**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 Т. 9 № 4 С. 537−545**
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-537-545

УДК: 517.925

Глобальный бифуркационный анализ рациональной системы Холлинга

В. А. Гайко

Национальная академия наук Беларуси,
Объединенный институт проблем информатики,
Беларусь, 220040, г. Минск, ул. Л. Беды, д. 6-4

E-mail: valery.gaiko@gmail.com

*Получено 10.03.2017, после доработки — 14.03.2017.
Принято к публикации 17.04.2017.*

В статье рассматривается квартичное семейство планарных векторных полей, соответствующее рациональной системе Холлинга, которая моделирует динамику популяций типа «хищник–жертва» в данной экологической или биомедицинской системе и которая обобщает классическую систему Лотки–Вольтерры. В простейших математических моделях изменение концентрации жертв в единицу времени в расчете на одного хищника, которое характеризуется так называемой функцией отклика, прямо пропорционально концентрации жертв, т. е. функция отклика в этих моделях линейная. Это означает, что в системе нет насыщения хищников, когда количество жертв достаточно велико. Однако было бы более реалистично рассматривать нелинейные и ограниченные функции отклика, и в литературе действительно используются различные виды таких функций для моделирования отклика хищников. После алгебраических преобразований рациональную систему Холлинга можно записать в виде квартичной динамической системы. Для исследования характера и расположения особых точек в фазовой плоскости этой системы используется разработанный нами метод, смысл которого состоит в том, чтобы получить простейшую (хорошо известную) систему путем обращения в нуль некоторых параметров (обычно параметров, поворачивающих поле) исходной системы, а затем последовательно вводить эти параметры, изучая динамику особых точек (как конечных, так и бесконечно удаленных) в фазовой плоскости. Используя полученную информацию об особых точках и применяя наш геометрический подход к качественному анализу, мы изучаем бифуркации предельных циклов квартичной системы. Чтобы контролировать все бифуркации предельных циклов, особенно бифуркации кратных предельных циклов, необходимо знать свойства и комбинировать действия всех параметров, поворачивающих векторное поле системы. Это может быть сделано с помощью принципа окончания Уинтнера–Перко, согласно которому максимальное однопараметрическое семейство кратных предельных циклов заканчивается либо в особой точке, которая, как правило, имеет ту же кратность (цикличность), либо на сепаратрисном цикле, который также, как правило, имеет ту же кратность (цикличность). Применяя этот принцип, мы доказываем, что квадричная система (и соответствующая рациональная система Холлинга) может иметь не более двух предельных циклов, окружающих одну особую точку.

Ключевые слова: рациональная динамическая система Холлинга, параметр поворота поля, бифуркация, особая точка, предельный цикл, принцип окончания Уинтнера–Перко

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкой службы академических обменов (DAAD).

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2017 VOL. 9 NO. 4 P. 537–545
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-4-537-545

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 517.925

Global bifurcation analysis of a rational Holling system

V. A. Gaiko

National Academy of Sciences of Belarus,
United Institute of Informatics Problems,
L. Beda st. 6-4, Minsk, 220040, Belarus

E-mail: valery.gaiko@gmail.com

Received 10.03.2017, after completion — 14.03.2017.
Accepted for publication 17.04.2017.

