Konceptsiya vnutrennih cen [On optimal exploitation of aquatic resources. Internal prices concept] // Doklady Akademii nauk. — 2006. — Vol. 406, no. 2. — P. 249–251 (in Russian).
- Меншуткин В. В., Егорова Н. А.* Применение имитационного моделирования при оценке общего допустимого улова // Вопросы рыболовства. — 2015. — Т. 16, № 3. — С. 367–375.
Menshutkin V. V., Egorova N. A. Primenenie imitacionnogo modelirovaniya pri ocenke obshchego dopustimogo ulova [The use of simulation study to estimate the total allowable catch] // Voprosy rybolovstva. — 2015. — Vol. 16, no. 3. — P. 367–375 (in Russian).
- Моисеев П. А.* Биологические ресурсы Мирового океана. — М.: Агропромиздат, 1989.
Moiseev P. A. Biologicheskie resursy Mirovogo okeana [Biological resources of the World Ocean]. — Moscow: Agropromizdat, 1989 (in Russian).
- Свирижев Ю. М., Елизаров Е. Я.* Математическое моделирование биологических систем // Проблемы космической биологии. — Т. 20. — М.: Наука, 1972.
Svirizhev Yu. M., Elizarov E. Ya. Matematicheskoe modelirovanie biologicheskikh sistem [Mathematical modeling of biological systems] // Problemy kosmicheskoy biologii. — Vol. 20. — Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
Svirizhev Yu. M., Logofet D. O. Ustojchivost' biologicheskikh soobshchestv [Stability of biological cenoses]. — Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).

- Свиричев Ю. М., Абакумов А. И., Тимофеев Н. Н.* Некоторые задачи экоддинамики эксплуатируемых популяций и сообществ // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. — 1985. — Т. 8. — С. 246–257.
- Svirezhev Yu. M., Abakumov A. I., Timofeev N. N.* Nekotorye zadachi ehkodynamiki ehkspluatiruemyh populyacij i soobshchestv [Some problems of dynamics of exploited ecological populations and systems] // Problemy ehkologicheskogo monitoringa i modelirovaniya ehkosistem. — 1985. — Vol. 8. — P. 246–257 (in Russian).
- Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
- Fursikov A. V.* Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya [Optimal control of the distributed systems. Theory and applications]. — Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1999 (in Russian).
- Anita S.* Analysis and Control of Age-Dependent Population Dynamics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- Ainseba B., Anita S., Langlais M.* Optimal control for a nonlinear age-structured population dynamics model // Electronic journal of differential equations. — 2002. — Vol. 2002, no. 28. — P. 1–9. URL: <http://ejde.math.unt.edu>
- Charles A., Garcia S. M., Rice J.* Balanced harvesting in fisheries: economic considerations // ICES J. Mar. Sci. first published online September 10, 2015. DOI:10.1093/icesjms/fsv161
- Clark C. W.* Mathematical Bioeconomics. The Mathematics of Conservation. — Third Edition. — New Jersey: J. Wiley and Sons Publ., 2010.
- Biology of World Fishes // A. C. L. G. Gunther and J. A. Thomson, Arise Publishers, 2012, vii, 482 p., 321 b/w figs, ISBN: 9789380162737.
- Gurtin M. E., MacCamy R. C.* Nonlinear age-dependent population dynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1974. — Vol. 54. — P. 281–300.
- Hilborn R., Fulton E. A., Green B. S., Hartmann K., Tracey S. R., Watson R. A.* When is a fishery sustainable? // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. — 2015. — Vol. 72, no. 9. — P. 1433–1441. DOI: 10.1139/cjfas-2015-0062
- Fish Physiology. Bioenergetics and Growth / Ed. W. S. Hoar, D. J. Randall, J. R. Brett. — 1979. — Vol. 8. — New York, San Francisco, London.
- Jørgensen S. E.* Lake management. Water development, supply and management. — Vol. 14. — Oxford: Pergamon Press, 1980.
- Jørgensen S. E., Fath B.* A New Ecology. Systems Perspectives. — Amsterdam: Elsevier, 2007.
- Kato N.* Optimal harvesting for nonlinear size-structured population dynamics // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 342. — P. 1388–1398.
- Kato N.* Positive global solutions for a general model of size-dependent population dynamics // Abstr. Appl. Anal. — 2000. — No. 5. — P. 191–206.
- Makarov V. L., Rubinov A. M.* Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria. — New York: Springer-Verlag, 1977.
- Ricker W. E.* Computation and interpretation of Biological statistics of fish populations // Bulletin of the Fisheries Research Board of Canada. — 1975. — No. 191.
- New Advances and Contributions to Fish Biology // Ed. by Hakan Türker. — InTech, 306 p. DOI: 10.5772/45635
- Winemiller K. O.* Life history strategies, population regulation, and implications for fisheries management // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences. — 2005. — Vol. 62, no. 4. — P. 872–885.