

УДК: 533.9, 519.63

Расчет излучения в ударном слое спускаемого космического аппарата с учетом деталей спектра фотонов

Е. Н. Аристова^{1, 2, а}, Г. О. Астафуров¹, А. В. Шильков¹

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4

² Московский физико-технический институт,
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^а aristovaen@mail.ru

Получено 26.01.2017, после доработки — 23.06.2017.

Принято к публикации 14.07.2017.

Расчет переноса излучения в ударном слое космического аппарата вызывает значительные трудности из-за сложной многорезонансной зависимости макросечения поглощения излучения от энергий фотонов. В работе исследована сходимость двух приближенных методов осреднения спектров излучения к точному поточечному (*line-by-line*) расчету. Первым из приближенных методов является широко используемое многогрупповое приближение, вторым — метод лебеговского осреднения, относящийся к методам сокращения числа расчетных точек спектра за счет объединения точек с равновеликим поглощением. Показано, что с увеличением числа групп метод лебеговского осреднения сходится к точному решению значительно быстрее многогруппового приближения. Оказалось, что 100–150 лебеговых групп достаточно для достижения точности *line-by-line*-расчета даже в ударном слое в высоких слоях атмосферы, где линии поглощения узки. При этом объем вычислений сокращается более чем на четыре порядка. Выполнена серия расчетов функции распределения излучения в двумерном ударном слое, возникающем при обтекании сферы и затупленного конуса, с использованием приближения локально плоского слоя и метода лебеговского осреднения энергий фотонов. Показано, что излучение ударной волны становится все более сильным при увеличении размера космического аппарата, как в значениях падающего потока энергии на поверхности тела, так и в скорости обмена энергией с газодинамическим потоком, причем не только в точке торможения.

Ключевые слова: перенос энергии излучением, ударный слой, многогрупповое приближение, метод лебеговского осреднения, поточечный расчет спектра, приближение локально плоского слоя

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №14–11–00699.

UDC: 533.9, 519.63

Calculation of radiation in shockwave layer of a space vehicle taking into account details of photon spectrum

E. N. Aristova^{1, 2, a}, G. O. Astafurov¹, A. V. Shilkov¹

¹ Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047, Russia

² Moscow Institute of Physics and Technology,
Institutskii per., 9, Dolgoprudnyi, Moscow region, 141701, Russia

E-mail: ^a aristovaen@mail.ru

Received 26.01.2017, after completion — 23.06.2017.

Accepted for publication 14.07.2017.

Calculations of radiation transport in the shockwave layer of a descent space vehicle cause essential difficulties due to complex multi-resonance dependence of the absorption macroscopic cross sections from the photon energy. The convergence of two approximate spectrum averaging methods to the results of exact pointwise spectrum calculations is investigated. The first one is the well known multigroup method, the second one is the Lebesgue averaging method belonging to methods of the reduction of calculation points by means of aggregation of spectral points which are characterized by equal absorption strength. It is shown that convergence of the Lebesgue averaging method is significantly faster than the multigroup approach as the number of groups is increased. The only 100–150 Lebesgue groups are required to achieve the accuracy of pointwise calculations even in the shock layer at upper atmosphere with sharp absorption lines. At the same time the number of calculations is reduced by more than four order. Series of calculations of the radiation distribution function in 2D shock layer around a sphere and a blunt cone were performed using the local flat layer approximation and the Lebesgue averaging method. It is shown that the shock wave radiation becomes more significant both in value of the energy flux incident on the body surface and in the rate of energy exchange with the gas-dynamic flow in the case of increasing of the vehicle's size.

Keywords: radiation energy transport, shockwave, multigroup approach, Lebesgue averaging method, 'line-by-line' method, local plane layer approach

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 579–594 (Russian).

The work is done under financial support of Russian Science Foundation (project no. 14-11-00699).

1. Введение

При исследовании задач аэротермомеханики космических аппаратов (КА) основной вопрос в части переноса теплового излучения состоит в величине воздействия лучистых потоков на поверхность аппарата и на характеристики течения газа. При ответе на вопрос интересует конечная цифра — без деталей распределения излучения по спектру (энергиям фотонов). К сожалению, вследствие сильно немонотонной зависимости коэффициентов поглощения и испускания излучения от энергии фотонов дать ответ на главный вопрос без рассмотрения деталей невозможно. Фотоны излучения рождаются и гибнут в квантовых переходах между состояниями молекул, атомов, ионов вещества. Сечения связанно-связанных переходов имеют ярко выраженный резонансный характер и меняются на малых участках спектра до 10^4 раз. Смесь горячего воздуха с парами материала защиты КА в области температур от 0.1 эВ (1 тыс. К) до 2.6 эВ (30 тыс. °К) и плотностей 10^{-1} – 10^{-2} (в отношении к нормальной) содержит большое многообразие молекул, атомов, атомарных и молекулярных ионов (далее — тяжелых частиц). Указанные термодинамические параметры достигаются в ударном слое на высотах от 40 до 80 км и при скоростях КА от 3 км/с до 12 км/с. Число резонансных линий в такой смеси может достигать нескольких миллионов. В результате зависимость интенсивности излучения от фазовых переменных (энергии и пространственно-угловых переменных) имеет сильно изрезанную структуру, определяемую положением всех сильных линий (резонансов) поглощения/испускания фотонов. Поэтому результирующий интегральный по спектру поток лучистой энергии во многом определяется не газодинамическими и термодинамическими параметрами течения, а квантовомеханическими и термохимическими свойствами вещества.

Для демонстрации сложности расчета спектра излучения на рис. 1 приведен коэффициент поглощения чистого воздуха при трех значениях температуры. Данные предоставлены В. И. Косаревым [Косарев, 1999; Косарев, 2009]. В коэффициенте в явном виде представлены только резонансы атомарных линий. Вклад молекулярных линий учтен интегрально — осреднением по относительно широким интервалам колебательных полос.

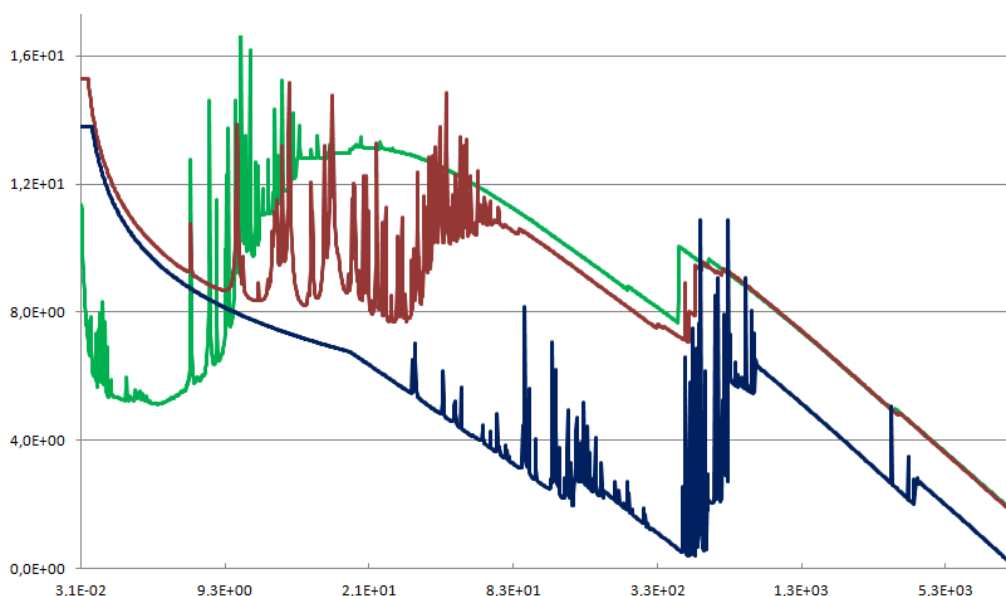


Рис. 1. Сечения поглощения воздуха ($\text{см}^2/\text{г}$) в зависимости от энергий фотонов (эВ) при нормальной плотности и трех температурах: 1 эВ (зеленый график, линии сечения поглощения присутствуют в области малых энергий фотонов), 10 эВ (красный график, линии сечения поглощения в диапазоне средних энергий) и 100 эВ (синий график, линии сечения поглощения смещены в сторону больших энергий фотонов), по данным В. И. Косарева [Косарев, 1999; Косарев, 2009]. Цветная версия рисунка доступна в электронной версии на сайте журнала