In this paper, we consider a quartic family of planar vector fields corresponding to a rational Holling system which models the dynamics of the populations of predators and their prey in a given ecological or biomedical system and which is a variation on the classical Lotka–Volterra system. For the latter system, the change of the prey density per unit of time per predator called the response function is proportional to the prey density. This means that there is no saturation of the predator when the amount of available prey is large. However, it is more realistic to consider a nonlinear and bounded response function, and in fact different response functions have been used in the literature to model the predator response. After algebraic transformations, the rational Holling system can be written in the form of a quartic dynamical system. To investigate the character and distribution of the singular points in the phase plane of the quartic system, we use our method the sense of which is to obtain the simplest (well-known) system by vanishing some parameters (usually field rotation parameters) of the original system and then to input these parameters successively one by one studying the dynamics of the singular points (both finite and infinite) in the phase plane. Using the obtained information on singular points and applying our geometric approach to the qualitative analysis, we study the limit cycle bifurcations of the quartic system. To control all of the limit cycle bifurcations, especially, bifurcations of multiple limit cycles, it is necessary to know the properties and combine the effects of all of the rotation parameters. It can be done by means of the Wintner–Perko termination principle stating that the maximal one-parameter family of multiple limit cycles terminates either at a singular point which is typically of the same multiplicity (cyclicity) or on a separatrix cycle which is also typically of the same multiplicity (cyclicity). Applying this principle, we prove that the quartic system (and the corresponding rational Holling system) can have at most two limit cycles surrounding one singular point.

Keywords: rational Holling dynamical system, field rotation parameter, bifurcation, singular point, limit cycle, Wintner–Perko termination principle

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 537–545 (Russian).

The work was supported by the German Academic Exchange Service (DAAD).

1. Введение

Мы рассматриваем квартичное семейство планарных векторных полей, соответствующее рациональной системе Холлинга [Holling, 1959], которая моделирует динамику популяций типа «хищник–жертва» в данной экологической или биомедицинской системе и которая обобщает классическую систему Лотки–Вольтерры; см. [Баутин, Леонтович, 1990; Bazykin, 1998; Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Broer, Gaiko, 2010; Gaiko, 2003; Гайко, 2011; Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008; Zhu, Campbell, Wolkowicz, 2002].

В простейших математических моделях изменение концентрации жертв в единицу времени в расчете на одного хищника, которое характеризуется так называемой функцией отклика, прямо пропорционально концентрации жертв, т. е. функция отклика в этих моделях линейная. Это означает, что в системе нет насыщения хищников, когда количество жертв достаточно велико. Однако было бы более реалистично рассматривать нелинейные и ограниченные функции отклика, и в литературе действительно используются различные виды таких функций для моделирования отклика хищников; см. [Bazykin, 1998; Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Broer, Gaiko, 2010; Гайко, 2011; Holling, 1959; Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008; Zhu, Campbell, Wolkowicz, 2002].

В [Zhu, Campbell, Wolkowicz, 2002] изучалась следующая модель «хищник–жертва»:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a-\lambda x) - yp(x), \\ \dot{y} &= -\delta y + yq(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Переменные $x > 0$ и $y > 0$ обозначают в (1) концентрацию популяций жертв и хищников соответственно, а $p(x)$ соответствует немонотонной функции отклика, которая задается в виде

$$p(x) = \frac{mx}{\alpha x^2 + \beta x + 1}, \tag{2}$$

где α, m — положительные, а $\beta > -2$. Заметим, что в отсутствие хищников количество жертв здесь растет по логистическому закону. Параметр a обозначает собственную скорость роста популяции жертв, а $\lambda > 0$ — степень конкуренции жертв или ограничения их ресурсов. Естественная смертность хищников задается параметром $\delta > 0$. Функция $p(x)$ определяется как $q(x) = cp(x)$, где $c > 0$ — показатель конверсии жертв в массу хищников; см. [Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Broer, Gaiko, 2010; Гайко, 2011].

В [Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Broer, Gaiko, 2010; Гайко, 2011] исследовалась система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\left(1 - \lambda x - \frac{y}{\alpha x^2 + \beta x + 1}\right), \\ \dot{y} &= y\left(-\delta - \mu y + \frac{x}{\alpha x^2 + \beta x + 1}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha \geq 0$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$ и $\beta > -2\sqrt{\alpha}$ — параметры.

Система (3) получается из (1) добавлением члена $-\mu y$ во второе уравнение, а также масштабированием переменных x и y, времени t и параметров системы. Таким образом принимается в расчет конкуренция между хищниками за ресурсы, отличные от жертвы. Неотрицательный параметр μ характеризует степень такой конкуренции. Системы (1)–(3) представляют собой модели «хищник–жертва» с обобщенными функциями отклика Холлинга IV типа.

