

УДК: 530.192: 536.94: 538.91: 519.633

## Рождение и развитие беспорядка внутри упорядоченного состояния в пространственно распределенной модели химической реакции

С. Е. Курушина, Е. А. Шаповалова

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»,  
Россия, 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, д. 34

E-mail: geyn@inbox.ru

Получено 24.01.2017, после доработки — 12.02.2017.  
Принято к публикации 20.06.2017.

В работе изложены основные моменты приближения среднего поля в применении к многокомпонентным стохастическим реакционно-диффузионным системам.

Представлена изучаемая модель химической реакции — брюсселятор. Записаны кинетические уравнения реакции, учитывающие диффузию промежуточных компонент и флуктуации концентраций исходных веществ. Флуктуации моделируются как случайные гауссовы однородные и изотропные в пространстве поля, с нулевым средним и пространственной корреляционной функцией, имеющей нетривиальную структуру. В работе рассматриваются значения параметров модели, соответствующие пространственно неоднородному упорядоченному состоянию в детерминированном случае.

В работе получено одноточечное двумерное нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка в интерпретации Стратоновича в приближении среднего поля для пространственно распределенного стохастического брюсселятора, которое описывает динамику плотности распределения вероятностей значений концентраций компонент рассматриваемой системы. Найдены значения интенсивности внешнего шума, соответствующие двум типам решений уравнения Фоккера–Планка: решению с временной бимодальностью и решению с многократным чередованием одно- и бимодального видов плотности вероятностей. Проведено численное исследование динамики плотности распределения вероятностей и изучено поведение во времени дисперсий, математических ожиданий и наиболее вероятных значений концентраций компонент при различных значениях интенсивности шума и бифуркационного параметра в указанных областях параметров задачи.

Показано, что, начиная с некоторого значения интенсивности внешнего шума, внутри упорядоченной фазы зарождается беспорядок, существующий конечное время, причем чем больше шум, тем больше его время жизни. Чем дальше от точки бифуркации, тем меньше шум, который его порождает, и тем уже область значений интенсивности шума, при которых система эволюционирует к упорядоченному, но уже новому статистически стационарному состоянию. При некотором втором значении интенсивности шума возникает перемежаемость упорядоченной и разупорядоченной фаз. Увеличение интенсивности шума приводит к тому, что частота перемежаемости увеличивается.

Таким образом, показано, что сценарием шумоиндуцированного перехода «порядок–беспорядок» в изучаемой системе является перемежаемость упорядоченной и разупорядоченной фаз.

Ключевые слова: приближение среднего поля, системы реакционно-диффузионного типа, нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка, динамические фазовые переходы, беспорядок

UDC: 530.192: 536.94: 538.91: 519.633

## Origin and growth of the disorder within an ordered state of the spatially extended chemical reaction model

S. E. Kurushina, E. A. Shapovalova

Samara National Research University,  
Moskovskoye shosse 34, Samara, 443086, Russia

E-mail: geyn@box.ru

*Received 24.01.2017, after completion — 12.02.2017.*

*Accepted for publication 20.06.2017.*

We now review the main points of mean-field approximation (MFA) in its application to multicomponent stochastic reaction-diffusion systems.

We present the chemical reaction model under study — brusselator. We write the kinetic equations of reaction supplementing them with terms that describe the diffusion of the intermediate components and the fluctuations of the concentrations of the initial products. We simulate the fluctuations as random Gaussian homogeneous and spatially isotropic fields with zero means and spatial correlation functions with a non-trivial structure. The model parameter values correspond to a spatially-inhomogeneous ordered state in the deterministic case.

In the MFA we derive single-site two-dimensional nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation in the Stratonovich's interpretation for spatially extended stochastic brusselator, which describes the dynamics of probability distribution density of component concentration values of the system under consideration. We find the noise intensity values appropriate to two types of Fokker–Planck equation solutions: solution with transient bimodality and solution with the multiple alternation of unimodal and bimodal types of probability density. We study numerically the probability density dynamics and time behavior of variances, expectations, and most probable values of component concentrations at various noise intensity values and the bifurcation parameter in the specified region of the problem parameters.

Beginning from some value of external noise intensity inside the ordered phase disorder originates existing for a finite time, and the higher the noise level, the longer this disorder “embryo” lives. The farther away from the bifurcation point, the lower the noise that generates it and the narrower the range of noise intensity values at which the system evolves to the ordered, but already a new statistically steady state. At some second noise intensity value the intermittency of the ordered and disordered phases occurs. The increasing noise intensity leads to the fact that the order and disorder alternate increasingly.

Thus, the scenario of the noise induced order–disorder transition in the system under study consists in the intermittency of the ordered and disordered phases.

Keywords: mean field approximation, reaction-diffusion systems, nonlinear self-consistent Fokker–Planck equation, dynamical phase transitions, disorder

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 595–607 (Russian).

## 1. Введение

Приближение среднего поля (MFT) применяется для изучения поведения сложных стохастических систем, состоящих из большого числа отдельных компонент, взаимодействующих между собой. Этот подход применяется тогда, когда получение точного решения является достаточно трудным или невозможным, и имеет широкую область применения. Несмотря на то, что в рамках данного подхода для решения различных задач предложены различные процедуры усреднения, все же основная идея MFT заключается в замене всех взаимодействий с любой одной компонентой средним взаимодействием. Одним из примеров многочастичной системы с внутренним взаимодействием является модель Изинга, представляющая собой математическую модель ферромагнетика. В работе [Deviren, Keskin, 2010] в приближении среднего поля исследованы динамические фазовые переходы и определены температуры компенсации в смешанной модели Изинга, состоящей из двух взаимопроникающих подрешеток со спинами частиц  $3/2$  и  $5/2$ , с учетом взаимодействия кристаллических полей и изменяющегося во времени магнитного поля. Чтобы записать динамические уравнения в приближении среднего поля, авторы [Deviren, Keskin, 2010] используют глауберовские скорости переходов.

