

УДК: 534.222

## Концентрация мощных акустических пучков в вязкоупругом материале с неоднородным распределением воздушных полостей

В. А. Гусев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет,  
Россия, 119992, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

E-mail: [vgusev@bk.ru](mailto:vgusev@bk.ru)

*Получено 19.01.2017, после доработки — 11.04.2017.*

*Принято к публикации 31.05.2017.*

Известно, что скорость звука в средах, содержащих сильно сжимаемые включения, например воздушные поры в упругой среде или газовые пузырьки в жидкости, может существенно уменьшиться по сравнению с однородной средой. Эффективный нелинейный параметр такой среды, описывающий проявление нелинейных эффектов, возрастает в сотни и тысячи раз из-за большого различия сжимаемости включений и окружающей среды. Пространственное изменение концентрации таких включений приводит к переменной локальной скорости звука, что, в свою очередь, вызывает пространственно-временное перераспределение акустической энергии в волне и искажению ее временных профилей и поперечной структуры ограниченных пучков. В частности, могут образовываться области фокусировок. При определенных условиях возможно формирование звукового канала, обеспечивающего волновое распространение акустических сигналов в среде с подобными включениями. Таким образом, возможно управление пространственно-временной структурой акустических волн с помощью введения сильно сжимаемых включений с заданным пространственным распределением и концентрацией. Целью работы является исследование распространения акустических волн в резиноподобном материале с неоднородным пространственным распределением воздушных полостей. Основной задачей является развитие адекватной теории таких структурно-неоднородных сред, теории распространения нелинейных акустических волн и пучков в этих средах, расчет акустических полей и выявление связи параметров среды и включений с характеристиками распространяющихся волн. В работе выведено эволюционное самосогласованное уравнение с интегро-дифференциальным членом, описывающее в низкочастотном приближении распространение интенсивных акустических пучков в среде с сильно сжимаемыми полостями. В этом уравнении учтено вторичное акустическое поле, вызванное динамикой колебаний полостей. Разработан метод, позволяющий получить точные аналитические решения для поля нелинейного акустического пучка на его оси и правильно рассчитать поле в фокальных областях. Полученные результаты применены для теоретического моделирования материала с неоднородным распределением сильно сжимаемых включений.

Ключевые слова: пористая среда, вязкоупругость, нелинейные акустические пучки

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-22-00042).

UDC: 534.222

# The concentration of powerful acoustic beams in a viscoelastic medium with non-uniform distribution of the air cavities

V. A. Gusev

Lomonosov's Moscow State University, Physical Faculty,  
Leninskie gory 1, Moscow, 119992, Russia

E-mail: [vgusev@bk.ru](mailto:vgusev@bk.ru)

*Received 19.01.2017, after completion – 11.04.2017.  
Accepted for publication 31.05.2017.*

It is known that the sound speed in medium that contain highly compressible inclusions, e.g. air pores in an elastic medium or gas bubbles in the liquid may be significantly reduced compared to a homogeneous medium. Effective nonlinear parameter of medium, describing the manifestation of nonlinear effects, increases hundreds and thousands of times because of the large differences in the compressibility of the inclusions and the medium. Spatial change in the concentration of such inclusions leads to the variable local sound speed, which in turn calls the spatial-temporal redistribution of acoustic energy in the wave and the distortion of its temporal profiles and cross-section structure of bounded beams. In particular, focal areas can form. Under certain conditions, the sound channel is formed that provides waveguide propagation of acoustic signals in the medium with similar inclusions. Thus, it is possible to control spatial-temporal structure of acoustic waves with the introduction of highly compressible inclusions with a given spatial distribution and concentration. The aim of this work is to study the propagation of acoustic waves in a rubberlike material with non-uniform spatial air cavities. The main objective is the development of an adequate theory of such structurally inhomogeneous media, theory of propagation of nonlinear acoustic waves and beams in these media, the calculation of the acoustic fields and identify the communication parameters of the medium and inclusions with characteristics of propagating waves. In the work the evolutionary self-consistent equation with integro-differential term is obtained describing in the low-frequency approximation propagation of intense acoustic beams in a medium with highly compressible cavities. In this equation the secondary acoustic field is taken into account caused by the dynamics of the cavities oscillations. The method is developed to obtain exact analytical solutions for nonlinear acoustic field of the beam on its axis and to calculate the field in the focal areas. The obtained results are applied to theoretical modeling of a material with non-uniform distribution of strongly compressible inclusions.

Keywords: porous medium, viscoelasticity, nonlinear acoustic beams

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 517–533 (Russian).

This work was supported by Russian Science Foundation (project 14-22-00042).

## Введение

Хорошо известно, что наличие сильно сжимаемых включений, например, газовых пузырьков в жидкости или пор в упругой среде, приводит к существенному уменьшению локальной скорости звука [Гаврилов, 1969; Накоряков, 1990; Григорьев, 2014; Глотов, 1990]. Эффективный нелинейный параметр, определяющий степень нелинейных эффектов, увеличивается в сотни и тысячи раз по сравнению с однородной средой из-за большого контраста сжимаемостей газа и упругой среды [Руденко, 2006]. Если такие сильно сжимаемые включения распределены в пространстве неоднородно, то локальная скорость звука оказывается переменной. Такая рефракционная неоднородность приводит к пространственному перераспределению акустической энергии, искажению временного профиля и поперечной формы пучков. В частности, могут образовываться области фокусировок и каустики, в которых увеличивается интенсивность волны и усиливаются нелинейные эффекты. При определенных условиях возможно формирование звукового канала, сформированного неоднородно распределенными включениями или пузырьками [Гусев, 2015a]. Таким образом, появляется возможность управления пространственно-временной структурой акустической волны с помощью введения сильно сжимаемых включений с заданным пространственным распределением и концентрацией.