В [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008] рассматривалась следующая обобщенная модель «хищник–жертва»:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx(1 - x/k) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-d + cp(x)) \end{aligned} \tag{4}$$

с обобщенными функциями отклика Холлинга III типа:

$$p(x) = \frac{mx^2}{ax^2 + bx + 1}. \tag{5}$$

У этой системы, где $x > 0$ и $y > 0$, семь параметров: параметры a, c, d, k, m, r — положительные, а параметр b может быть как отрицательным, так и неотрицательным. Параметры a, b и m — это подходящие параметры функции отклика. Параметр d является показателем смертности хищников, а параметр c — это показатель конверсии жертв в массу хищников. В отсутствие хищников количество жертв растет по логистическому закону со скоростью r. Окружающая среда имеет потенциальную емкость жертв, определяемую параметром k.

Случай $b \geq 0$ рассматривался ранее; см. ссылки в [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]. Случай $b < 0$ более интересный: он соответствует модели функционального отклика с ограниченной групповой защитой. В отличие от случая обобщенной функции Холлинга IV типа, где функция отклика стремится к нулю при стремлении популяции жертв к бесконечности (см. [Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Broer, Gaiko, 2010; Гайко, 2011; Zhu, Campbell, Wolkowicz, 2002]), обобщенная функция Холлинга III типа стремится к ненулевому значению при стремлении популяции жертв к бесконечности. При этом функция отклика III типа имеет максимум в некоторой точке при $b < 0$ [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008].

После масштабирования x и y, а также параметров и времени t эта система может быть сведена к системе только с четырьмя параметрами $(\alpha, \beta, \delta, \rho)$ [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x(1 - x) - yp(x), \\ \dot{y} &= y(-\delta + p(x)), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$p(x) = \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}. \tag{7}$$

В данной статье мы будем рассматривать обобщенную модель Холлинга вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\left(1 - \lambda x - \frac{xy}{\alpha x^2 + \beta x + 1}\right), \\ \dot{y} &= -y\left(\delta + \mu y - \frac{x^2}{\alpha x^2 + \beta x + 1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

с теми же ограничениями на параметры, что и в системе (3).

Запишем (8) в полиномиальном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x((1 - \lambda x)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - xy) \equiv P, \\ \dot{y} &= -y((\delta + \mu y)(\alpha x^2 + \beta x + 1) - x^2) \equiv Q. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогичная система изучалась и ранее, например в работе [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]. Однако качественный анализ, проведенный в [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008] (как и в работах [Broer, Naudot, Roussarie, Saleh, 2007; Zhu, Campbell, Wolkowicz, 2002]), был, к сожалению, неполным в силу того, что глобальные бифуркации предельных циклов (9) не могли быть исследованы должным образом с помощью методов и приемов, используемых ранее в качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, не был решен самый принципиальный вопрос бифуркационного анализа предельных циклов: о возможности появления дополнительных полуустойчивых циклов при изменении параметров, поворачивающих векторное поле системы.

Чтобы завершить качественный анализ данной системы, мы будем вместе с (9) рассматривать вспомогательную систему (см. [Broer, Gaiko, 2010; Гайко, 2011])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P - \gamma Q, \\ \dot{y} &= Q + \gamma Q, \end{aligned} \tag{10}$$

применяя к (9) и (10) новые бифуркационные методы и оригинальные геометрические подходы, разработанные в [Broer, Gaiko, 2010; Gaiko, 2003; Гайко, 2011; Gaiko, 2011–2015].

Для исследования особых точек системы (9) мы будем использовать две теоремы Пуанкаре (теоремы 1 и 2), а также классические методы качественного исследования полиномиальных динамических систем; см. [Баутин, Леонтович, 1990].