Другой пример — нейронная сеть, состоящая из нейронов, взаимодействующих между собой. Эта математическая модель является аналогом биологической нейронной сети. В [Williams-García et al., 2014] вводят аналитическое MFT, характеризующее неравновесные фазовые переходы кортикальной модели ветвления (CBM). Сеть моделируется с помощью клеточных автоматов. Правила клеточных автоматов CBM аппроксимируются марковским стохастическим процессом. В этой работе в каждой итерации среднего поля вероятность того, что некоторый узел находится в конкретном состоянии, равна доле всех узлов в этом состоянии. В типичном же случае приближение среднего поля заключается в том, что репрезентативный узел и его локальная окрестность взаимодействия используются для аппроксимации поведения сети в целом.

Современные системы (например, социальные, биологические сети) становятся во все большей степени взаимосвязанными друг с другом и формируются как «сети сетей». Такие сложные системы, как правило, состоят из подсетей, которые взаимодействуют между собой непосредственно или косвенно. В соответствующих динамических явлениях, таких как передача информации, компьютерных вирусов и болезней, образуются сложные неоднородные пространственно-временные структуры. В [Chen, Wu, 2015] MFT используется для моделирования структур, образующихся при распространении эпидемии в сетях, связанных между собой. Среднее поле моделируется типичным способом.

В работе [Chavanis, 2014] рассмотрены динамика и термодинамика модели броуновского среднего поля, в [Cēbers, 2014] получено решение кинетических уравнений в MFT для связанного через поток поступательного и вращательного движения частиц, в [Kudrnovsky et al., 2014] проведена оценка температуры Кюри в сплавах  $\text{Fe}_3\text{Al}$ ,  $\text{Fe}_3\text{Si}$ , в [Bricmont, Bosch, 2015] показано существование фазовых переходов для вероятностных клеточных автоматов. Кроме того, MFT нашло широкое применение в исследованиях квантовых явлений [Ayik, 2008; Horvath et al., 2008; Graefe et al., 2008; Akerlund et al., 2013; Sowinski, Chhajlany, 2014; Bighin, Salasnich, 2014; Hayami, Motome, 2015; Hinschberger et al., 2015; Leeuw et al., 2015; Ishihara, Nasu, 2015; Rosati et al., 2014; Serreau, Volpe, 2014; Vermersch, Garreau, 2015; Yilmaz et al., 2014; Yilmaz et al., 2015], в частности для описания динамики ядер [Ayik, 2008], получения динамики среднего поля на сфере Блоха для эрмитова и неэрмитова случаев [Graefe et al., 2008], изучения свойств обобщенной модели Бозе–Хаббарда, включающей трехмерные взаимодействия при нулевой температуре [Sowinski, Chhajlany, 2014], получения наиболее обобщенных уравнений эволюции, описывающих распространение в среде (анти)нейтрино [Serreau, Volpe, 2014], исследования эволюции системы взаимодействия ультрахолодных бозонов, которые демонстрируют нелинейное хаотическое поведение в пределе большого числа частиц [Vermersch, Garreau, 2015].

Важной особенностью MFT является возможность его применения при изучении динамических систем, которые описывают различные физические, химические, биологические, социальные модели и часто задаются системой дифференциальных уравнений. Так, в [Araújo et al., 2015] изучается модель формирования мнения в обществе, объединенном через общую сеть. Управляющее уравнение, описывающее эволюцию мнения во времени, представлено и решено в MFT, что позволяет охватить наиболее важные особенности относительно стационарного состояния модели. Разработанный в [Araújo et al., 2015] метод может применяться для модели эпидемии и модели «хищник–жертва». В работе [Aguilar et al., 2013] используется MFT для пространственной модели «хозяин–возбудитель», чтобы продемонстрировать возникающие в ней интересные эволюционные свойства. Рассмотрены случаи для одного и двух типов возбудителя. Показана эволюция возбудителя и получены уравнения для численного моделирования.

MFT также успешно модифицировано для исследования шумоиндуцированных явлений в пространственно распределенных системах. В [Lindner et al., 2004] рассмотрено поведение теоретических моделей возбудимых систем, управляемых гауссовским белым шумом. В качестве прототипа возбудимой стохастической динамической системы рассмотрена модель ФитцХью–Нагумо, а также модель клеточных автоматов. В этих системах изучаются различные шумоиндуцированные явления, такие как шумоиндуцированные колебания, стохастический резонанс, стохастическая синхронизация, шумоиндуцированные фазовые переходы. В [Carrillo et al., 2003] обсуждаются внутренние шумовые эффекты, возникающие в системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных, включающих в себя мультипликативный шум. Здесь приближение среднего поля состоит в замене точного значения поля в соседних точках в уравнении Ланжевена или Фоккера–Планка общим значением среднего поля. В [Zaikin et al., 1999] показано, что аддитивный шум может вызывать неравновесный фазовый переход первого порядка в нелинейной решетке передемпфированных осцилляторов с аддитивным и мультипликативным шумами. В [Carrillo et al., 2002] рассмотрены неравновесные фазовые переходы первого и второго рода, индуцированные внешним нелинейным мультипликативным шумом. В [Kurushina et al., 2014] приближение среднего поля развито для многокомпонентных стохастических пространственно распределенных систем и применено для исследования процессов формирования и разрушения пространственных структур под действием внешнего шума.

Представленный выше обзор демонстрирует разнообразие методик в рамках одного подхода и свидетельствует о том, что MFT является гибким и эффективным инструментом для изучения широкого круга шумоиндуцированных явлений как на микро-, так и на макроскопическом уровне.

Цель настоящей работы — в приближении среднего поля изучить динамику плотности распределения вероятностей и статистические характеристики концентраций веществ в пространственно распределенной модели химической реакции «брюсселятор» с мультипликативным шумом в процессе перехода от упорядоченного состояния к беспорядку и определить сценарий шумоиндуцированного перехода «порядок–беспорядок».