Основной целью данной работы является исследование распространения акустических волн и особенностей трансформации их пространственно-временной структуры в вязкоупругих резиноподобных средах с газовыми порами. Газовые поры распределены в общем случае по некоторому специальному закону. Для описания акустических явлений используется гомогенная теория, основанная на выводе самосогласованных эволюционных уравнений для среды с некоторыми эффективными параметрами. Предполагается, что полученные результаты позволят предложить новые структурно-неоднородные материалы (метаматериалы) для управления акустическими сигналами. Данная работа направлена на комплексное исследование нелинейных эффектов при распространении ограниченных пучков в среде с памятью и полостями. По некоторым вопросам в литературе представлены интересные результаты, например исследована динамика пор в вязкоупругом материале [Tong, 1993], описано распространение упругих волн в среде с пустотами [Wright, 1998], изучены нелинейные эффекты материалов с пустотами [Nunziato, 1979]. Однако в этих работах отсутствует комплексный подход. Базовые среды, в которых находятся пустоты, считаются обычными упругими либо, наоборот, учитываются эффекты памяти, но не рассматриваются распространяющиеся волны. Кроме того, во всех случаях речь идет о плоских волнах. В реальности же всегда излучается ограниченный пучок, подверженный дифракционным и рефракционным эффектам.

## Акустическое поле в вязкоупругой среде с порами

Рассмотрим вязкоупругую среду с малым сдвиговым модулем упругости  $\mu$  (например, резиноподобную), содержащую сильно сжимаемые включения — газовые поры. Предположим, что поры не взаимодействуют друг с другом и в среде отсутствуют течения и потоки вещества. Тензор сдвиговых напряжений в вязкоупругой среде (среде с памятью) имеет вид [Собисевич, 2005]

$$\sigma_{ik} = 2\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} u_{ik}(t - \xi) \exp\left(-\frac{\xi}{t_0}\right) d\xi.$$

Здесь  $u_{ik}$  — тензор деформаций,  $t_0$  — время релаксации. Это выражение может быть упрощено для малых и больших значений  $t_0$ . При  $\omega t_0 \gg 1$

$$\sigma_{ik} \approx 2\mu u_{ik} - \frac{2\mu}{t_0} \int_0^{\infty} u_{ik}(t - \xi) d\xi$$

и среда близка по свойствам к упругому материалу. При  $\omega t_0 \ll 1$

$$\sigma_{ik} \approx 2\mu t_0 \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} - 2\mu t_0^2 \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial t^2}$$

и среда близка по свойствам к вязкой жидкости.

Эту модель можно обобщить, рассматривая под интегралом вместо экспоненты ядро произвольного вида, позволяющее описывать внутреннюю динамику среды более сложного вида:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} u_{ik}(t - \xi) G\left(\frac{\xi}{t_0}\right) d\xi.$$

Акустические волны описываются обобщенным волновым уравнением для смещений  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c_l^2 \text{grad div } \mathbf{u} + c_t^2 \Delta \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \mathbf{u}(t - \xi) G\left(\frac{\xi}{t_0}\right) d\xi - \mathbf{u} \right] + \mathbf{F}. \quad (1)$$

Здесь  $c_l$  и  $c_t$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно. Описание поля в пористой среде на основе самосогласованного уравнения типа (1) с эффективными параметрами развивает модели, использованные в работах [Руденко, 2007; Гусев, 2015а] для описания поля в жидкости с пузырьками.

Наибольший интерес вызывает слагаемое, связанное с силовым источником  $\mathbf{F}$ , задаваемым вторичным полем. Это поле излучается поверхностью пор, осциллирующих под действием исходной падающей акустической волны. Таким образом, это слагаемое определяет влияние динамики пор на полное акустическое поле. Для произвольного источника функция  $\mathbf{F}$  может быть разложена в ряд по мультиполям. Хорошо известно, что основной вклад в излучаемое поле дает монополюсный источник, связанный с изменением объема полости под действием акустической волны. Следующие члены соответствуют излучению диполя и квадруполя, определяемых изменением формы поверхности полости без изменения ее объема. С другой стороны, любой вектор может быть представлен в виде суммы потенциальной и вихревой компонент:

$$\mathbf{F} = \text{grad } W + \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2)$$

Здесь скалярная функция  $W$  описывает потенциальную компоненту поля источника, а векторный потенциал  $\mathbf{A}$  — вихревую.

Излучение монополя дает основной вклад в первый член в уравнении (2). В этом случае  $W = c_l^2 \nu V$ , где  $\nu$  — концентрация пор,  $V$  — относительное изменение объема пор. В общем случае концентрация пор считается распределенной в пространстве неоднородно:  $\nu = \nu(x, z)$ . Дипольное излучение преимущественно влияет на второй член в уравнении (2).