Теорема 1 (первая теорема Пуанкаре). Если N, N_f, N_c и C — соответственно числа узлов, фокусов, центров и седел в конечной части фазовой плоскости, а N' и C' — числа узлов и седел на бесконечности, то имеет место соотношение

$$N + N_f + N_c + N' = C + C' + 1.$$

Теорема 2 (вторая теорема Пуанкаре). Если все точки простые, то вдоль изоклины без кратных точек, расположенной в пределах одной полусферы Пуанкаре, особые точки располагаются так, что вслед за седлом будет узел, фокус или центр и наоборот. Если на изоклине две точки разделены экватором, то за седлом следует опять седло, за узлом, фокусом или центром — узел, фокус или центр.

Для глобального анализа бифуркаций предельных циклов систем (9) и (10) мы будем использовать известные результаты [Perko, 2002], сформулированные для систем вида

$$\dot{x} = f(x, \mu), \tag{11}$$

где $x \in R^2, \mu \in R^n, f \in R^2$ (f — полиномиальная векторная функция), и

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \tag{12}$$

где $x \in R^2, f \in R^2$ и λ — скалярный параметр, поворачивающий векторное поле (10).

Теорема 3 (принцип окончания Уинтнера–Перко). Любое однопараметрическое семейство кратных предельных циклов полиномиальной системы (11) может быть единственным образом продолжено в максимальное однопараметрическое семейство (кривую) таких циклов, которое будет либо открытым, либо циклическим. Если это семейство открытое, то оно оканчивается, когда параметр или предельные циклы становятся неограниченными, либо в какой-то особой точке системы (11), которая в типичном случае является негрубым фокусом той же кратности, либо на каком-то сепаратрисном цикле (11), который в типичном случае имеет ту же кратность.

Теорема 4 (о монотонных семействах предельных циклов). Если L_0 — неособый кратный предельный цикл системы (12) при $\lambda = \lambda_0$, то L_0 принадлежит однопараметрическому семейству предельных циклов системы (12):

1) если кратность цикла L_0 нечетная, то семейство либо расширяется, либо сжимается монотонно при прохождении λ через значение λ_0;

2) если кратность цикла L_0 четная, то L_0 расщепляется на устойчивый и неустойчивый предельные циклы при прохождении λ через λ_0 в одном направлении и L_0 исчезает при прохождении λ через λ_0 в противоположном направлении; т. е. в точке λ_0 имеет место бифуркация типа «складка».

2. Глобальный бифуркационный анализ

Рассмотрим систему (9). Используя теоремы 1 и 2, а также классические методы качественного анализа полиномиальных систем [Баутин, Леонтович, 1990] и результаты работы [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008], исследуем сначала особые точки этой системы.

Система (9) имеет две инвариантные прямые: $x=0$ и $y=0$, и ее особые точки в конечной части плоскости определяются алгебраической системой

$$\begin{aligned} &x((1-\lambda x)(\alpha x^2+\beta x+1)-xy)=0,\\ &y((\delta+\mu y)(\alpha x^2+\beta x+1)-x^2)=0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) мы получаем: две особые точки — $(0,0)$ и $(0,-\delta/\mu)$; не более двух точек, определяемых условием

$$\alpha x^2+\beta x+1=0,\quad y=0, \tag{14}$$

и не более шести точек, определяемых системой

$$\begin{aligned} &xy=(1-\lambda x)(\alpha x^2+\beta x+1),\\ &y(\delta+\mu y)=x(1-\lambda x), \end{aligned} \tag{15}$$

среди которых всегда есть особая точка $(1/\lambda,0)$; см. [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008].