2. Задача расчета интенсивности излучения

Стационарное распределение излучения внутри объема газа задается интенсивностью излучения $J(E, \Omega, \mathbf{r})$, где E — энергия фотонов, Ω — направление полета пучка фотонов, \mathbf{r} — вектор координат. Интенсивность излучения находится численным решением кинетического уравнения переноса:

$$\Omega \cdot \frac{\partial J}{\partial \mathbf{r}} + [\kappa^{ab} + \sigma] \cdot J = \kappa^{em} \frac{c U^{Pl}}{4\pi} + \frac{\Sigma^{sc}}{2\pi} \int_{\Omega'} w(E, \Omega' \Omega) J(E, \Omega') d\Omega', \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{4\pi} w(E, \Omega' \Omega) d\Omega = 1,$$

где $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r})$ — макроскопическое сечение (коэффициент) поглощения фотонов, имеющее размерность обратной длины, $\kappa^{em}(E, \mathbf{r})$ — макроскопическое сечение испускания фотонов, $\Sigma^{sc}(E, \mathbf{r})$ — макроскопическое сечение рассеяния излучения на дисперсных частицах вещества в твердой или жидкой фазе, $w(E, \Omega' \Omega, \mathbf{r})$ — индикатриса рассеяния, U^{Pl} — равновесная планковская плотность энергии теплового излучения:

$$U^{Pl}(E, T_e) dE = \frac{4\sigma_B}{c} \cdot \frac{15}{\pi^4} \frac{E^3}{e^{E/T_e} - 1} dE, \quad \sigma_B = 1.0283 \cdot 10^{12} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1} \text{ см}^{-2} \text{ ЭВ}^{-4}.$$

Здесь σ_B — постоянная Стефана–Больцмана, $T_e(\mathbf{r})$ — температура газа свободных электронов, температура и энергия фотонов измеряются в эВ. Уравнение (1) дополняется граничными условиями, учитывающими падающее на ударный слой внешнее излучение и отражение собственного излучения слоя от поверхности КА.

В общем случае макроскопические сечения поглощения и испускания излучения зависят от населенностей электронно-колебательно-вращательных квантовых состояний частиц. Населенности вычисляются из совместного решения системы уравнений поуровневой кинетики и уравнения переноса излучения (1). Задача существенно упрощается в приближении равновесных населенностей. В этом приближении распределение тяжелых частиц по состояниям колебательно-вращательного спектра энергий задается распределением Больцмана при кинетической температуре тяжелых частиц $T_b(\mathbf{r})$, а распределение частиц по состояниям энергии связанных электронов задается распределением Больцмана при кинетической температуре свободных электронов $T_e(\mathbf{r})$. Тогда макроскопическое сечение поглощения равно макросечению испускания излучения и может быть представлено в виде

$$\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}) = \kappa^{em}(E, \mathbf{r}) = \sum_A N_A(\mathbf{r}) \cdot \sigma_A^{ab}(E, T_e, T_b, \rho), \quad (2)$$

где N_A — концентрация тяжелых частиц типа A (далее — компонентов), σ_A^{ab} — сечение поглощения излучения в расчете на одну частицу A с поправкой на индуцированное испускание (умноженное на множитель $1 - e^{-E/T_e}$), ρ — плотность. Каждое сечение представляет собой взвешенную сумму сечений свободно-свободных переходов электронов в кулоновском поле ионов, пороговых сечений фотоионизации и фотодиссоциации тяжелых частиц и резонансных сечений (линий) радиационного возбуждения квантовых состояний частиц. При наличии химического равновесия между несколькими (или всеми) компонентами они могут быть объединены в один компонент применением закона действующих масс.

Для численного решения уравнения (1) возникают три задачи его дискретизации: по пространственным переменным, по угловым переменным и по энергетической переменной. В ряде случаев эти задачи удастся решить независимо.

3. Дискретизация по энергии

Для дискретизации по энергии фотонов применяются метод поточечного расчета спектра (*line-by-line*-расчет), приближенные методы, использующие функции пропускания излучения на интервалах спектра, многогрупповое приближение и методы сокращения числа расчетных точек спектра за счет объединения точек, характеризующихся равновеликим поглощением.

Метод поточечного расчета спектра на сетке, содержащей до нескольких миллионов точек, чрезвычайно трудоемок, особенно в многомерной геометрии. В настоящее время он выполняется в отдельных вычислительных экспериментах с привлечением мощных компьютеров. При этом значительную трудность представляет варьирование внешних параметров задачи. Поэтому метод малоприменим для проведения серийных инженерных расчетов, но может использоваться для оценки точности методов осреднения спектров.

В данной работе мы применяем приближенные методы осреднения спектра: многогрупповое приближение и метод лебеговского осреднения [Шильков, 1991; Shilkov, 1994], относящийся к группе методов сокращения числа расчетных точек спектра. Среди прочих эти методы позволяют решать задачу дискретизации по энергетической переменной, независимо от задач дискретизации по пространственно-угловым переменным. Отметим, что методы такого типа сохраняют полный диапазон изменения коэффициента поглощения, поэтому для части лебеговских обобщенных групп ударный слой около космического аппарата является оптически тонким, а для части — оптически толстым. Метод пространственной дискретизации должен учитывать этот факт.

Многогрупповое приближение состоит в осреднении спектральных сечений поглощения/испускания $\sigma_A^{ab}(E)$ по интервалам энергий фотонов — группам. Осреднение проводится с модельным спектром излучения, чаще всего с равновесным планковским спектром. Для вычисления групповых (суммарных по интервалу-группе) интенсивностей формулируется дискретный аналог уравнения переноса (1), (2). К достоинствам многогруппового приближения относится то, что оно переходит в поточечный расчет спектра при увеличении числа групп. Однако в задаче переноса излучения в ударном слое, как будет показано в § 5, многогрупповое приближение может сходиться крайне медленно.

В основу метода лебеговского осреднения положен принцип объединения точек спектра с одинаковым макросечением поглощения $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r})$. Известно, что точность методов сокращения расчетных точек спектра, использующих указанный принцип, существенно зависит от искажений спектрального профиля макросечения поглощения при изменении пространственных координат. Искажения можно разделить на два типа. Первые возникают из-за неоднородности концентраций $N_A(\mathbf{r})$ оптически активных компонентов вещества внутри излучающего объема, вторые — из-за перестройки сечения поглощения излучения компонентом $\sigma_A^{ab}(E, \mathbf{r})$, например вследствие уширения линий. В методе лебеговского осреднения удается значительно минимизировать влияние этих искажений на точность осреднения. Для устранения влияния неоднородности поглощающих компонентов выполняется деление спектра фотонов на носители резонансов — несвязные участки спектра, где поглощение данного компонента A преобладает над поглощением любого другого компонента, т. е. $\langle N_A \sigma_A^{ab}(E) \rangle > \langle N_B \sigma_B^{ab}(E) \rangle$, $B \neq A$. Угловыми скобками обозначены величины, осредненные по объему ударного слоя. Число носителей резонансов может быть меньше числа компонентов. Практика расчетов показывает, что в типичных задачах достаточно вводить от трех до пяти носителей. Перенос излучения рассматривается на каждом носителе резонансов независимо. Для учета искажений второго типа разработан формальный математический аппарат замены интегрирования спектра по Риману на интегрирование по Лебегу. Вводится функция распределения фотонов на системе специальным образом построенных лебеговых множеств. Для этой функции выводится кинетическое уравнение, являющееся следствием исходного спектрального уравнения переноса (1), (2). В качестве новой

переменной «условного» спектра (вместо энергии фотонов) используется мера лебеговых множеств.