Остальная часть статьи организована следующим образом. В § 2 рассматриваются основные моменты приближения среднего поля в его применении к многокомпонентным стохастическим реакционно-диффузионным системам. В § 3 представлены изучаемая модель химической реакции (стохастический пространственно распределенный брюсселятор) и нелинейное самосогласованное уравнение Фоккера–Планка (NSCFPE) для нее. Здесь описаны различные типы решений этого уравнения. В § 4 определены значения интенсивности шума, соответствующие тем типам решений NSCFPE, в которых возникает бимодальный вид плотности распределения вероятностей, а значит, начинает разрушаться упорядоченное состояние. Здесь представлены динамика плотности распределения вероятностей и статистические характеристики первого и второго порядка концентраций веществ в найденной области. Представленные зависимости позволяют сделать вывод о том, каким путем разрушается упорядоченное состояние и рождается беспорядок. Наконец, некоторые выводы представлены в § 5.

## 2. Приближение среднего поля для многокомпонентных стохастических систем «реакция–диффузия»

Изложим здесь основные моменты MFT в применении к многокомпонентным стохастическим реакционно-диффузионным системам [Курушина и др., 2014], чтобы пояснить двумерное NSCFPE, на основании решений которого будет проанализирована динамика изучаемой модели химической реакции и которое будет представлено в следующем параграфе.

Рассмотрим обобщенную модель — систему стохастических уравнений реакционно-диффузионного типа:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(x_1, \dots, x_n) + g_i(x_1, \dots, x_n) \zeta_i(\mathbf{r}, t) + \eta_i(\mathbf{r}, t) + D_i \nabla^2 x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $x_i$  — функции, определяющие состояние системы, содержащей  $n$  компонент;  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  — нелинейные функции, определяющие взаимодействие и эволюцию компонент  $x_i$  в пространстве и во времени;  $D_i$  — коэффициенты диффузии компонент. Аддитивные случайные гауссовы поля  $\eta_i(\mathbf{r}, t)$  с нулевым средним и корреляционными функциями  $K[\eta_i(\mathbf{r}, t), \eta_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\zeta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \delta_{ii'}$  моделируют внутренние белые шумы с интенсивностями  $\zeta_i$ . Мультипликативные случайные гауссовы однородные и изотропные в пространстве поля  $\xi_i(\mathbf{r}, t)$  с нулевым средним и корреляционными функциями  $K[\xi_i(\mathbf{r}, t), \xi_{i'}(\mathbf{r}', t')] = 2\theta_i \Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - t') \delta_{ii'}$  моделируют внешние шумы.  $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  — пространственная корреляционная функция внешних шумов и  $\theta_i$  их интенсивности. Для определенности в дальнейшем мы будем использовать экспоненциальные пространственные корреляционные функции  $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \exp[-k_{fi}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)]$ , где корреляционные длины  $r_{fi}$  шумов определяются как  $r_{fi} = 1/k_{fi}$ . Здесь и далее для корреляционной функции используется обозначение  $K[F_1, F_2]$ , определяемое равенством  $K[F_1, F_2] = \langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$ .

Проведем дискретизацию непрерывного  $d$ -мерного пространства системы (1) и получим регулярную  $d$ -мерную решетку с размером ячейки  $\Delta r = 1$  и точками, положение которых будем характеризовать векторами  $\mathbf{r}_l$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Предположим, что взаимодействие осуществляется только между ближайшими соседями, тогда оператор Лапласа можно аппроксимировать конечно-разностным выражением с разностью второго порядка. В результате дискретизации система (1) заменяется на систему  $n \times p$  обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{il}}{dt} = F_{il}(t), \quad i = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, p, \quad F_{il}(t) = f_{il} + g_{il} \zeta_{il}(t) + \eta_{il}(t) + \frac{D_i}{2d} \sum_{l'} \Lambda_{ll'} x_{il'}. \quad (2)$$

В (2) введены следующие обозначения:  $f_{il} = f_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$ ,  $g_{il} = g_i(x_{1l}, \dots, x_{nl})$ .  $\sum_{l'} \Lambda_{ll'}$  — дискретный аналог оператора Лапласа [Ibañes et al., 1999]:  $\sum_{l'} \Lambda_{ll'} = \sum_{l'} (\delta_{nn(l), l'} - 2d \delta_{l, l'})$ , где  $nn(l)$  — совокупность индексов всех точек, являющихся ближайшими соседями точки с индексом  $l$ . Дискретные шумы  $\eta_{il}(t)$ ,  $\zeta_{il}(t)$  имеют корреляционные функции

$$K[\eta_{il}(t), \eta_{i'l'}(t')] = 2\zeta_i \delta_{ll'} \delta(t - t') \delta_{ii'}, \quad \text{и} \quad K[\xi_{il}(t), \xi_{i'l'}(t')] = 2\theta_i \Phi_{i, |l-l'|} \delta(t - t') \delta_{ii'}. \quad (3)$$

Непрерывная дельта-функция  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  в (3) заменена дельта-символом Кронекера  $\delta_{ll'}$ ,  $\Phi_{i, |l-l'|}$  — соответствующая дискретизация функции  $\Phi_i(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ .

Соответствующее уравнениям (2) уравнение Фоккера–Планка в интерпретации Стратоновича [Stratonovich, 1963, 1967] для многомерной плотности вероятности  $\tilde{w}(x_{11}, \dots, x_{1p}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{np}; t) = \tilde{w}$  для всех точек решетки будет иметь вид

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \sum_{l'=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{il'}} \left[ f_{il'} + \frac{D_i}{2d} \left( \sum_{m=nn(l')} x_{im} - 2dx_{il'} \right) - \sum_{m=l', nn(l')} \left( \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \theta_i g_{il'} \Phi_{i, |l'-m|} \frac{\partial}{\partial x_{im}} g_{im} \right) \right] \tilde{w}. \quad (4)$$

Выберем одну точку с индексом  $l$ . Чтобы получить многомерную плотность вероятности  $w(x_{1l}, \dots, x_{nl}, t) = w$  для одной точки, необходимо  $\tilde{w}$  проинтегрировать по всем переменным, исключая  $x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}$ . Используя свойства плотности вероятности и определение условной вероятности, окончательно для многомерной плотности вероятности в одной точке получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left[ f_{il} + \frac{D_i}{2d} \left( \sum_{m=nn(l)} E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) - 2dx_{il} \right) - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_{il}} - \theta_i \Phi_{i,0} g_{il} \frac{\partial}{\partial x_{il}} g_{il} \right] w. \quad (5)$$

Здесь  $E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t)$  — условное математическое ожидание в соседних к  $l$  точках.