Точка $(0,0)$ всегда является седлом, а точка $(1/\lambda,0)$ может быть узлом, седлом или седлоузлом. Точка $(1/\lambda,0)$ может также менять свою кратность, когда особые точки входят или выходят из первого квадранта. Кроме того, в первом квадранте может появиться двукратная особая точка, которая распадается на две особые точки. В случае $\beta\ge 0$ (соответственно, в случае $-2\sqrt{\alpha}<\beta<0$) в первом квадранте может быть не более одной (соответственно, не более двух) особых точек. Если в первом открытом квадранте только одна особая точка, то это антиседло (узел, фокус или центр). Если в первом открытом квадранте только две особые точки, то та точка, которая лежит левее относительно оси x, является антиседлом, а та, которая лежит правее, — это седло [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]. Особые точки, не лежащие в первом квадранте, не имеют биологического смысла.

Для исследования особых точек системы (9) на бесконечности рассмотрим соответствующие дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y((\delta+\mu y)(\alpha x^2+\beta x+1)-x^2)}{x((1-\lambda x)(\alpha x^2+\beta x+1)-xy)}. \tag{16}$$

Разделив числитель и знаменатель правой части (16) на x^4 $(x\ne 0)$ и обозначив y/x через u (так же как и dy/dx), мы получим алгебраическое уравнение

$$u((\mu/\lambda)u-1)=0,\quad u=y/x, \tag{17}$$

для всех бесконечно удаленных особых точек уравнения (16), за исключением случая $x=0$, соответствующего «концам» оси y; см. [Gaiko, 2003]. Для этого специального случая мы можем разделить числитель и знаменатель правой части (16) на y^4 $(y\ne 0)$, обозначая x/y через v (так же как и dx/dy), и рассмотреть алгебраическое уравнение

$$v^3(v-\mu/\lambda)=0, v=x/y. \tag{18}$$

Уравнения (17) и (18) дают три бесконечно удаленные особенности для (16): простой узел на «концах» оси x, тройной узел на «концах» оси y, а также простое седло в направлении $y/x=\lambda/\mu$.

Чтобы исследовать характер и распределение особых точек на фазовой плоскости, мы использовали метод, разработанный в [Gaiko, 2003]. Суть этого метода состоит в получении простейшей (хорошо известной) системы с помощью зануления некоторых параметров исходной системы (обычно параметров, поворачивающих векторное поле) и затем в последовательном введении этих параметров, при котором изучается динамика особых точек (как конечных, так и бесконечно удаленных) на фазовой плоскости данной системы.

Используя полученную информацию и применяя метод, разработанный в [Gaiko, 2003], мы можем изучать бифуркации предельных циклов системы (9). Для этого понадобятся также некоторые результаты, полученные в [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]. В частности, мы будем использовать результаты по цикличности особых точек системы (9). Однако, безусловно, этих результатов совершенно недостаточно, чтобы доказать главное утверждение данного раздела: о максимальном числе предельных циклов системы (9).

Применяя к системе (9) определение параметра, поворачивающего векторное поле [Баутин, Леонтович, 1990; Gaiko, 2003], вычислим соответствующие определители для параметров α и β:

$$\Delta_\alpha = PQ'_\alpha - QP'_\alpha = x^4 y(y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x)), \tag{19}$$

$$\Delta_\beta = PQ'_\beta - QP'_\beta = x^4 y(y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x)). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что при возрастании параметров α и β векторное поле (9) в первом квадранте поворачивается в положительном направлении (против часовой стрелки) только снаружи эллипса

$$y(\delta + \mu y) - x(1 - \lambda x) = 0. \tag{21}$$

Поэтому для изучения бифуркаций предельных циклов системы (9) имеет смысл вместе с (9) рассматривать вспомогательную систему (10) с параметром γ, поворачивающим векторное поле на всей фазовой плоскости:

$$\Delta_\gamma = P^2 + Q^2 \geq 0. \tag{22}$$

Используя систему (10), а также результаты [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008; Perko, 2002], докажем следующую теорему.

Теорема 5. Система (9) может иметь не более двух предельных циклов, окружающих одну особую точку.