Примечательно, что после дискретизации уравнения переноса излучения по переменной спектра (многогрупповое приближение) или по лебеговой переменной условного спектра (метод лебеговского осреднения) конечные дискретные уравнения имеют схожий функциональный вид. Это позволяет использовать одинаковые схемы пространственно-угловой дискретизации уравнений и разрабатывать общие транспортные коды для выполнения расчетов. Различны лишь методики подготовки входных данных — таблиц коэффициентов уравнений. Приведем общую запись дискретного уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \frac{\partial J_g}{\partial \mathbf{r}} + [\kappa_g + \Sigma_g] \cdot J_g &= \kappa_g \frac{cU_g^{Pl}}{4\pi} + \frac{\Sigma_g}{2\pi} \int_{\Omega'} w_g(\mu_s) J_g(\Omega') d\Omega', \\ \kappa_g(\mathbf{r}) &= \sum_A N_A(\mathbf{r}) \cdot \sigma_{A,g}^{ab}(T_e, T_b, \rho), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi} w_g(\Omega\Omega', \mathbf{r}) d\Omega = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь g — индекс группы по переменной спектра. В случае многогруппового приближения это интервал энергий фотонов $E_{g-1} \leq E < E_g$. Величины имеют следующие определения:

$$\begin{aligned} J_g(\Omega, \mathbf{r}, t) &= \int_{E_{g-1}}^{E_g} J(E, \Omega, \mathbf{r}) dE, \quad U_g^{Pl}(T_e) = \int_{E_{g-1}}^{E_g} U^{Pl}(E, T_e) dE, \\ \sigma_{A,g}^{ab}(T_e, T_b, \rho) &= \int_{E_{g-1}}^{E_g} \sigma_{A,g}^{ab}(E, T_e, T_b, \rho) U^{Pl}(E, T_e) dE \Bigg/ \int_{E_{g-1}}^{E_g} U^{Pl}(E, T_e) dE, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Sigma_g(\mathbf{r}) = \int_{E_{g-1}}^{E_g} \Sigma(E, \mathbf{r}) U^{Pl}(E, T_e) dE \Bigg/ \int_{E_{g-1}}^{E_g} U^{Pl}(E, T_e) dE, \quad (5)$$

$$w_g(\Omega\Omega', \mathbf{r}) = \int_{E_{g-1}}^{E_g} \sigma(E, \mathbf{r}) w(\Omega\Omega', E, \mathbf{r}) U^{Pl}(E, T_e) dE \Bigg/ \Sigma_g(\mathbf{r}) \int_{E_{g-1}}^{E_g} U^{Pl}(E, T_e) dE, \quad (6)$$

где J_g — суммарная интенсивность излучения в группе g , U_g^{Pl} — суммарная плотность равновесного излучения в группе, κ_g — среднее планковское макросечение поглощения фотонов в группе g , Σ_g — среднее макросечение рассеяния, w_g — индикатриса рассеяния. Необходимые формулы для расчета групповых сечений в случае лебеговского осреднения приведены, например, в [Шильков, Герцев, 2015].

Дискретное уравнение дополняется осредненными по группам граничными условиями.

4. Приближение локально плоского слоя

Толщина ударного слоя мала в сравнении с радиусом затупления лобовой части спускаемого космического аппарата. Поэтому при выполнении расчетов переноса излучения приемлемую точность дает приближение локально плоского слоя (см., например, [Суржиков, 2004]). Перейдем к локальной системе координат, направив ось z по нормали к телу, $z = 0$ соответствует поверхности тела, а $z = \delta$ — фронту ударной волны (эта величина меняется вдоль обвода тела). Пользуясь малой толщиной слоя, пренебрежем зависимостью от локально касательных координат x и y . Уравнение переноса (3) в плоской геометрии в отсутствие рассеяния принимает вид

$$\mu \frac{\partial I_g}{\partial z} + \kappa_g I_g = \kappa_g B_g, \quad B_g = \frac{cU_g^{Pl}}{2}, \quad (7)$$

где $\mu = \Omega \mathbf{z}$ — косинус угла между направлением полета фотона и осью z , I_g — интенсивность излучения, проинтегрированная по углу вращения вокруг оси z . В переменных оптической толщины $\tau(z)$ решение уравнения (7), в отсутствие рассеяния и падающего на фронт волны внешнего излучения, запишется в виде

$$I^{\oplus}(\mu, z) = I_0 e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} \frac{B(\tau')}{\mu} e^{[\tau'-\tau]/\mu} d\tau', \quad \mu > 0, \quad (8)$$

$$I^{\ominus}(\mu, z) = - \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} \frac{B(\tau')}{\mu} e^{[\tau'-\tau]/\mu} d\tau', \quad \mu < 0, \quad (9)$$

$$\tau(z) = \int_0^z \kappa(z') dz', \quad \tau_{\delta} = \int_0^{\delta} \kappa(z') dz'.$$

Индекс группы g в обозначении величин здесь и далее опускается, если это допускает контекст изложения. Здесь I_0 есть уходящая от поверхности тела интенсивность излучения, которая определяется эмиссионной и отражающей способностью поверхности.

Вычислим поток лучистой энергии W^{\oplus} в полусфере $\mu > 0$, поток энергии W^{\ominus} в полусфере $\mu < 0$ и полный поток W

$$W^{\oplus}(z) = \int_0^1 \mu I^{\oplus} d\mu = \int_0^1 I_0 \mu e^{-\tau/\mu} d\mu + \int_0^{\tau} B(\tau') \int_0^1 e^{[\tau'-\tau]/\mu} d\mu d\tau' = \int_0^1 I_0 \mu e^{-\tau/\mu} d\mu + \int_0^{\tau} B(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau', \quad (10)$$

$$W^{\ominus}(z) = \int_{-1}^0 \mu I^{\ominus} d\mu = - \int_0^1 \mu I^{\ominus}(-\mu) d\mu = - \int_0^1 \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau') e^{[\tau'-\tau]/\mu} d\tau' d\mu = - \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau', \quad (11)$$

$$W = W^{\oplus} + W^{\ominus} = \int_0^1 I_0 \mu e^{-\tau/\mu} d\mu + \int_0^{\tau} B(\tau') E_2(\tau - \tau') d\tau' - \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau') E_2(\tau' - \tau) d\tau'. \quad (12)$$

Здесь $E_n(z)$ есть интегральная экспонента:

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt = \int_0^1 x^{n-2} e^{-\frac{z}{x}} dx. \quad (13)$$

Если I_0 не зависит от угловой переменной μ (диффузное отражение), соответствующие интегралы в (10), (12) также выражаются через интегральную экспоненту:

$$\int_0^1 I_0 \mu e^{-\tau/\mu} d\mu = I_0 E_3(\tau).$$

Зависимость от μ уходящей от поверхности тела интенсивности излучения I_0 порождает интегральную связь между падающим и отраженным от поверхности излучением, разрешить которую в общем случае можно только численно. Эта связь упрощается для двух частных условий отражения: диффузного и зеркального (и их комбинации). При этих условиях решение задачи можно представить в аналитической форме до конца.