Так как  $x_{il}$  связаны уравнениями (2), приближение среднего поля здесь заключается в предположении, что условное среднее в (5) заменяется на

$$E(x_{im} | x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) = E(x_{il} | x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t), \quad (6)$$

где

$$E(x_{il} | x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{il} w(x_{il} | x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il},$$

$$w(x_{il} | x_{1l}, \dots, x_{i-1l}, x_{i+1l}, \dots, x_{nl}; t) = w / \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_{1l}, \dots, x_{il}, \dots, x_{nl}; t) dx_{il}.$$

В таком приближении точное УФП (5) преобразуется в приближенное:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ f_i + D_i (E(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; t) - x_i) - \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \theta_i \Phi_{i,0} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} g_i \right] w. \quad (7)$$

Здесь индекс  $l$  опущен для простоты записи.

Уравнения (6), (7) образуют самосогласованную систему, численное решение которой можно получить при использовании работы [Karetkina, 1980; Samarskii, 1963; Samarskii, 1963, Samarskii, 1963].

### 3. Двумерное NSCFPE для пространственно распределенного стохастического брасселятора и его решения

Рассмотрим схему очень простой химической реакции [Prigogine, Lefever, 1968]:



Суммарная реакция:  $A + B \rightarrow D + E$ . В работе [Prigogine, Lefever, 1968] предполагается, что концентрации начальных и конечных веществ поддерживаются постоянными. Схема (8) —

это теоретическая модель автокаталитической реакции. Она получила название «брюсселятор». Схема имеет тримолекулярный шаг (8b), поэтому она физически нереальна. Однако, несмотря на это, она получила широкое распространение и часто используется для исследования явлений самоорганизации благодаря простоте математического анализа ее кинетических уравнений и возможности демонстрировать широкий круг режимов поведения.

Мы будем предполагать, что концентрации начальных веществ подвержены действию внешних случайных факторов и флуктуируют около своих средних значений. Пренебрегая обратными реакциями, запишем кинетические уравнения реакции (8), дополнив их членами, описывающими диффузию промежуточных компонент и флуктуации параметров  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= A + \xi_3(\mathbf{r}, t) + x_1^2 x_2 - (B + 1 + \xi_1(\mathbf{r}, t))x_1 + D_1 \nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -x_1^2 x_2 + (B + \xi_2(\mathbf{r}, t))x_1 + D_2 \nabla^2 x_2.\end{aligned}\quad (9)$$

В уравнениях (9)  $x_1, x_2$  — концентрации промежуточных компонент,  $D_1, D_2$  — их коэффициенты диффузии,  $A, B$  — пространственно-временные средние концентрации исходных веществ. Вследствие того, что концентрация промежуточного вещества  $x_1$  убывает за счет двух различных распадов, уравнения (9) содержат различные некоррелированные между собой поля  $\xi_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\xi_2(\mathbf{r}, t)$ . Статистические свойства полей  $\xi_i(\mathbf{r}, t)$  описаны в § 2. В детерминированном случае модель (9) имеет стационарное состояние  $x_{10} = A, x_{20} = B/A$ . При  $B > B_c$  ( $B_c = [1 + A(D_1/D_2)^{1/2}]$ ) возникает неустойчивость, нарушающая симметрию, и система переходит в новое пространственно неоднородное упорядоченное состояние. Далее мы будем исследовать процесс разрушения внешними шумами именно такого упорядоченного состояния.

Используя уравнение (7) для случая  $n = 2$ , для системы (9) запишем двумерное NSCFPE:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[ -A - x_1^2 x_2 + (B + 1 + \theta_1 \Phi_{1,0})x_1 - D_1(E(x_1 | x_2) - x_1) \right] w + (\theta_1 \Phi_{1,0} x_1^2 + \theta_3 \Phi_{3,0}) \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left[ x_1^2 x_2 - Bx_1 - D_2(E(x_2 | x_1) - x_2) \right] w + \theta_2 \Phi_{2,0} x_1^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\},\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}E(x_1 | x_2, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 w(x_1 | x_2, t) dx_1; \quad E(x_2 | x_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 w(x_2 | x_1, t) dx_2; \\ w(x_1 | x_2, t) &= w(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_1; \quad w(x_2 | x_1, t) = w(x_1, x_2, t) \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1, x_2, t) dx_2.\end{aligned}$$

Первичный численный анализ показал [Курушина и др., 2014], что уравнение (10) имеет в обозначенной выше области три типа решений. Первый тип решений, при котором вплоть до установления стационарного состояния наблюдается только одномодальная плотность распределения вероятностей  $w(x_1, x_2, t)$ , существует при небольших значениях интенсивности шума. При этом система (9) остается в упорядоченном состоянии, несмотря на шум. Увеличение значений интенсивности шума приводит ко второму типу решений, при котором в некоторый момент времени происходит расщепление одномодальной плотности распределения и возникает временная бимодальность, существующая конечное время. В результате конкурентной борьбы один из максимумов подавляет другой и  $w(x_1, x_2, t)$  остается одномодальной до установления стационарного состояния. Бимодальное распределение соответствует разупорядоченной фазе, то есть при таком типе решения в упорядоченной фазе временно возникает разупорядоченная фаза — беспорядок. Дальнейшее увеличение значений интенсивности шума приводит

к появлению третьего нового типа решений — многократного чередования одномодального и бимодального видов плотности распределения вероятностей, что соответствует многократному чередованию упорядоченной и разупорядоченной фаз. При этом наблюдается своеобразная «перекачка» плотности вероятности из одного максимума в другой через бимодальность. Такой тип решения практически не изучен, но именно он является ключом к пониманию сценария шумоиндуцированного перехода «порядок–беспорядок».

#### 4. Рождение беспорядка

Итак, на основании изложенного выше можно сделать заключение, что разупорядоченная фаза впервые проявляется при появлении временной бимодальности. Именно с этого момента начинается разрушение порядка и рождение беспорядка. Поэтому вначале необходимо определить значения параметров задачи, соответствующих второму типу решений уравнения (10). Ввиду невозможности аналитического исследования уравнения (10) представленный ниже анализ базируется на численном моделировании его решений с помощью конечно-разностного локально-одномерного метода, подробная схема которого представлена в [Kurushina et al., 2014].