## Динамика пор под действием акустической волны

Рассмотрим теперь динамику пор под действием акустической волны, для того чтобы определить связь между акустическими переменными и изменением объема пор. Поры осциллируют под действием падающей волны и излучают вторичное поле. Рассмотрим монополюсное излучение, связанное с изменением объема пор. В этом случае осциллирующие поры излучают сферически симметричную акустическую волну с потенциалом

$$\varphi = \frac{1}{r} \Phi\left(t - \frac{r - R}{c_0}\right), \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (3)$$

На свободной границе поры  $r = R_0$  ( $R_0$  — равновесный радиус поры) выполняется условие равенства давления внутри поры и тензора напряжений в вязкоупругой среде. Это приводит к следующему уравнению:

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{\rho_0} + c_l^2 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} \right) + 2c_l^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{\partial u_r(t-\xi)}{\partial r} G\left(\frac{\xi}{t_0}\right) d\xi = \frac{P}{\rho_0}. \quad (4)$$

Здесь  $p$  — давление в падающей волне,  $P$  — давление в поре. Подставляя уравнение (3) в уравнение (4), можно получить уравнение для функции  $\Phi$ , описывающей профиль вторичного поля:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2 \frac{c_l^2}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty G\left(\frac{\xi}{t_0}\right) \widehat{L} \Phi \frac{\partial u_r(t-\xi)}{\partial r} d\xi - \frac{R}{\rho_0} P = -\frac{R}{\rho_0} p, \quad \widehat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{c_l}{R} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \frac{c_l^2}{R^2}.$$

Давление внутри поры также может быть выражено через функцию  $\Phi$ :

$$-P = \frac{3c_g^2 \rho_g}{c_l R^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R} \Phi \right) + (\varepsilon - 1) \frac{c_g^2}{\rho_g} \left[ \frac{3\rho_g}{c_l R^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R} \Phi \right) \right]^2.$$

Здесь  $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$  — нелинейный параметр,  $\gamma = c_p/c_v$ . В результате приходим к нелинейному уравнению колебаний для функции отклика  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{4c_l^2}{c_l R} \left[ 1 + \frac{R}{2c_l} G'(0) + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{4c_l^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{R}{2c_l} G'(0) + \frac{R^2}{2c_l^2} G''(0) + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0} \right] \Phi + \quad (5) \\ & + \frac{4c_l^2}{R^2} \int_0^\infty \left[ G'\left(\frac{\xi}{t_0}\right) + \frac{R}{c_l} G''\left(\frac{\xi}{t_0}\right) + \frac{R^2}{2c_l^2} G'''\left(\frac{\xi}{t_0}\right) \right] \Phi(t-\xi) d\xi + (\varepsilon - 1) \frac{9c_g^2 \rho_g}{R^3 c_l^2 \rho_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c_l}{R} \Phi \right)^2 = -\frac{R}{\rho_0} p. \end{aligned}$$

Для предельных случаев малых и больших времен релаксации  $t_0$  и при пренебрежении нелинейностью уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \omega_0^2 \Phi = -\frac{R}{\rho_0} p,$$

где для упругоподобной среды при  $\omega t_0 \gg 1$

$$\omega_0 = \frac{2c_l}{R} \sqrt{1 + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0}}, \quad \delta = \frac{2c_l^2}{c_l R} \left[ 1 + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0} \right], \quad Q_{\max} = \frac{c_l}{c_g} \sqrt{\frac{\rho_0}{3\rho_g}}$$

и для вязкой водоподобной среды при  $\omega t_0 \ll 1$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{3}c_l}{R} \sqrt{\frac{c_g^2 \rho_g}{c_l^2 \rho_0}}, \quad \delta = \frac{2c_l}{R} \frac{c_l^2 c_l t_0}{c_l^2 R} + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0}, \quad Q_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{\frac{c_g^2 \rho_g}{c_l^2 \rho_0}} \sqrt{1 + \frac{c_l^2 c_l t_0}{c_l^2 R}}}{1 + \frac{c_l^2 c_l t_0}{c_l^2 R} + \frac{3c_g^2 \rho_g}{4c_l^2 \rho_0}}.$$

Важно отметить, что собственные частоты и коэффициенты затухания зависят от скорости сдвиговой волны или сдвигового модуля упругости даже для сферически симметричных колебаний. Кроме того, эти выражения учитывают упругость газа в порах. Во всех случаях добротность  $Q$  достаточно велика, чтобы обеспечить длительные колебания пор и эффективное излучение вторичного поля.

## Самосогласованное уравнение для акустического поля

Таким образом, полное акустическое поле в вязкоупругой среде с порами описывается двумя уравнениями — неоднородным уравнением (1) для поля с источником и уравнением (5) для функции отклика пор  $\Phi$ . Однако необходимо еще определить связь между относительным изменением объема  $V$  функцией отклика  $\Phi$ . Для относительного изменения объема можно записать следующее выражение:

$$V = \frac{R^3}{R_0^3} - 1 = \frac{(R_0 + R')^3}{R_0^3} - 1 \approx \frac{3R'}{R_0} + \frac{3R'^2}{R_0^2}. \quad (6)$$

Здесь  $R'$  — изменение радиуса пор под действием акустической волны. В соответствии с кинематическим граничным условием для монополюсного излучения можно записать  $u_r = R'$ . Рассматривая поле вблизи поры и используя низкочастотное приближение, можно получить следующее соотношение между  $R'$  и  $\Phi$ :

$$R' \approx -\frac{\Phi}{R_0^2}. \quad (7)$$

Низкочастотное приближение в данном случае подразумевает, что рассматриваются частоты много меньшие собственной частоты колебаний пор,  $\omega \ll \omega_0$ . Интерес к этому частотному диапазону связан с тем, что наибольшие значения эффективного нелинейного параметра и наименьшие значения скорости звука наблюдаются именно на этих низких частотах.