4.1. Диффузное отражение (отражение от поверхности равновероятно в любой угол и не зависит от угла падения). В этом случае условие на поверхности тела достаточно сформулировать в форме баланса полусферических потоков излучения:

$$W^{\oplus}(0) = (1 - r_{\text{dr}}) \frac{B(0)}{2} - r_{\text{dr}} W^{\ominus}(0), \quad (14)$$

где $r_{\text{др}}$ — отражательная способность поверхности тела, $(1-r_{\text{др}})$ — эмиссионная (излучательная) способность поверхности (предполагается, что тело излучает с планковской функцией, соответствующей температуре тела). Введем граничные потоки

$$W^{\oplus}(0) = \frac{I_0}{2}, \quad W^{\ominus}(\tau_{\delta}) = 0. \quad (15)$$

Подставляя в граничное условие (14) выражения для полусферических потоков излучения к телу и от тела (10), (11), найдем искомую интенсивность I_0 :

$$I_0(0) = (1-r_{\text{др}})B(0) + 2r_{\text{др}} \int_0^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_2(\tau')d\tau'. \quad (16)$$

В результате мы получили выражения для лучистых потоков в слое (10)–(12) в аналитической форме. Скорость обмена энергией между полем излучения и веществом в данной группе вычисляется как

$$Q_{rm} = -\frac{\partial W}{\partial z} = \int_{-1}^1 \kappa(I-B)d\mu = \kappa \left[I_0 E_2(\tau) + \int_0^{\tau} B(\tau')E_1(\tau-\tau')d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_1(\tau'-\tau)d\tau' - 2B \right]. \quad (17)$$

С учетом условий отражения скорость обмена энергией преобразуется к виду

$$Q_{rm} = \kappa \left[(1-r_{\text{др}})E_2(\tau)B(0) + 2r_{\text{др}}E_2(\tau) \int_0^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_2(\tau')d\tau' + \int_0^{\tau} B(\tau')E_1(\tau-\tau')d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_1(\tau'-\tau)d\tau' - 2B \right],$$

а поток энергии излучения — к виду

$$W = (1-r_{\text{др}})E_3(\tau)B(0) + 2r_{\text{др}}E_3(\tau) \int_0^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_2(\tau')d\tau' + \int_0^{\tau} B(\tau')E_2(\tau-\tau')d\tau' - \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_2(\tau'-\tau)d\tau'.$$

Для расчета полной скорости обмена энергией и полного потока тепла полученные выражения нужно просуммировать по обычным или по лебеговым группам.

4.2. Зеркальное отражение. В случае зеркально отражающей поверхности граничное условие имеет вид

$$I_0(\mu) = (1-r_{\text{sr}})B(0) + r_{\text{sr}}I^{\ominus}(-\mu, 0), \quad (18)$$

где $-\mu$ — направляющий косинус зеркального изображения пучка фотонов. Подставляя в (18) падающее на поверхность излучение:

$$I^{\ominus}(\mu, 0) = -\int_0^{\tau_{\delta}} \frac{B(\tau')}{\mu} e^{\tau'/\mu} d\tau', \quad \mu < 0, \quad (19)$$

находим искомую интенсивность уходящего от поверхности излучения:

$$I_0(\mu) = B(0)(1-r_{\text{sr}}) + r_{\text{sr}} \int_0^{\tau_{\delta}} \frac{B(\tau')}{\mu} e^{-\tau'/\mu} d\tau'. \quad (20)$$

Скорость обмена энергией между полем излучения и веществом в группе вычисляется как

$$Q_{rm} = \kappa \left[(1-r_{\text{sr}})E_2(\tau)B(0) + r_{\text{sr}} \int_0^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_2(\tau+\tau')d\tau' + \int_0^{\tau} B(\tau')E_1(\tau-\tau')d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_{\delta}} B(\tau')E_1(\tau'-\tau)d\tau' - 2B \right],$$

а поток тепла — как

$$W = (1 - r_{\text{sr}})E_3(\tau)B(0) + r_{\text{sr}} \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau + \tau')d\tau' + \int_0^\tau B(\tau')E_2(\tau - \tau')d\tau' - \int_\tau^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau' - \tau)d\tau'.$$

4.3. Смешанное диффузно-зеркальное отражение. Обозначим полный коэффициент отражения как r_{refl} . Тогда коэффициент испускания равен $(1 - r_{\text{refl}})$. Пусть доля излучения r_{diff} отражается диффузно, а доля $(1 - r_{\text{diff}})$ — зеркально. Коэффициенты диффузного и зеркального отражения равны соответственно

$$r_{\text{dr}} = r_{\text{refl}} \cdot r_{\text{diff}}, \quad r_{\text{sr}} = r_{\text{refl}} \cdot (1 - r_{\text{diff}}).$$

Скорость обмена энергией и поток энергии излучения даются следующими выражениями:

$$Q_{rm} = \kappa(1 - r_{\text{refl}})E_2(\tau)B(0) + \kappa \left[2r_{\text{refl}}r_{\text{diff}}E_2(\tau) \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau')d\tau' + r_{\text{refl}}(1 - r_{\text{diff}}) \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau + \tau')d\tau' \right] + \kappa \left[\int_0^\tau B(\tau')E_1(\tau - \tau')d\tau' + \int_\tau^{\tau_\delta} B(\tau')E_1(\tau' - \tau)d\tau' - 2B \right], \quad (21)$$

$$W = (1 - r_{\text{refl}})E_3(\tau)B(0) + (2r_{\text{refl}}r_{\text{diff}}E_3(\tau) + r_{\text{refl}}(1 - r_{\text{diff}})) \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau + \tau')d\tau' + \int_0^\tau B(\tau')E_2(\tau - \tau')d\tau' - \int_\tau^{\tau_\delta} B(\tau')E_2(\tau' - \tau)d\tau'. \quad (22)$$

Напомним, что для вычисления полной скорости обмена энергией и полного потока энергии излучения выражения (21) и (22) необходимо проинтегрировать по спектру.

4.4. Вычисление интегральных экспонент. Входящие в (21)–(22) интегральные экспоненты различных порядков (13) связаны рекуррентной формулой

$$[n - 1]E_n(x) = e^{-x} - xE_{n-1}(x), \quad E_n(0) = 1/[n - 1], \quad n > 1.$$

При малых аргументах они вычисляются разложением в ряд. Для экспоненты первого порядка

$$E_1(x) = -c - \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k \cdot k!} \quad (0 < x < 1),$$

где $c = 0.577\,215\,664\,901\,533$ — постоянная Эйлера. При больших аргументах $x \geq 1$ можно использовать асимптотическое разложение

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x^k} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1)} = \frac{e^{-x}}{x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k k!}{x^k},$$

которому соответствует цепная дробь с положительными коэффициентами [Абрамовиц, 1979; Калиткин, 2008]:

$$E_n(x) = e^{-x} \frac{1}{x + \frac{n}{1 + \frac{1}{x + \frac{n+1}{1 + \frac{2}{x + \frac{n+2}{1 + \dots}}}}}}.$$

Точность формулы можно оценить вычислением половины разницы двух соседних — четной и нечетной обрезанных цепных дробей (четные и нечетные приближения подходят к значению функции с разных сторон). В отличие от ряда формула не допускает увеличения точности простым добавлением членов — необходим полный пересчет цепной дроби. Поэтому полезно знать, что машинная точность достигается при использовании порядка 220 звеньев цепи.

Заметим, что вычисление интегралов от интегральных экспонент в ситуации, когда температуры и плотности приписываются не к узлам, а к ячейкам, удобнее производить рассматривая все интегралы как интегралы Стильбеса. Например, для диффузного отражения

$$Q_{rm} = 2\pi\kappa \left[(1 - r_{dr})E_2(\tau)B(0) - 2r_{dr}E_2(\tau) \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')dE_3(\tau') + \int_0^\tau B(\tau')dE_2(\tau - \tau') - \int_\tau^{\tau_\delta} B(\tau')dE_2(\tau' - \tau) - 2B \right],$$

$$W = 2\pi \left[(1 - r_{dr})E_3(\tau)B(0) - 2r_{dr}E_3(\tau) \int_0^{\tau_\delta} B(\tau')dE_3(\tau') + \int_0^\tau B(\tau')dE_3(\tau - \tau') + \int_\tau^{\tau_\delta} B(\tau')dE_3(\tau' - \tau) \right],$$

так как имеет место связь $E'_{n+1}(x) = -E_n(x)$. Это позволяет в том числе аккуратно учитывать особенность в нуле первой интегральной экспоненты.