Для численного интегрирования выбраны следующие параметры, остающиеся неизменными в наших вычислениях:  $A = 3$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 5$ ,  $\Phi_{1,0} = \Phi_{2,0} = 1$ ,  $\theta_3 = 0$ . При таких параметрах критическое значение параметра  $B_c = 5.4833$ . Начальное распределение — гауссово, с дисперсиями  $\theta_1 = \theta_2 = 0.01$  и математическими ожиданиями, равными стационарным значениям  $x_{10}$  и  $x_{20}$ . Выбраны естественные для плотности вероятности граничные условия:  $w(x_1, x_2, t) \rightarrow 0$  при  $x_{1,2} \rightarrow +\infty$ . Остальные параметры указаны под рисунками. Везде далее при моделировании  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Наиболее наглядно появление временной бимодальности отражается на графиках зависимостей наиболее вероятных значений концентраций промежуточных компонент  $x_{1mp}$  и  $x_{2mp}$  от времени. В них наблюдается однократный или двукратный разрыв первого рода, который определяет скачок наиболее вероятного от одного максимума  $w(x_1, x_2, t)$  к другому. На рис. 1, а, б представлены такие зависимости. Они соответствуют двум значениям бифуркационного параметра:  $B = 6$  (рис. 1, а) и  $B = 7$  (рис. 1, б).

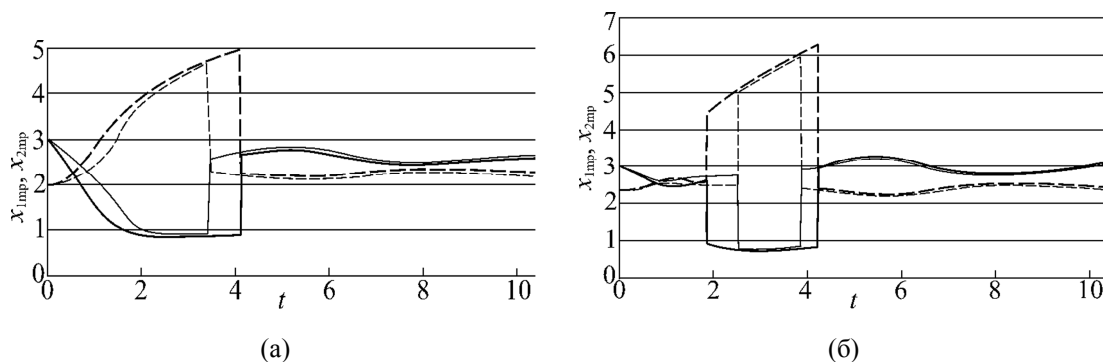


Рис. 1. Зависимости от времени наиболее вероятных значений концентраций первой и второй компонент  $x_{1mp}$ ,  $x_{2mp}$  при значениях интенсивности шума, когда временная бимодальность появляется впервые (линии 0.5 pt) и исчезает (линии 0.75 pt) при двух значениях бифуркационного параметра: а)  $B = 6$ :  $\theta = 0.09$  — линии 0.5 pt,  $\theta = 0.12$  — линии 0.75 pt; б)  $B = 7$ :  $\theta = 0.04$  — линии 0.5 pt,  $\theta = 0.05$  — линии 0.75 pt. Здесь и далее на всех рисунках первой компоненте соответствуют сплошные линии, второй компоненте соответствуют пунктирные линии

Проводя вычисления с шагом 0.01 по  $\theta$ , мы определили значения  $\theta$ , при которых для указанных выше значений  $B$  существует временная бимодальность. Линиям разной толщины на рис. 1 соответствуют значения  $\theta$ , при которых она впервые появляется и исчезает. Из представ-



ленных графиков следует, что при заданном  $B$  данный тип решения существует в узком интервале значений  $\theta$ : при  $B = 6$  при  $0.08 < \theta < 0.13$ , при  $B = 7$  при  $0.03 < \theta < 0.06$ . Таким образом, при удалении от точки бифуркации область существования решения второго типа сужается. Из представленных зависимостей также следует, что при удалении от точки бифуркации бимодальный режим возникает при меньших значениях  $\theta$ , а для заданного  $B$  при увеличении интенсивности шума его длительность увеличивается.

На рис. 2 представлены характерные для режима с временной бимодальностью зависимости дисперсий концентраций компонент  $Dx_1$  и  $Dx_2$  от времени и кривая  $Ex_2(Ex_1)$ , отражающая динамику средних. Из графиков видно, что колебания дисперсий медленно затухают. Кривая  $Ex_2(Ex_1)$  скручивается к точке  $(3.15, 2.45)$ , являющейся новым статистическим стационарным состоянием, которое отличается от точки детерминированного стационарного состояния  $(3.00, 2.33)$  при данных параметрах модели (9).

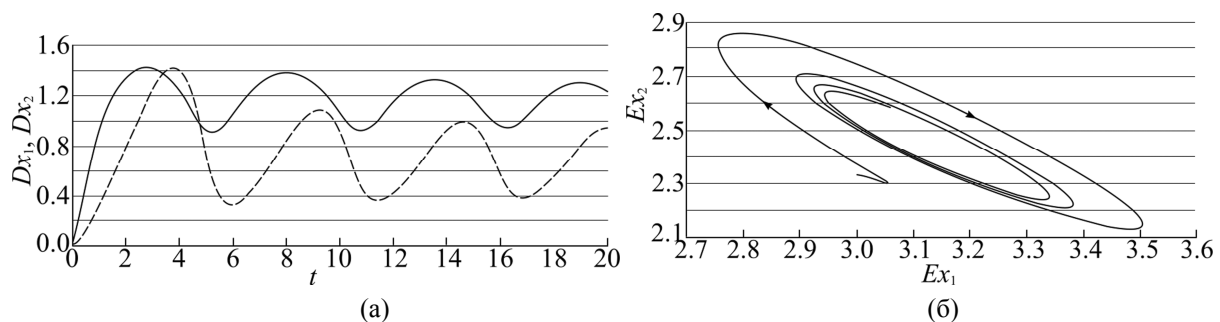


Рис. 2. Характерные для режима с временной бимодальностью зависимости статистических характеристик концентраций веществ  $x_{1,2}$ : а) дисперсий  $Dx_1$  и  $Dx_2$  от времени; б) математических ожиданий  $Ex_2(Ex_1)$ . Параметры модели:  $B = 7$ ,  $\theta = 0.04$

При  $B = 6$  и  $\theta > 0.12$  и при  $B = 7$  и  $\theta > 0.05$  уравнение (10) демонстрирует третий тип решения. Характерный вид эволюции плотности распределения вероятности для режима с «перекачкой» и соответствующие статистические характеристики модели (9) демонстрируют рис. 3, 4. Из рисунков видно, что при выбранных параметрах задачи все изменения происходят почти периодически.