Таким образом, уравнение (5) содержит слагаемые различного порядка в зависимости от характерной частоты внешнего воздействия. В низкочастотном приближении инерционный и диссипативный члены малы, поэтому, выделяя главный член, уравнение (5) для функции отклика пор  $\Phi$  можно переписать в следующем виде:

$$(1 + \widehat{L}_\Phi)\Phi = -\frac{R}{\omega_0^2 \rho_0} p. \quad (8)$$

Здесь первый член определяет главное соотношение между функцией отклика  $\Phi$  и акустическим давлением на низких частотах, а оператор  $\widehat{L}_\Phi$  описывает дисперсионные эффекты. Вид этого оператора можно определить, сравнивая уравнения (5) и (8).

Отметим, что уравнение (8) записано в терминах акустического давления  $p$ , а не смещения  $u$ , используемого в уравнении (1). Используя выражение

$$p = -\rho_0 c_l^2 \operatorname{div} \mathbf{u},$$

из уравнения (1) можно получить уравнение для акустического давления  $p$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_l^2 \Delta p - \rho_0 c_l^4 \Delta \left[ v \left( -\frac{3\Phi}{R_0^3} + \frac{3\Phi^2}{R_0^6} \right) \right] + c_l^2 \Delta \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty p(t - \xi) G\left(\frac{\xi}{t_0}\right) d\xi - p \right], \quad (9)$$

где для вторичного поля использованы уравнения (6) и (7).

Теперь, применяя оператор  $(1 + \widehat{L}_\Phi)$  из левой части уравнения (8) к уравнению (9), можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{\text{eff}}^2 \Delta p + \widehat{L}_\Phi \left( \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta p \right) = \\ & = (1 + \widehat{L}_\Phi) c_l^2 \Delta \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty p(t - \xi) G\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi - p \right] - \frac{3vc_l^2}{\omega_0^4 R_0^4 \rho_0} \Delta (1 + \widehat{L}_\Phi) p^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для вывода этого уравнения был сделан также ряд других приближений, в частности в нелинейных членах использовано выражение (7).

В уравнение (10) введена эффективная скорость звука в низкочастотном приближении:

$$c_{\text{eff}}^2 = c_l^2 \left( 1 - \frac{3\nu c_l^2}{\omega_0^2 R_0^2} \right).$$

Это выражение можно записать для предельных случаев малых и больших значений времени релаксации  $t_0$ . При  $\omega t_0 \gg 1$  для упругоподобной среды получаем

$$c_{\text{eff}}^2 = c_l^2 \left( 1 - \frac{\beta\nu}{1 + \frac{4}{3} \frac{c_l^2}{c_g^2} \beta} \right);$$

при  $\omega t_0 \ll 1$  для вязкой водоподобной среды —

$$c_{\text{eff}}^2 = c_l^2 \left( 1 - \beta\nu \left( 1 + \frac{c_l^2 c_l t_0}{c_l^2 R_0} \right) \right).$$

Здесь  $\beta = c_l^2 \rho_0 / c_g^2 \rho_g$  — отношение сжимаемостей упругой среды и газа в порах — является большим параметром. Его характерное значение порядка  $\beta \sim 20\,000$ – $100\,000$ . Поэтому эффективная скорость звука существенно уменьшается даже для малых значений концентрации пор  $\nu$ , порядка десятитысячных долей, из-за большого параметра  $\beta$ . В предельном случае  $c_l \rightarrow 0$  получаем  $c_{\text{eff}}^2 = c_l^2(1 - \beta\nu)$ , что совпадает с выражением для эффективной скорости звука в жидкости с газовыми пузырьками.

Уравнение (10) является самосогласованным уравнением для акустического поля в вязкоупругой среде с порами. В низкочастотном приближении главным членом является волновой оператор, так что уравнение (10) представляет собой волновое уравнение с эффективной скоростью звука и относительно слабыми дисперсионными и нелинейными слагаемыми, приводящими к медленному искажению профиля волны на больших расстояниях.