5. Сходимость многогруппового приближения и метода лебеговского осреднения

Метод лебеговского осреднения спектров показал высокую эффективность в расчетах переноса солнечного и инфракрасного излучения в стандартной (невозмущенной климатической) атмосфере Земли [Шильков, Шилькова, 1999; Аристова и др., 1999; Шильков, Герцев, 2015]. Число расчетных точек спектра, объем арифметических операций и хранимых данных сокращались в 10^4 раз в сравнении с поточечными расчетами при достижении точности не ниже 5 %. Эта точность сопоставима с точностью исходных данных о микросечениях поглощения излучения, заведомо меньше дисперсии данных о высотном распределении атмосферных газов и сопоставима с погрешностью, вносимой при пространственной дискретизации уравнения переноса излучения.

Ниже проведено сравнение сходимости метода и сходимости многогруппового приближения применительно к задаче переноса излучения в возмущенной атмосфере ударного слоя. В оценке используются спектральные сечения поглощения горячего воздуха без примесей элементов защиты КА, любезно предоставленные И. Б. Косаревым. Методика расчета сечений описана в [Косарев, 1999; Косарев, 2009].

Для проведения сравнения предположим, что газовая смесь находится в состоянии химического равновесия, отсутствует рассеяние на дисперсных частицах вещества, поверхность КА является абсолютно черной, температура свободных электронов равна кинетической температуре тяжелых частиц и постоянна вдоль ударного слоя, $T = 1.55$ эВ. В этих условиях формулы предыдущего параграфа упрощаются. В качестве основного параметра для сравнения выберем падающий на поверхность поток лучистой энергии W^\odot (величина этого потока влияет на конструкционные решения при проектировании защиты КА):

$$W^\odot(0) = \sigma_B T^4 \cdot \sum_g f_g \sum_{i=-[n/2]}^{i=[n/2]} \lambda_i |\mu_i| \cdot [1 - \exp(-\kappa_g \delta / |\mu_i|)], \quad \sum_{i=-[n/2]}^{i=[n/2]} \lambda_i = 2, \quad \sum_g f_g = 1.$$

Здесь при вычислении интеграла по угловой переменной μ вместо интегральной экспоненты используется квадратурная формула Гаусса с весами λ_i и узлами μ_i . Также выполнено суммирование по группам фотонов. Величина f_g есть вес группы g в планковском спектре излучения. В случае многогруппового приближения этот вес определяется положением интервала

$[E_{g-1}, E_g]$ на оси энергий. В случае лебегова осреднения вес равен мере лебегова множества, которому соответствует уровень поглощения κ_g . В многогрупповом приближении κ_g дается формулами (3), (4). Точное значение потока, вычисляемое в поточечном расчете спектра, равно

$$W^\circ(0) = \sigma_B \frac{15}{\pi^4} \cdot \int_0^\infty \frac{E^3}{e^{E/T} - 1} \sum_{i=-[n/2]}^{i=[n/2]} \lambda_i |\mu_i| \cdot [1 - \exp(-\kappa^{ab}(E) \delta / |\mu_i|)] dE.$$

Поток при $\delta \rightarrow 0$ стремится к нулю и при $\delta \rightarrow \infty$ стремится к асимптотическому пределу $\sigma_B T^4$ (поток, создаваемый абсолютно черным телом).

Результаты сравнения скорости сходимости многогруппового приближения и метода лебеговского осреднения к точному решению в зависимости от числа используемых групп, толщины слоя и плотности воздуха приведены на рис. 2–4. По оси абсцисс отложена толщина ударного слоя δ , меняющаяся в пределах от 2 до 200 см; по оси ординат — величина приходящего лучистого потока W° в единицах $\sigma_B T^4$. Варианты отличаются числом групп. В многогрупповом приближении в качестве границ групп выбирались равноотстоящие квантили распределения Планка с температурой $T = 1.55$ эВ. Так, например, в 10-групповом приближении веса f_g в формуле (32) равны примерно 1/10. Аналогичный принцип задания границ носителей резонансов и сетки по лебеговой переменной был принят и в методе лебеговского осреднения. Конечно, при рассмотрении конкретной задачи, ориентированной на конкретный узкий диапазон изменения ширины ударного слоя δ , число групп можно оптимизировать. Это достигается «привязкой» границ групп и расчетных точек по лебеговой переменной к особенностям макросечения поглощения. При оптимизации можно добиться уменьшения числа групп примерно в 2 раза без потерь в точности. Мы оптимизацию не проводили. На всех рисунках в обозначении вариантов лебеговского осреднения первое число означает количество носителей резонансов, а второе — количество лебеговых групп на каждом носителе. Полное число групп равно произведению этих двух величин.

Рис. 2 представляет результаты сходимости при плотности воздуха в ударном слое $\rho/\rho_0 \sim 10^{-2}$ по отношению к нормальной ($\rho_0 = 1.292 \cdot 10^{-3}$ г/см³). Эти условия достигаются при торможении космического аппарата в атмосфере Земли на высотах порядка 45–50 км. Многогрупповое приближение дает удовлетворительную точность (в пределах 30 %) при числе групп не менее 50. Метод лебеговского осреднения дает точность не ниже 2 % во всех рассмотренных вариантах, в том числе при полном числе расчетных точек по лебеговой переменной (число носителей, умноженное на число лебеговых групп) не более 40.

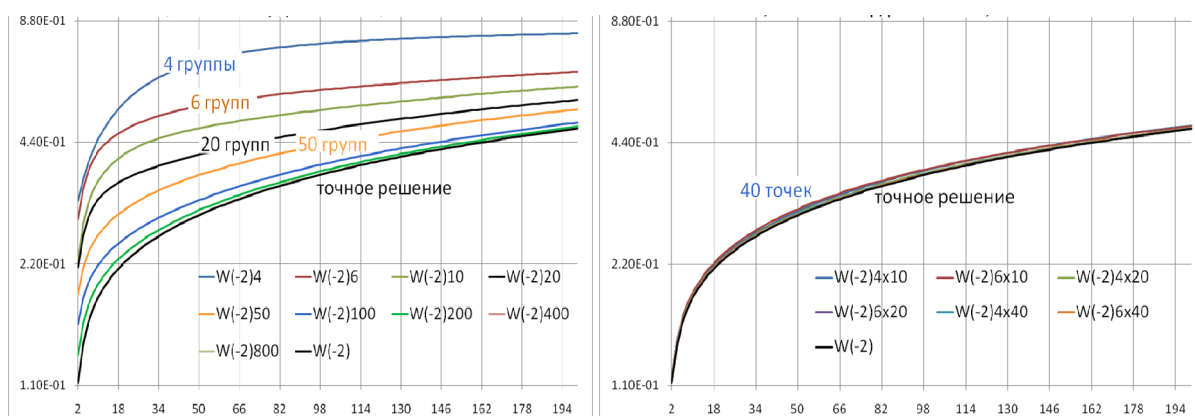


Рис. 2. Сходимость многогруппового приближения (слева) и лебеговского осреднения (справа) к точному решению для потока излучения в ударном слое при температуре $T = 1.55$ эВ и плотности воздуха по отношению к нормальной в ударном слое $\rho/\rho_0 \sim 10^{-2}$. Это соответствует высоте полета КА около 47 км

Рис. 3 представляет результаты сходимости при плотности воздуха $\rho/\rho_0 \sim 10^{-3}$ (торможение на высотах порядка 60–70 км). Многогрупповое приближение дает точность в пределах 30 % при числе групп не менее 200. Метод лебеговского осреднения по-прежнему обеспечивает точность не ниже 2 % во всех вариантах, в том числе при 40 расчетных точках.