Рис. 3 демонстрирует два периода «перекачки» плотности вероятности. Из рис. 3 можно заметить, что при данных параметрах задачи «период» перекачки плотности вероятности  $w(x_1, x_2, t)$  примерно равен 11 единицам модельного времени, а длительность бимодального состояния составляет порядка 3 единиц, т. е. примерно треть времени система пребывает в неупорядоченном состоянии. Таким образом, длительности одномодального и бимодального состояния  $w(x_1, x_2, t)$  сравнимы по величине.

Изменение зависимостей от времени дисперсий концентраций  $x_1$  и  $x_2$  при увеличении интенсивности шума иллюстрирует рис. 4, а. Из представленных на рисунке графиков видно, что при возрастании интенсивности шума период изменения дисперсий уменьшается. Если аналогичные зависимости при режиме с временной бимодальностью, показанные на рис. 2, а, носили затухающий характер, то здесь они приобретают вид, больше похожий на релаксационные колебания. Объяснить это можно тем, что при увеличении интенсивности шума возрастает квадратичная нелинейность, заложенная в обобщенных коэффициентах диффузии:

$$C_{\text{diff}}^1 = \theta_1 \Phi_{1,0} x_1^2 + \theta_3 \Phi_{3,0}, \quad C_{\text{diff}}^2 = \theta_2 \Phi_{2,0} x_1^2.$$

Изменения во времени средних и наиболее вероятных значений концентраций  $x_1$  и  $x_2$  при увеличении интенсивности шума представлены на рис. 4, б, в. Из рис. 4, б видно, что с увеличением интенсивности шума абсолютные значения отклонений математических ожиданий  $Ex_{1,2}(t)$  от стационарных концентраций в детерминированном случае уменьшаются. Уменьшаются также и периоды изменения средних и наиболее вероятных значений концентраций  $x_1$  и  $x_2$ . Это означает, что «перекачка» происходит все чаще.

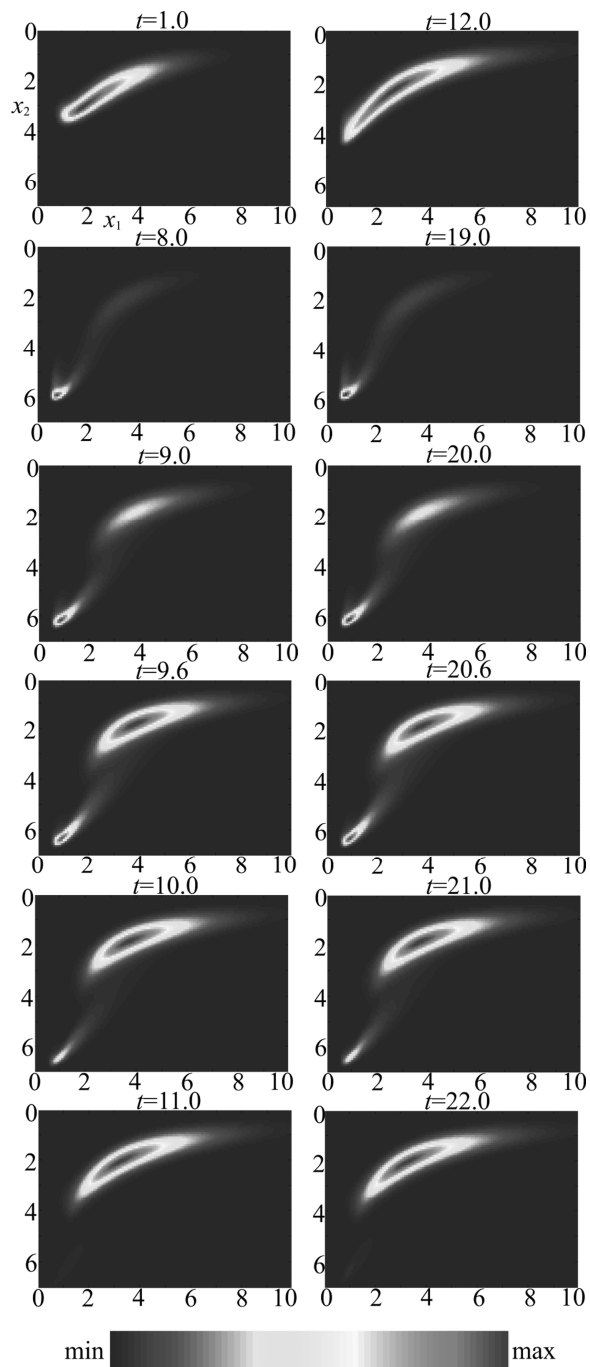


Рис. 3. Эволюция плотности вероятности (10) для модели (9), соответствующая режиму с «перекачкой» через бимодальность. На рисунке представлены два «периода» «перекачки». «Перекачка» наблюдается в интервалах времени  $t \in (8, 11)$ ,  $t \in (19, 22)$ . Градиент цвета, представленный на рисунке, визуализирует изменение  $w(x_1, x_2, t)$  от минимума к максимуму. Параметры модели:  $B = 7$ ,  $\theta = 0.08$ . Соответствующие этому решению зависимости  $Dx_{1,2}(t)$ ,  $Ex_{1,2}(t)$ ,  $x_{1,2\text{mp}}(t)$  представлены на рис. 4 линиями 0.75 pt (линиями средней толщины)