## Самосогласованное эволюционное уравнение для акустических пучков

Уравнение (10) остается все еще достаточно сложным для получения интересных аналитических решений, особенно при исследовании неплоских волн и ограниченных волновых пучков. Поэтому оно может быть упрощено с помощью метода медленно изменяющегося профиля, часто применяемого в теории нелинейных акустических пучков. Применимость этого метода определяется медленностью дисперсионных, дифракционных и нелинейных искажений, а также малостью рефракционной неоднородности. Все эти условия будем предполагать выполненными. Таким образом, ищем решение в следующем виде, известном как квазиоптическое приближение:

$$p = p(\tau = t - x/c_{\text{eff}0}, \mu x, \sqrt{\mu}y, \sqrt{\mu}z), \quad \mu \ll 1.$$

Предположим теперь, что концентрация пор зависит от пространственной переменной  $\nu = \nu(x, y, z)$ , поэтому здесь введена некоторая характерная эффективная скорость звука  $c_{\text{eff}0}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n(x, y, z)}{c_{\text{eff}0}} \frac{\partial p}{\partial \tau} - (1 + \widehat{L}_\Phi) \frac{c_l^2}{c_{\text{eff}0}^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\infty p \left( \tau + \frac{z}{c_{\text{eff}0}} - \xi \right) G \left( \frac{\xi}{\tau} \right) d\xi - \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] \right) + \\ + \widehat{L}_\Phi \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff}0}^2} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \Delta_\perp p. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка  $\mu^2$ , получаем следующее эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n(x, y, z)}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial \tau} + A \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + B \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \begin{array}{c} \text{дисперсионные} \\ \text{члены} \end{array} - \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \begin{array}{c} \text{нелинейные} \\ \text{члены} \end{array} - \right. \\ \left. - (1 + \widehat{L}_\Phi) \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\infty p \left( \tau + \frac{z}{c_{\text{eff0}}} - \xi \right) G \left( \frac{\xi}{\tau} \right) d\xi - p \right] \right] = \frac{c_{\text{eff0}}}{2} \Delta_\perp p. \quad (11)$$

Здесь использовано следующее приближенное выражение, справедливое на низких частотах  $\omega \ll \omega_0$ :

$$\widehat{L}_\Phi \approx \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{2\delta}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial \tau} - (\varepsilon - 1) \frac{9c_g^2 \rho_g}{\omega_0^2 R^4 \rho_0^2} p + \dots$$

В уравнении (11) выписаны явно основные дисперсионные и нелинейные члены. Обозначения «дисперсионные члены» и «нелинейные члены» обозначают, что более точные расчеты приведут к соответствующего типа слагаемым более высокого порядка. Дисперсионные члены вида  $\partial^2/\partial \tau^2$  и  $\partial^3/\partial \tau^3$  соответствуют уравнениям Бюргерса и Кортевега–де Фриза (КдФ), обычным для нелинейной акустики, члены с производными более высокого порядка относительно малы в низкочастотном приближении, но могут представлять интерес в некоторых случаях. Величина нелинейных членов определяется акустическим числом Маха. Для обычных акустических задач оно достаточно мало, так что достаточно учесть только квадратичную нелинейность.

В случае малых и больших значений времени релаксации  $t_0$  уравнение (11) в общем виде может быть упрощено к виду уравнения типа Хохлова–Заболотской для интенсивных акустических пучков:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta n(x, y, z)}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial \tau} + A \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + B \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} - \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_{\text{eff0}}}{2} \Delta_\perp p. \quad (12)$$

Различие между случаями  $\omega t_0 \gg 1$  и  $\omega t_0 \ll 1$  формально проявляется только в коэффициентах этого уравнения. При  $\omega t_0 \gg 1$

$$A = \frac{2\delta}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right), \quad B = \frac{1}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right), \\ \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} = (\varepsilon - 1) \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right) \frac{9c_g^2 \rho_g}{\omega_0^2 R^4 \rho_0^2}, \quad \omega_0 \sim \frac{2c_l}{R};$$

при  $\omega t_0 \gg 1$

$$A = \frac{2\delta}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right) + \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2}, \quad B = \frac{1}{\omega_0^2} \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right), \\ \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} = (\varepsilon - 1) \left( 1 - \frac{c_l^2}{c_{\text{eff0}}^2} \right) \frac{9c_g^2 \rho_g}{\omega_0^2 R^4 \rho_0^2}, \quad \omega_0 \sim \frac{\sqrt{3}c_g}{R} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_0}}.$$

Расчеты показывают, что собственная частота колебаний в упругоподобной среде много больше, чем в вязкой водоподобной среде,

$$\omega_0^{(\omega t_0 \gg 1)} \gg \omega_0^{(\omega t_0 \ll 1)},$$

так что можно сделать вывод, что эффективный нелинейный параметр при тех же условиях значительно больше в вязкой водоподобной среде:

$$\varepsilon_{\text{eff}}^{(\omega t_0 \gg 1)} \ll \varepsilon_{\text{eff}}^{(\omega t_0 \ll 1)}.$$

## Уравнения для акустического поля при наклоне падения на пористый слой

Уравнения (10), (11) и (12) выведены при условии, что акустическая волна падает по нормали к плоской границе пористой среды. Именно на этой границе и задается граничное условие к уравнению (12). В реальности волна может падать на эту границу под некоторым углом  $\theta$  к оси  $x$ . Ограничимся рассмотрением падения на плоскую границу; более сложный случай падения на шероховатую поверхность требует отдельного исследования.