Наконец, рис. 4 представляет результаты сходимости при плотности воздуха $\rho/\rho_0 \sim 10^{-4}$ (торможение на высотах порядка 75–90 км), где превалирующую роль играет перенос излучения в линиях. Многогрупповое приближение дает точность в пределах 70 % только при числе групп более 400. Метод лебеговского осреднения обеспечивает точность в пределах 25 % при 60 расчетных точках и точность не ниже 4 % при 120 эффективных расчетных точках по лебеговой переменной, получаемых на 6 носителях резонансов для 20 лебеговых групп.

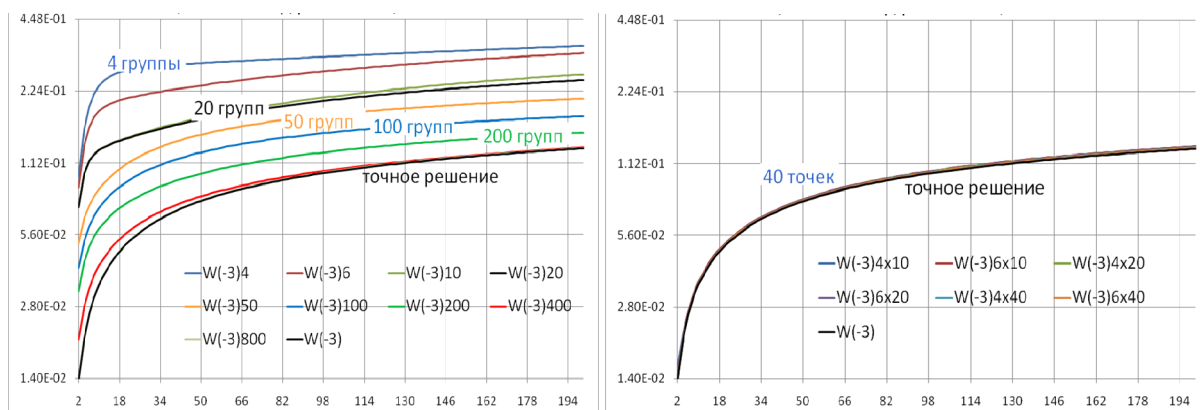


Рис. 3. Сходимость многогруппового приближения (слева) и лебеговского осреднения (справа) к точному решению для потока излучения в ударном слое при температуре $T = 1.55$ эВ и плотности воздуха по отношению к нормальной в ударном слое $\rho/\rho_0 \sim 10^{-3}$. Это соответствует высоте полета КА около 65 км

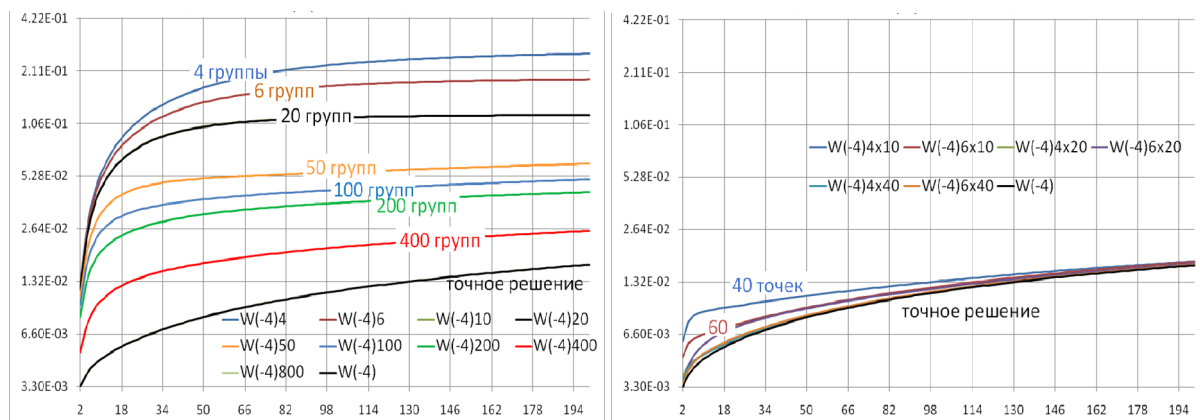


Рис. 4. Сходимость многогруппового приближения (слева) и лебеговского осреднения (справа) к точному решению для потока излучения в ударном слое при температуре $T = 1.55$ эВ и плотности воздуха по отношению к нормальной в ударном слое $\rho/\rho_0 \sim 10^{-4}$. Это соответствует высоте полета КА около 80 км

Представленные данные позволяют сделать вывод, что метод лебеговского осреднения сходится к точному решению значительно быстрее, чем многогрупповое приближение, особенно в верхних слоях атмосферы, где линии поглощения узки. Использование не более чем 100 лебеговых групп обеспечивает уровень точности, требуемый в инженерных расчетах.

Данный вывод сделан пока только в приближении термодинамически равновесного распределения населенностей возбужденных состояний молекул, атомов и ионов. Ожидается, что он останется справедливым и в неравновесных условиях, так как нет видимых препятствий

и причин для иного. Распространение метода на задачи неравновесной плазмы, требующие совместного решения уравнения переноса излучения и уравнений поуровневой кинетики, изложено в [Шильков, 2016].

6. Расчеты потоков излучения в приближении локально плоского слоя

Объединение расчета в приближении локально плоского слоя с методом лебеговского осреднения по энергиям фотонов позволяет экономично рассчитывать радиационные потоки, в том числе на обшивку космического аппарата, и обменный член энергией между излучением и веществом.

Для расчетов использованы коэффициенты с шестью носителями резонансов и 20 обобщенными лебеговскими группами на каждом носителе. Лебеговские коэффициенты построены для 48 значений температуры (от 0.0258 эВ = 300 К до 1000 эВ = $1.161 \cdot 10^7$ К) и 8 значений плотности (от $1.29 \cdot 10^{-9}$ до $1.29 \cdot 10^{-2}$ г/см³). Для значений термодинамических параметров внутри ячейки, не попадающих в заданные значения, используется двойная логарифмическая интерполяция.

При входе в атмосферу космического аппарата со сверхорбитальными скоростями образуется сильная ударная волна, в которой температура может достигать величин нескольких эВ. Для температуры на фронте ударной волны, достигающей значений 20 000 К, предельный поток энергии от оптически толстого слоя с такой температурой должен составлять величину $\sigma T^4 \sim 1.5 \cdot 10^{13}$ эрг · с⁻¹ · см⁻². Реальный рассчитанный нормальный поток тепла на поверхности тела в точке торможения составляет $7 \cdot 10^{11}$ эрг · с⁻¹ · см⁻², т. е. 4–5 % от максимально возможного, что хорошо согласуется с данными для однородного слоя, представленными выше.

На рис. 5 и рис. 6 представлены распределения потока тепла (эрг · с⁻¹ · см⁻²) и скорости обмена энергией (эрг · с⁻¹ · см⁻³) с газом в ударном слое сферы радиусом 1 м, летящей на высоте 65 км со скоростью 9 км/с. Температура поверхности тела 1200 К. Обычно лобовая часть спускаемого КА представляет собой сферу. Поток тепла на обшивку принято представлять в виде зависимости потока от угла отклонения от оси симметрии точки на поверхности тела этой сферы. Нормальный поток тепла на поверхности сферы по обводу тела представлен на рис. 7. Все расчеты полей газодинамического течения предоставлены В. И. Сахаровым [Сахаров, 2007]. Эти расчеты выполнены с учетом вязкого слоя.