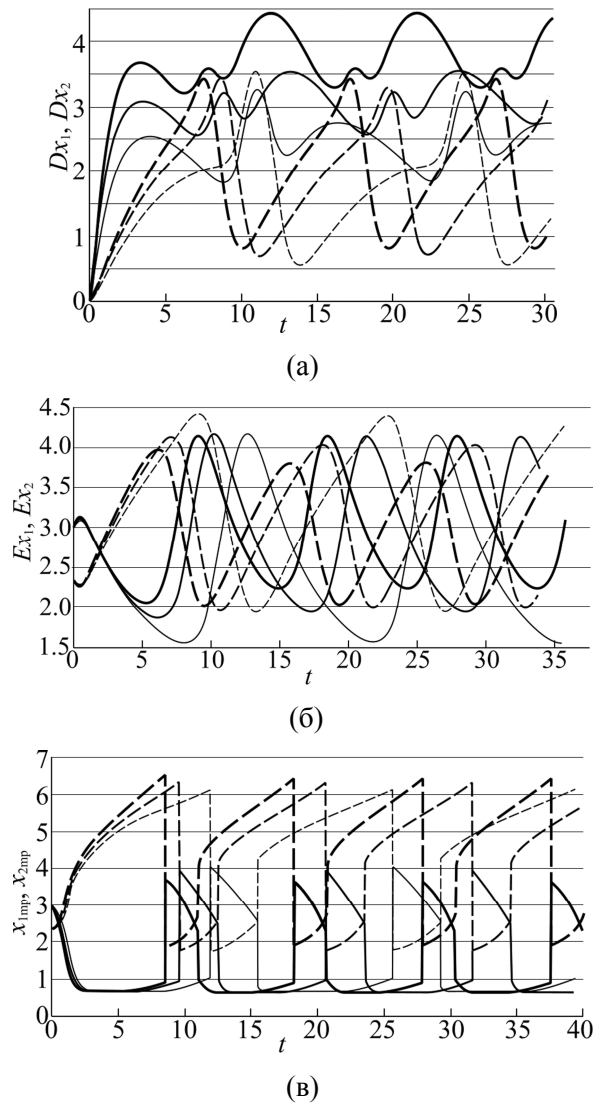


Рис. 4. Зависимости от времени статистических характеристик концентраций веществ  $x_{1,2}$  при увеличении интенсивности шума в режиме «перекачки» плотности вероятности: а) дисперсий  $Dx_{1,2}(t)$ ; б) математических ожиданий  $Ex_{1,2}(t)$ ; в) наиболее вероятных значений  $x_{1,2\text{mp}}(t)$ . Параметры модели:  $B = 7$ ;  $\theta = 0.06$  — линии 0.5 pt,  $\theta = 0.08$  — линии 0.75 pt,  $\theta = 0.10$  — линии 1 pt

Все представленные выше изменения последовательно и достаточно подробно описывают сценарий рождения беспорядка из упорядоченного состояния в системе (9) под действием внешнего шума. Интерпретировать полученные выше результаты можно следующим образом.

Начиная с некоторого значения интенсивности внешнего шума  $\theta_{cr1}$  внутри упорядоченной фазы зарождается беспорядок, существующий конечное время, причем чем больше шум, тем дольше этот зародыш беспорядка живет. Чем дальше от точки бифуркации, тем меньше шум, который его порождает, и тем уже область значений интенсивности шума, при которых система эволюционирует к упорядоченному, но уже новому статистически стационарному состоянию.

При некотором втором значении интенсивности шума  $\theta_{cr2} > \theta_{cr1}$  упорядоченная и разупорядоченная фазы начинают многократно и почти периодически сменять друг друга, причем длительности обеих фаз сравнимы по величине, т. е. разупорядоченная фаза существует наравне с упорядоченной. Система немалую часть времени пребывает в состоянии беспорядка. Увеличение интенсивности шума приводит к тому, что времена жизни упорядоченного и разупорядоченного состояний уменьшаются — порядок и беспорядок все чаще сменяют друг друга. Иными словами, наблюдается все более частая перемежаемость упорядоченной и разупорядоченной фаз, при этом доля времени пребывания системы в неупорядоченном состоянии увеличивается.

Дальнейшее очевидно: при превышении шумом некоторого порога  $\theta_{cr3}$  беспорядок начинает преобладать — упорядоченная фаза разрушается.

Таким образом, сценарием перехода «порядок–беспорядок» является перемежаемость упорядоченной и разупорядоченной фаз.

## 5. Заключение

В нашей работе мы последовательно и достаточно подробно численно исследовали два типа решений нелинейного самосогласованного уравнения Фоккера–Планка, записанного в приближении среднего поля для пространственно распределенной стохастической модели «брюсселятор»: решение, при котором возникает временная бимодальность, и решение с многократным чередованием одно- и бимодального видов плотности распределения вероятностей. Изучение динамики плотности распределения вероятностей и статистических характеристик модели, соответствующих этим решениям, позволило описать зарождение и развитие беспорядка в упорядоченном состоянии под действием внешнего шума и определить сценарий перехода «порядок–беспорядок». Было показано, что переход «порядок–беспорядок» осуществляется через перемежаемость упорядоченной и разупорядоченной фаз.

## Список литературы (References)

- Курушина С. Е., Громова Л. И., Шаповалова Е. А. Нелинейное многомерное уравнение Фоккера–Планка в приближении среднего поля для многокомпонентных систем реакционно-диффузионного типа // Прикладная нелинейная динамика. — 2014. — Т. 22, № 5. — С. 27–42.
- Kurushina S. E., Gromova L. I., Shapovalova E. A. Nelinejnoe mnogomernoe uravnenie Fokkera–Planka v priblizhenii srednego polya dlya mnogokomponentnykh sistem reakcionno-diffuzionnogo tipa [Nonlinear multivariate self-consistent Fokker–Planck equation for multicomponent reaction-diffusion systems] // Applied nonlinear dynamics. — 2014. — Vol. 22, no. 5. — P. 27–22 (in Russian).
- Aguiar M. A. M., Rauch E., Bar-Yam Y. Mean field approximation to a spatial host-pathogen model // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 88. — P. 039901.
- Akerlund O., Forcrand Ph., Georges A., Werner Ph. Dynamical mean field approximation applied to quantum field theory // Phys. Rev. D. — 2013. — Vol. 88. — P. 125006.
- Araújo M. S., Vannucchi F. S., Timpanaro A. M., Prado C. P. C. Mean-field approximation for the Sznajd model in complex networks // Phys. Rev. E. — 2015. — Vol. 91. — P. 022813.