Основная проблема при описании наклонного распространения состоит в том, что теперь плоскость, на которой задается граничное условие, и направление распространения волны образуют неортогональную систему координат. Поэтому при описании наклонного падения и дальнейшего распространения необходимо в первую очередь определить новый вид эволюционного и дифракционного операторов. Для упрощения задачи перейдем к рассмотрению среды с предельно большими и малыми значениями времени релаксации. При нормальном падении уравнения сводились к виду (12). При анализе наклонного падения будем исходить не из уравнения (10), а из более простого уравнения:

$$\Delta p - \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ \frac{2\delta}{\omega_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \varepsilon_a p^2 \right] = 0. \quad (13)$$

Как и в предыдущем случае, упростим уравнение (13) в приближении квазиоптики. Будем для простоты рассматривать двумерный случай,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . При этом необходимо учесть, что в рассматриваемой задаче волна распространяется, вообще говоря, под некоторым углом  $\theta$  к оси  $x$ . В соответствии со стандартной методикой нужно ввести временную переменную

$$\tau = t - \frac{x}{c_{\text{eff}0}} \cos \theta - \frac{z}{c_{\text{eff}0}} \sin \theta, \quad (14)$$

эволюционную координату

$$\xi = x \cos \theta + z \sin \theta \quad (15)$$

и поперечную координату

$$\eta = z \cos \theta - x \sin \theta.$$

Временная переменная  $\tau$  учитывает временную задержку волны в целом. Здесь  $c_{\text{eff}0}$  — характерная скорость звука в среде с порами. Отыскивая решение вида  $p = p(\tau, \mu\xi, \sqrt{\mu}\eta)$ , где  $\mu \ll 1$  — малый параметр, и оставляя члены первого порядка малости, получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} - \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} + c_{\text{eff}0} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left[ \varepsilon_a p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2\omega_0^2} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} - \frac{\delta}{\omega_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2}. \quad (16)$$

Основа этого уравнения имеет вид уравнения Хохлова – Заболотской. Однако выбор эволюционной переменной  $\xi = x \cos \theta + z \sin \theta$  подразумевает, что граничное условие к этому уравнению будет ставиться при  $\xi = \text{const}$ , т. е. вдоль нормальной к направлению распространения плоскости. В то же время, как уже говорилось, в рассматриваемой задаче граничные условия задаются либо на вертикальной  $x = 0$ , либо на горизонтальной  $z = h$  границах среды.

Для того чтобы учесть правильные граничные условия, введем другую эволюционную переменную. Далее рассмотрим по отдельности два случая: падение волны на вертикальную границу (случай 1) и горизонтальную границу (случай 2). При этом предполагается, что среда является протяженной в горизонтальном направлении и ограниченной в вертикальном направлении. На горизонтальных границах внутри среды волна испытывает отражение, и интерес представляет именно та часть волны, которая остается в слое.

В случае 1 будем считать, что акустическая волна распространяется преимущественно в горизонтальном направлении, зависимость поля от поперечных координат определяется рефракцией на неоднородностях, дифракцией, наличием границ, а также начальной апертурой поля. Граничное условие удобно задавать на начальной плоскости  $x = 0$ , на которую при необходимости может быть пересчитано исходное поле излучателя. Поэтому в качестве эволюционной переменной выберем координату  $\xi = x / \cos \theta$ . Косинус в знаменателе приравнивает расстояния, пройденные вдоль центрального луча и вдоль оси  $x$ , однако эволюционной в данном случае является переменная  $x$  в отличие от выражения (15). Фазу (временную задержку) по-прежнему отсчитываем вдоль центрального луча в соответствии с (14). Поперечную координату отсчитываем вдоль перпендикуляра к центральному лучу, но удобнее использовать преобразование  $\eta = z - x \operatorname{tg} \theta$ , чтобы не изменялась нормировка поперечной координаты. Отыскивая решение вида  $p = p(\tau, \mu\xi, \sqrt{\mu}\eta)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{c_{\text{eff}0}}{2} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}}^2} - \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} + c_{\text{eff}0} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left[ \varepsilon_a p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{1}{2\omega_0^2} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} - \frac{\delta}{\omega_0^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2}. \quad (17)$$

Формально уравнение (17) отличается от (16) только наличием квадрата косинуса угла в знаменателе дифракционного оператора в правой части. Но поскольку эволюционной является переменная  $\xi = x / \cos \theta$ , то граничное условие к уравнению (17) теперь можно поставить на вертикали  $x = 0$ . Рассмотрим «костяк» уравнения (17) для однородной среды ( $c_{\text{eff}} = c_{\text{eff}0}$ ) в отсутствие дисперсии ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) и диссипации ( $\delta \rightarrow 0$ ) и вернемся к исходным координатам по формулам  $x = \xi \cos \theta$ ,  $z = \eta + \xi \sin \theta$ . В итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial p}{\partial z} - \varepsilon_a p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Это уравнение совпадает с эволюционным уравнением для наклонного падения волны на экран, полученным в работе [Гусев, 2002] на основе паракиального разложения вблизи центрального луча точного решения волнового уравнения.