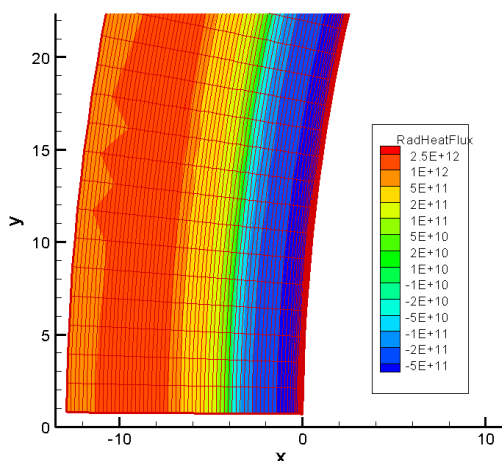


Рис. 5. Пространственное распределение нормального радиационного потока (эрг · с⁻¹ · см⁻²) в ударном слое около сферы радиусом 1 м, летящей на высоте 65 км со скоростью 9 км/с. Температура поверхности тела 1200 К. Цветная версия рисунка доступна в электронной версии на сайте журнала

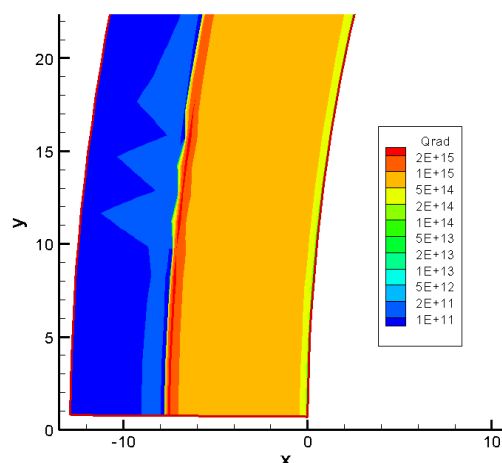


Рис. 6. Пространственное распределение скорости обмена энергией с веществом (эрг · с⁻¹ · см⁻³) в ударном слое около сферы радиусом 1 м, летящей на высоте 65 км со скоростью 9 км/с. Температура поверхности тела 1200 К. Цветная версия рисунка доступна в электронной версии на сайте журнала

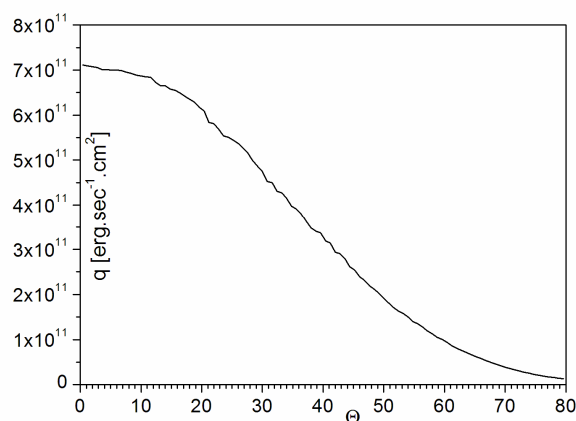


Рис. 7. Тепловой поток ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$) на поверхности сферы в зависимости от угла отклонения от оси симметрии точки на поверхности сферы радиусом 1 м, летящей на высоте 65 км со скоростью 9 км/с. Температура поверхности тела 1200 К

Рассмотрение аналогичной задачи для обтекания сферы значительно меньших размеров ($R = 0.66$ см), на более низкой высоте (22 км), при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 16.9$, представлено на рис. 8 (для обменного члена энергией) и на рис. 9 (для нормального потока тепла). Видно, что для сферы с меньшим радиусом угловая зависимость теплового потока более узкая.

На рис. 10 представлены аналогичные данные для обтекания затупленного конуса со следующими параметрами: радиус носового затупления $R = 50$ см, радиус скругления 25 см, угол полураствора конуса 60° , давление набегающего потока $P_\infty = 0.000405$ атм, температура $T_\infty = 219$ К, число Маха $M_\infty = 41.05$. Данные соответствуют высоте полета $\sim 50\text{--}60$ км. Температура на поверхности тела $T_w = 550$ К. Паразитные колебания в величине скорости обмена энергией вне ударного слоя вдоль обшивки обусловлены колебаниями газодинамических величин. Поле газодинамических величин использовалось в качестве входных данных для решения уравнения переноса излучения. Вследствие сильной зависимости планковской функции от температуры ($\sim T^4$) эти паразитные колебания усиливаются.

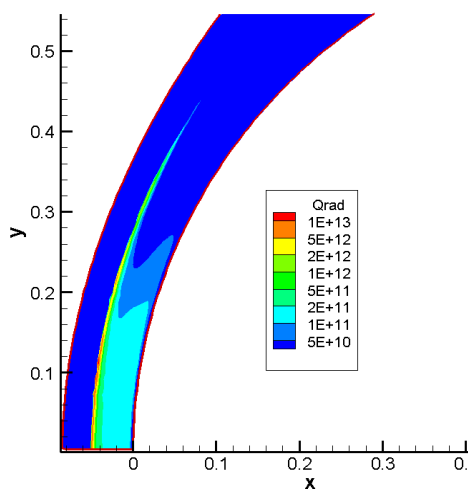


Рис. 8. Пространственное распределение скорости обмена энергией ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$) между газом и излучением в ударном слое сферы радиусом 0.66 см, летящей на высоте 22 км, при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 16.9$. Цветная версия рисунка доступна в электронной версии на сайте журнала

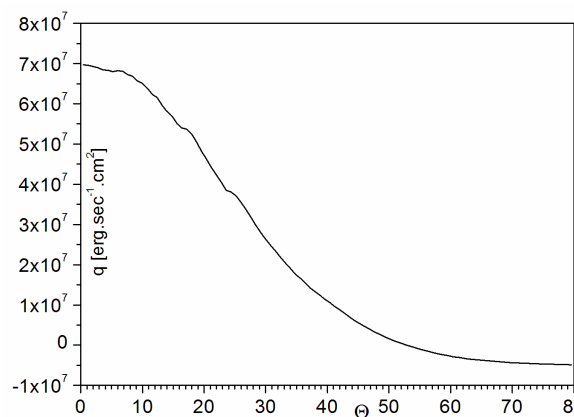


Рис. 9. Лучистый тепловой поток ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$) на поверхность сферы радиусом 0.66 см, летящей на высоте 22 км, при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 16.9$, в зависимости от угла отклонения от оси симметрии точки на поверхности сферы

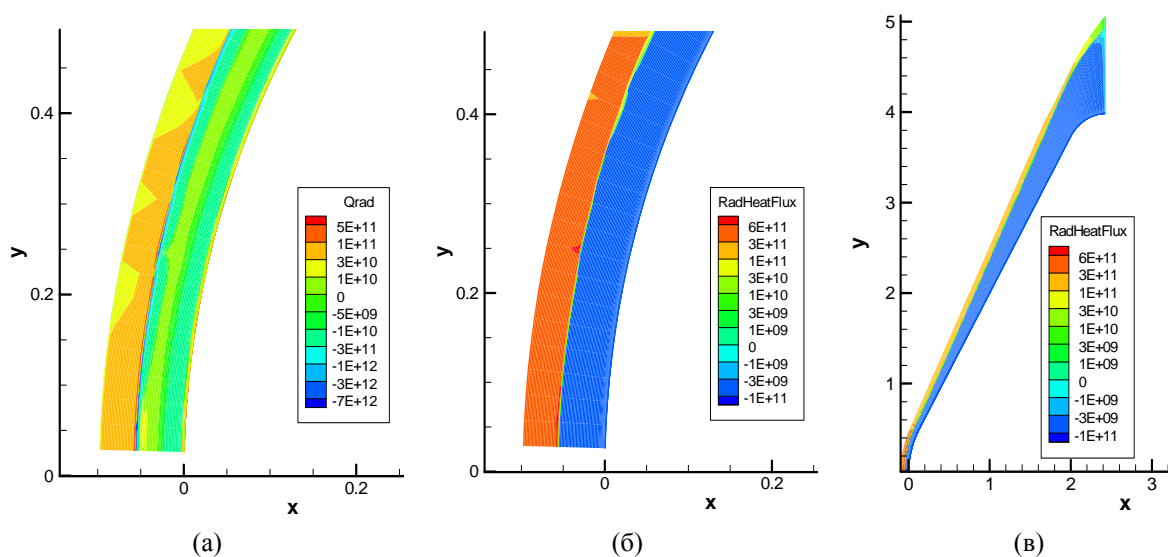


Рис. 10. Пространственные распределения скорости обмена энергией ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$) (а) и потока лучистой энергии ($\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$) в лобовой части (б) и во всей расчетной области (в) для ударного слоя около затупленного конуса со следующими параметрами: радиус носового затупления $R = 50$ см, радиус скругления 25 см, угол полураствора конуса 60° , давление набегающего потока $P_\infty = 0.000405$ атм, температура $T_\infty = 219$ К, число Маха $M_\infty = 41.05$. Данные соответствуют высоте полета 50–60 км. Температура поверхности тела 550 К. Цветная версия рисунка доступна в электронной версии на сайте журнала