Доказательство. Докажем сначала, что система (9) может иметь по крайней мере два предельных цикла. Начнем с кубичной системы (9), где $\alpha = \beta = 0$. Ясно, что такая система (с двумя инвариантными прямыми) не может иметь предельных циклов вообще [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]. После введения в нее отрицательного параметра β векторное поле (9) повернется на бесконечности в отрицательном направлении (по часовой стрелке), за счет чего изменятся структура и характер устойчивости бесконечно удаленных особых точек, и на бесконечности сразу же появится неустойчивый предельный цикл Γ_1. Этот цикл будет окружать устойчивое антиседло (узел или фокус) A, которое находится в первом квадранте системы (9). После введения в (9) положительного параметра α векторное поле (9) повернется на бесконечности в положительном направлении (против часовой стрелки), структура и характер устойчивости бесконечно удаленных особых точек снова изменятся, и на бесконечности появится устойчивый предельный цикл Γ_2, окружающий Γ_1. При дальнейшем увеличении параметра α предельные циклы Γ_1 и Γ_2 образуют полуустойчивый цикл Γ_{12}, который затем исчезает в «уплотнении траекторий» [Gaiko, 2003]. Таким образом, мы доказали, что система (9) может иметь по крайней мере два предельных цикла. См. также [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008].

Докажем теперь, что система (9) имеет не более двух предельных циклов. Доказательство проводится от противного, с помощью бифуркационных методов теории катастроф [Gaiko, 2003; Perko, 2002]. Рассмотрим систему (10) с тремя параметрами: α, β и γ (параметры δ, λ и μ можно зафиксировать, так как они не порождают предельных циклов). Предположим, что (10) имеет три предельных цикла, окружающих единственную особую точку A, лежащую в первом квадранте фазовой плоскости. Тогда мы попадем в некоторую область пространства параметров α, β и γ, будучи ограниченными определенными условиями на три других параметра, δ, λ и μ. Эта область ограничена двумя поверхностями типа «складка», которые образуют локальную бифуркационную поверхность трехкратных предельных циклов типа «сборка» [Gaiko, 2003].

Соответствующее максимальное однопараметрическое семейство трехкратных предельных циклов не может быть циклическим, так как иначе в пространстве параметров будет существовать по крайней мере одна точка, которая соответствует предельному циклу кратности четыре (или даже выше) [Gaiko, 2003].

Продолжая бифуркационную кривую четырехкратных предельных циклов через эту точку и параметризуя соответствующее максимальное семейство четырехкратных предельных циклов параметром γ, поворачивающих векторное поле, в соответствии с теоремой 4 мы получим монотонную кривую, которая по принципу окончания Уинтнера–Перко (теорема 3) с одной стороны ограничена особой точкой A, а с другой — сепаратрисным циклом, окружающим эту точку [Gaiko, 2003].

А так как мы знаем по крайней мере цикличность особой точки, которая равна двум (см. [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008]), мы получаем противоречие с принципом окончания, утверждающим, что кратность предельных циклов не может быть выше, чем кратность (цикличность) особой точки, в которой они оканчиваются.

Если однопараметрическое семейство четырехкратных предельных циклов не является циклическим, то в соответствии с тем же самым принципом (теорема 3) мы опять получаем противоречие с результатами [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008] о цикличности A, не допускающими кратности предельных циклов выше двух. Это противоречие завершает доказательство теоремы 5 в случае одной особой точки в первом квадранте.

Предположим теперь, что система (10) с двумя конечными особенностями в первом квадранте, седлом S и антиседлом A, имеет три предельных цикла, окружающих точку A. Тогда мы попадем в некоторую область пространства параметров α, β и γ, которая ограничена бифуркационной поверхностью трехкратных предельных циклов типа «складка».

Соответствующее максимальное однопараметрическое семейство трехкратных предельных циклов не может быть циклическим, так как иначе в пространстве параметров будет существовать по крайней мере одна точка, которая соответствует предельному циклу кратности четыре (или даже выше).