Введем величины  $\Delta n(\eta, \xi) = (c_{\text{eff}0}^2 / c_{\text{eff}}^2 - 1) / 2$  — отклонение коэффициента преломления, где  $c_{\text{eff}} = c_{\text{eff}}(\eta + \xi \sin \theta)$ , эффективный нелинейный параметр

$$\varepsilon = \varepsilon_a \frac{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}0}^4}{\rho_a c_a^2} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right), \quad (19)$$

где  $\rho_{\text{eff}} = \rho(1 - \nu)$ , параметр дисперсии  $B = \frac{c_{\text{eff}0}}{2\omega_0^2} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right)$  и коэффициент затухания  $b = \frac{\delta c_{\text{eff}0}}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{c_{\text{eff}0}^2} - \frac{1}{c^2} \right)$ . Определение нелинейного параметра в виде (19) обусловлено записью нелинейного слагаемого в уравнении (17) в стандартной форме [Руденко, 1975]. В случае среды с постоянной концентрацией пор  $\nu_0$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a \beta^2 \nu_0 (1 - \nu_0)}{(1 + \beta \nu_0)^2}, \quad B = \frac{c_{\text{eff}0} \beta \nu_0}{2\omega_0^2 c^2} = \frac{1}{2\omega_0^2 c} \frac{\beta \nu_0}{\sqrt{1 + \beta \nu_0}}.$$

В итоге уравнение (17) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\Delta n(\eta, \xi)}{c_{\text{eff}0}} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}0}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} \right) = \frac{c_{\text{eff}0}}{2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2}. \quad (20)$$

Уравнение (20) обобщает уравнения Хохлова – Заболотской, Бюргерса и КдФ и учитывает нелинейные и дисперсионные искажения профиля, а также влияние неоднородности среды.

Дальнейшего упрощения можно добиться в приближении нелинейной геометрической акустики (НГА), отыскивая решение вида

$$p = p(T = \tau - \phi(\xi, \eta)/c_{\text{eff0}}, \xi, \eta).$$

После преобразования к новым переменным уравнение (20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{1}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\Delta n}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} \right) = \\ & = \frac{c_{\text{eff0}}}{2 \cos^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - \frac{2}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial^2 p}{\partial T} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} + \frac{1}{c_{\text{eff0}}^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - \frac{1}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right]. \end{aligned}$$

В приближении НГА производная по  $T$  соответствует умножению на большой параметр, поэтому в этом уравнении можно пренебречь второй производной по  $\eta$ . Из получающегося уравнения можно выделить уравнение эйконала — коэффициенты при  $\partial^2 p / \partial T^2$ , остальные члены образуют уравнение переноса. В итоге получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 = \Delta n (\eta + \xi \sin \theta), \quad (21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{p}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} = 0. \quad (22)$$

Отнесение нелинейного и дисперсионного членов к тому или иному из уравнений (21) и (22) достаточно условно и определяется как величиной соответствующих коэффициентов, так и удобством решения получающихся уравнений. При записи уравнений (21)–(22) предполагается, что коэффициенты при двух последних слагаемых в (22) достаточно малы, так что эти слагаемые попадают в уравнение переноса. Уравнения (21)–(22) имеют обычный вид уравнений НГА, однако нелинейный параметр и коэффициент при дисперсионном члене имеют другой вид.

Введя функцию наклона луча  $\alpha = \partial \phi / \partial \eta$ , уравнение (21) можно переписать в виде неоднородного уравнения простых волн:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta n}{\partial \eta}. \quad (23)$$

Уравнение (22) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\cos^2 \theta} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{p}{2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} = 0. \quad (24)$$

В уравнении (24) удобно перейти к лучевым координатам для исключения конвективного слагаемого. Введем новые координаты  $x_1 = x$ ,  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$  так, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0. \quad (25)$$

Тогда уравнение (24) в лучевых координатах запишется как

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{p}{2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \alpha / \partial \zeta}{\partial \eta / \partial \zeta} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} = 0. \quad (26)$$

Теперь заметим, что согласно (25) вдоль характеристики  $d\eta/d\xi = \alpha/\cos^2\theta$  и, соответственно,

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \frac{\partial D}{\partial \zeta},$$

где  $D$  — якобиан перехода к лучевым координатам. В итоге из (26) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{p}{2} \frac{d}{d\xi} \ln D - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} = 0. \quad (27)$$

Достоинством данного уравнения является то, что поперечная лучевая координата входит в него только в качестве параметра. Заменой переменных  $P = p\sqrt{D}$ ,  $s = \int d\xi/\sqrt{D}$  уравнение (27) приводится к виду обобщенного уравнения КдФ с переменным коэффициентом:

$$\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3} P \frac{\partial P}{\partial T} - b \sqrt{D(x(s))} \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} - B \sqrt{D(x(s))} \frac{\partial^3 P}{\partial T^3} = 0. \quad (28)$$

В безразмерных переменных  $U = P/p_0$ ,  $S = s/x_{\text{nl}}$ ,  $x_{\text{nl}} = \rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3 / \varepsilon \omega p_0$ ,  $\Theta = \omega T$  уравнение (28) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial S} - U \frac{\partial U}{\partial \Theta} - \frac{\delta \omega}{\omega_0^2} \frac{\rho_a c_a^2}{\varepsilon_a p_0} \sqrt{D(S)} \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{\rho_a c_a^2}{2\varepsilon_a p_0} \sqrt{D(S)} \frac{\partial^3 U}{\partial \Theta^3} = 0. \quad (29)$$

Коэффициент при дисперсионном слагаемом состоит из множителя  $\omega^2/\omega_0^2$ , малого в силу рассматриваемого низкочастотного приближения, и величины  $\rho_a c_a^2 / 2\varepsilon_a p_0$  — отношения внутреннего давления газа и амплитуды волны. Относительная роль диссипативного и дисперсионного членов определяется отношением  $2\delta/\omega$ . На низких частотах преобладает диссипативный член, на высоких — дисперсия.