На рис. 10 лучистый тепловой поток представлен для лобовой части расчетной области и для всей расчетной области. Результаты для всей расчетной области показывают, что приближение локально плоского слоя вполне справедливо в рассматриваемой задаче.

Для тел больших размеров радиационный поток сохраняет заметную величину даже при значительном удалении от точки торможения. Таким образом, при небольших размерах тела излучение играет роль поправочного члена. С увеличением размера излучение начинает играть заметную роль, влияя на распределение газодинамических величин и на лучистые тепловые потоки на поверхности, причем не только в окрестности точки торможения.

7. Заключение

Высокая точность свертки информации о спектрах позволяет отнести метод лебеговского осреднения к «точным» методам расчета интегральных по спектру характеристик радиации. С другой стороны, его высокая экономичность позволяет применять метод непосредственно в инженерных кодах вычислительной аэротермомеханики. Совместное использование метода и приближения локально плоского слоя позволяет экономично находить распределение излучения с согласованной точностью по спектральным и пространственно-угловым переменным.

Список литературы (References)

- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.
 Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Applied Mathematics Series 55. Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964 (Russ. ed.: Abramovic M., Stigan I. Spravochnik po special'nym funkciyam. — Moscow: Nauka, 1979).
- Аристова Е. Н., Гольдин В. Я., Шильков А. В., Шилькова С. В. Система ATRAD для расчета атмосферной радиации. Результаты расчета переноса солнечного излучения для летней атмосферы средних широт // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, № 5. — С. 117–125.

- Aristova E. N., Goldin V. Ia., Shil'kov A. V., Shilkova S. V.* Sistema ATRAD dlja rascheta atmosfernoj radiacii. Rezul'taty rascheta perenos solnechnogo izlucheniya dlja letnej atmosfery srednih shirot [ATRAD system for calculations of atmospheric radiation: calculation of solar radiation transport in mid-latitude summer atmosphere] // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 1999. — Vol. 11, no 5. — P. 117–125 (in Russian).
- Калиткин Н. Н., Панин И. А.* О вычислении интегральной экспоненты // *Математическое моделирование*. — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 87–91.
- Kalitkin N. N., Panin I. A.* On the computation of the exponential integral // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2009. — Vol. 1, no 1. — P. 88–90. (Original Russian paper: *Kalitkin N. N., Panin I. A.* O vychislenii integral'noj jeksponenty // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2008. — Vol. 20, no. 1. — P. 87–91.)
- Косарев И. Б.* Расчет термодинамических и оптических свойств паров вещества космических тел, вторгающихся в атмосферу Земли // *Инженерно-физический журнал*. — 1999. — Т. 72, № 6. — С. 1067.
- Kosarev I. B.* Raschet termodinamicheskikh i opticheskikh svojstv parov veshhestva kosmicheskikh tel, vtorgajushhihsja v atmosferu Zemli [Calculation of thermodynamic and optical properties of vapors of matter of cosmic bodies invading the Earth atmosphere] // *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal*. — 1999. — Vol. 47, no 6. — P. 1076–1086 (in Russian).
- Косарев И. Б.* Оптические свойства паров вещества космических тел, вторгающихся в атмосферу Земли // *Теплофиз. высоких температур*. — 2009. — Т. 47, № 6. — С. 811–821.
- Kosarev I. B.* The optical properties of vapors of matter of cosmic bodies invading the Earth atmosphere // *High Temperature*. — 2009. — Vol. 47, no. 6. — P. 777–787. (Original Russian paper: *Kosarev I. B.* Opticheskie svojstva parov veshhestva kosmicheskikh tel, vtorgajushhihsja v atmosferu Zemli // *Teplofizika vysokih temperatur*. — 2009. — Vol. 47, no. 6. — P. 811–821.)
- Сахаров В. И.* Численное моделирование термически и химически неравновесных течений и теплообмена в недорасширенных струях индукционного плазмотрона // *Известия РАН. МЖГ*. — 2007. — № 6. — С. 157–168.
- Saharov V. I.* Chislennoe modelirovanie termicheski i himicheski neravnovesnyh techenij i teploobmena v nedoras-shirenyh strujah indukcionnogo plazmotrona [Numerical simulation of thermally and chemically nonequilibrium flows and heat transfer in jets of the induction plasma torch] // *Izvestija RAN. MZhG*. — 2007. — No. 6. — P. 157–168 (in Russian).
- Суржиков А. Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
- Surzhikov A. T.* Teplovoe izluchenie gazov i plazmy [Thermal radiation of gases and plasma]. — Moscow: MG TU im. N. E. Baumana, 2004 (in Russian).
- Шильков А. В.* Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов // *Математическое моделирование*. — 1991. — Т. 3, № 2. — С. 63–81.
- Shil'kov A. V.* Metody osredneniya sechenij i jenergeticheskogo spektra v zadachah perenosu nejtronov [Averaging of cross sections and spectrum in neutron transport] // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 1991. — Vol. 3, no 2. — P. 63–81 (in Russian).
- Шильков А. В.* Метод спектральных моментов в моделировании излучающей столкновительной плазмы. — № 36. — М.: Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.
- Shil'kov A. V.* Metod spektral'nyh momentov v modelirovanii izluchajushhej stolknovitel'noj plazmy [Spectral momentum method in collisional-radiative modeling of plasmas]. — No. 36. — Moscow: Preprint of Keldysh Institute of Appl. Math., 2016 (in Russian).
- Шильков А. В., Герцев М. Н.* Верификация метода лебеговского осреднения // *Математическое моделирование*. — 2015. — Т. 27, № 8. — С. 13–31.
- Shil'kov A. V., Gerthev M. N.* Verification of the Lebesgue averaging method // *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2016. — Vol. 8, no. 2. — P. 93–107. (Original Russian paper: *Shil'kov A. V., Gerthev M. N.* Verifikacija metoda lebegovskogo osrednenija // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2015. — Vol. 27, no. 8. — P. 13–31.)
- Шильков А. В., Шилькова С. В.* Система ATRAD для расчетов атмосферной радиации. Расчеты переноса теплового излучения для безоблачной летней атмосферы средних широт // *Математическое моделирование*. — 1999. — Т. 11, № 1. — С. 18–24.
- Shil'kov A. V., Shilkova S. V.* Sistema ATRAD dlja raschetov atmosfernoj radiacii. Raschety perenosu teplovogo izlucheniya dlja bezoblachnoj letnej atmosfery srednih shirot [ATRAD system for calculations of atmospheric radiation: calculation of heat radiation transport in mid-latitude summer atmosphere without cloudiness] // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 1999. — Vol. 11, no. 1. — P. 18–24 (in Russian).
- Shil'kov A. V.* Generalized multigroup approximation and Lebesgue averaging method in particle transport problems // *Transp. Theory and Stat. Physics*. — 1994. — Vol. 23, no. 6. — P. 781–814.