- Ayik S.* A stochastic mean-field approach for nuclear dynamics // *Phys. Lett. B.* — 2008. — Vol. 658. — P. 174–179.
- Bighin G., Salasnich L.* Gaussian fluctuations in the two-dimensional BCS-BEC crossover: finite temperature properties // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2014. — Vol. 691. — P. 012018.
- Bricmont J., Bosch H.* Intermediate model between majority voter PCA and its mean field model // *J. Stat. Phys.* — 2015. — Vol. 158. — P. 1090.
- Carrillo O., Ibañes M., García-Ojalvo J., Casademunt J., Sancho J. M.* Intrinsic noise-induced phase transitions: Beyond the noise interpretation // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67. — P. 046110.
- Carrillo O., Ibañes M., Sancho J. M.* Noise induced phase transitions by nonlinear instability mechanism // *Fluct. Noise Lett.* — 2002. — Vol. 2. — L1.
- Cēbers A.* Poiseuille flow of a Quincke suspension // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 90. — P. 032305.
- Chavanis P.-H.* The Brownian mean field model // *Eur. Phys. J. B.* — 2014. — Vol. 87. — P. 120.
- Chen Sh., Wu Q.* Mean field theory of epidemic spreading with effective contacts on networks // *Chaos, Solitons and Fractals.* — 2015. — Vol. 81. — P. 359–364.
- Deviren B., Keskin M.* Dynamic phase transitions and compensation temperatures in a mixed spin-3/2 and spin-5/2 Ising System // *J. Stat. Phys.* — 2010. — Vol. 140. — P. 934–947.
- Graefe E. M., Korsch H. J., Niederle A. E.* Mean-field dynamics of a non-hermitian Bose–Hubbard dimer // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 150408.
- Hayami S., Motome Yu.* Topological semimetal-to-insulator phase transition between noncollinear and noncoplanar multiple-Q states on a square-to-triangular lattice // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91. — P. 012101.
- Hinschberger Y., Dixit A., Manfredi G., Hervieux P.-A.* Equivalence between the semirelativistic limit of the Dirac-Maxwell equations and the Breit-Pauli model in the mean-field approximation // *Phys. Rev. A.* — 2015. — Vol. 91. — P. 075104.
- Horvath B., Lazarovits B., Sauret O., Zarand G.* Failure of mean-field approach in out-of-equilibrium Anderson model // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 113108.
- Ibañes M., García-Ojalvo J., Toral R., Sancho J. M.* Noise-induced phase separation: Mean-field results // *Phys. Rev. E.* — 1999. — Vol. 60. — P. 3597.
- Ishihara S., Nasu J.* Resonating valence-bond state in an orbitally degenerate quantum magnet with dynamical Jahn–Teller effect // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91. — P. 045117.
- Karetkina N. V.* An unconditionally stable difference scheme for parabolic equations containing first derivatives // *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 1980. — Vol. 20. — P. 257.
- Kudrnovsky J., Drchal V., Bergqvist L., Vincze I.* Unified approach to electronic, thermodynamical, and transport properties of Fe<sub>3</sub>Si and Fe<sub>3</sub>Al alloys // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 90. — P. 134408.
- Kurushina S. E., Maximov V. V., Romanovskii Yu. M.* Weiss mean-field approximation for multicomponent stochastic spatially extended systems // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 90. — P. 022135.
- Leeuw A.-W., Onishchenko O., Duine R. A., Stoof H. T. C.* Effects of dissipation on the superfluid–Mott-insulator transition of photons // *Phys. Rev. A.* — 2015. — Vol. 91. — P. 033609.
- Lindnera B., García -Ojalvo J., Neimand A., Schimansky-Geier L.* Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports.* — 2004. — Vol. 392. — P. 321.
- Prigogine I., Lefever R.* Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II // *J. Chem. Phys.* — 1968. — Vol. 48. — P. 1695.
- Rosati R., Iotti R. C., Dolcini F., Rossi F.* Derivation of nonlinear single-particle equations via many-body Lindblad superoperators: A density-matrix approach // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 90. — P. 125140.

- Samarskii A. A.* Homogeneous difference schemes on non-uniform nets for equations of parabolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1963. — Vol. 3. — P. 351.
- Samarskii A. A.* Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1963. — Vol. 3. — P. 572.
- Samarskii A. A.* On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1963. — Vol. 2. — P. 894.
- Serreau J., Volpe C.* Neutrino-antineutrino correlations in dense anisotropic media // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 90. — P. 125040.
- Sowinski T., Chhajlany R. W.* Mean-field approaches to the Bose-Hubbard model with three-body local interaction // Phys. Scr. — 2014. — Vol. 160. — P. 014038.
- Stratonovich R. L.* Topics in the Theory of Random Noise. — New York: Gordon and Breach, 1963. — Vol. 1; 1967. — Vol. 2.
- Vermersch B., Garreau J. C.* Emergence of nonlinear behavior in the dynamics of ultracold bosons // Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 91. — P. 043603.
- Williams-García R., Moore M., Beggs J., Ortiz G.* Quasicritical brain dynamics on a nonequilibrium Widom line // Phys. Rev. E. — 2014. — Vol. 90. — P. 062714.
- Yilmaz B., Lacroix D., Curebal R.* Importance of realistic phase-space representations of initial quantum fluctuations using the stochastic mean-field approach for fermions // Phys. Rev. C. — 2014. — Vol. 90. — P. 054617.
- Yilmaz O., Ayik S., Acar F., Gokalp A.* Growth of spinodal instabilities in nuclear matter // Phys. Rev. C. — 2015. — Vol. 91. — P. 014605.
- Zaikin A. A., García-Ojalvo J., Schimansky-Geier L.* Nonequilibrium first-order phase transition induced by additive noise // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 60. — R6275.