Продолжая бифуркационную кривую предельных циклов кратности четыре через эту точку и параметризуя соответствующее максимальное семейство трехкратных предельных циклов параметром γ, поворачивающих векторное поле, мы получаем, по теореме 4, две монотонные кривые кратности три и один соответственно, которые по принципу окончания Уинтнера–Перко (теорема 3) оканчиваются либо в особой точке A, либо на сепаратрисном цикле, окружающем эту точку [Gaiko, 2003]. А так как мы знаем по крайней мере цикличность особой точки, которая в данном случае равна двум [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008], мы получаем противоречие с принципом окончания (теорема 3).

Если однопараметрическое семейство трехкратных предельных циклов не является циклическим, то в соответствии с тем же принципом (теорема 3) мы опять получаем противоречие с результатами [Lamontagne, Coutu, Rousseau, 2008] о цикличности A, не допускающими кратности предельного цикла выше двух [Gaiko, 2003].

Таким образом, мы заключаем, что система (9) не может иметь ни трехкратных предельных циклов, ни более двух предельных циклов, окружающих одну особую точку. Теорема 5 доказана.

3. Заключение

В данной статье был проведен глобальный бифуркационный анализ квартичного семейства планарных векторных полей, соответствующего рациональной системе Холлинга, которая моделирует динамику популяций типа «хищник–жертва» в некоторой экологической или биомедицинской системе и которая обобщает классическую систему Лотки–Вольтерры. В частности, было доказано, что такая система может иметь не более двух предельных циклов, окружающих одну особую точку.

Список литературы (References)

Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1990.

Bautin N. N., Leontovich E. A. Methods and ways of the qualitative analysis of dynamical systems in a plane. — Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).

Гайко В. А. Глобальный бифуркационный анализ квартичной модели «хищник–жертва» // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 161–171.

Gaiko V. A. Global bifurcation analysis of a quartic predator–prey model // Computer Research and Modeling. — 2011. — Vol. 3, no. 2. — P. 161–171 (in Russian).

Bazykin A. D. Nonlinear dynamics of interacting populations. — Singapore: World Scientific, 1998.

Broer H. W. Dynamics of a predator-prey model with non-monotonic response function // Discr. Contin. Dynam. Syst. Ser. A. — 2007. — Vol. 18. — P. 221–251.

Broer H. W., Gaiko V. A. Global qualitative analysis of a quartic ecological model // Nonlinear Anal. — 2010. — Vol. 72, no. 2. — P. 628–634.

Gaiko V. A. Global bifurcation theory and Hilbert's sixteenth problem. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Gaiko V. A. Multiple limit cycle bifurcations of the FitzHugh–Nagumo neuronal model // Nonlinear Anal. — 2011. — Vol. 74, no. 18. — P. 532– 542.

Gaiko V. A. On limit cycles surrounding a singular point // Differ. Equ. Dyn. Syst. — 2012. — Vol. 20, no. 3. — P. 329–337.

Gaiko V. A. Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions // Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — Vol. 4, no. 3. — P. 242–254.

Gaiko V. A. The applied geometry of a general Liénard polynomial system // Appl. Math. Letters. — 2012. — Vol. 25, no. 12. — P. 2327–2331.

Gaiko V. A. Limit cycle bifurcations of a special Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2014. — Vol. 9, no. 1. — P. 109–123.

Gaiko V. A. Maximum number and distribution of limit cycles in the general Liénard polynomial system // Adv. Dyn. Syst. Appl. — 2015. — Vol. 10, no. 2. — P. 177–188.

Holling C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism // Can. Entomolog. — 1959. — Vol. 91. — P. 385–398.

Lamontagne Y., Coutu C., Rousseau C. Bifurcation analysis of a predator-prey system with generalized Holling type III functional response // J. Dyn. Diff. Equations. — 2008. — Vol. 20. — P. 535–571.

Perko L. Differential equations and dynamical systems. — New York: Springer, 2002.

Zhu H., Campbell S. A., Wolkowicz G. S. K. Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response // SIAM J. Appl. Math. — 2002. — Vol. 63. — P. 636–682.