На начальной стадии распространения можно пользоваться решением (29) в виде простой волны  $U = U_0(\Theta + US)$ , а в низкочастотном приближении на стадии развитых ударных фронтов — модифицированным решением Хохлова обобщенного уравнения Бюргерса (при  $B = 0$ ) [Гусев, 2012; Гусев, 2015b]:

$$U(\Theta, S) = \frac{1}{1+S} \left( -\Theta + \text{th} \left[ \frac{\Theta}{4\Gamma \sqrt{D(S)}(1+S)} \left( 1 + \sqrt{1 + 8\Gamma(1+S)^2 \frac{d\sqrt{D}}{dS}} \right) \right] \right).$$

**В случае 2** волна падает на верхнюю границу слоя с пузырьками. Граничное условие для поля в слое удобно задавать именно на этой границе, поэтому в качестве эволюционной координаты надо выбрать  $\xi = z/\sin\theta$ . Синус в знаменателе также приравнивает расстояния, пройденные вдоль центрального луча и вдоль оси  $z$ . Поперечную координату  $\eta$  введем согласно следующему преобразованию:  $\eta = x - z \text{ctg}\theta$ . Временную переменную  $\tau$  вводим, как и раньше, в соответствии с (14). Отыскивая решение вида  $p = p(\tau, \mu\xi, \sqrt{\mu}\eta)$ , получаем уравнение вида (20):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\delta(\eta, \xi)}{c_{\text{eff0}}} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff0}}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} \right) = \frac{c_{\text{eff0}}}{2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2},$$

с тем отличием, что в правой части вместо косинуса появляется синус, а расстройка скоростей  $\delta(z) = \delta(\xi \cos\theta)$ . Меняется и смысл уравнения: теперь эволюционная координата отсчитывается вдоль оси  $z$ , а граничное условие ставится при  $z = \text{const}$ .

Переходя к приближению НГА  $p = p(T = \tau - \phi(\xi, \eta)/c_{\text{eff}}, \xi, \eta)$ , получим систему уравнений

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 = \delta(\xi \cos \theta), \quad (30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{p}{2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3} p \frac{\partial p}{\partial T} - b \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - B \frac{\partial^3 p}{\partial T^3} = 0. \quad (31)$$

В отличие от случая 1 в правой части уравнения эйконала (30) расстройка  $\delta$  зависит только от эволюционной координаты  $\xi$ . Поэтому, вводя функцию наклона луча  $\alpha = \partial \phi / \partial \eta$  и дифференцируя (30) по  $\eta$ , получим однородное уравнение

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\alpha}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = 0. \quad (32)$$

Это означает, что в такой постановке и в квазиоптическом приближении неоднородность не изменяет наклон лучей, поэтому траектории лучей определяются только начальным наклоном лучей на границе слоя с пузырьками. Решение (32) задается в неявном виде  $\alpha = \alpha_0 \left( \eta - \frac{\alpha_0 \xi}{\sin^2 \theta} \right)$ , откуда получаем уравнение траекторий  $\eta = \eta_0 + \frac{\alpha_0(\eta_0)}{\sin^2 \theta} \xi$  с начальной координатой  $\eta_0$ . Вспоминая определение переменных, запишем уравнение траекторий в исходных переменных:

$$x = x_0 + \left( \cos \theta - \frac{\alpha_0(x_0)}{\sin^2 \theta} \right) \frac{z}{\sin \theta}. \quad (33)$$

Благодаря выбору поперечной координаты  $\eta$  нормировка не изменилась, поэтому  $\eta_0 = x_0$ ,  $\alpha(\eta_0) = \alpha(x_0)$ . Выражение (33) показывает, что физический смысл функции  $\alpha$  изменился: теперь это только градиент фазы, а котангенс угла наклона траектории равен  $\text{ctg} \theta = \alpha_0 / \sin^3 \theta$ .

Приведем пример расчета лучевой картины. Пусть концентрация пор  $\nu(z)$  изменяется по линейному закону  $\nu(z) = \nu_0 z / h + \nu_{00}$ , где  $\nu_{00}$  — концентрация пор около верхней границы слоя. В этом случае эффективная скорость  $c_{\text{eff}}$  убывает при приближении к дну и образуется придонный звуковой канал. В случае 1 исходим из уравнения (23), правая часть которого для заданной зависимости концентрации равна  $\partial \delta / \partial \eta = \gamma / \cos \theta$ ,  $\gamma = \beta \nu_0 / 2h (1 + \beta \nu_0)$ . Интегрируя (23), находим траектории лучей в преобразованных переменных:  $\eta = \eta_0 + \alpha_0(\eta_0) \xi + \frac{\gamma}{2 \cos \theta} \xi^2$ , а затем и в исходных переменных:

$$z = z_0 + x \left( \text{tg} \theta + \frac{\alpha_0(z_0)}{\cos^3 \theta} \right) + \frac{\gamma x^2}{2 \cos^4 \theta}. \quad (34)$$

Функция  $\alpha_0(z_0)$  описывает распределение лучей в начальной области  $x = 0$ . Выражение (34) определяет траектории лучей до первого отражения, после отражения они определяются аналогичными выражениями с соответствующими начальными координатами и углами выхода лучей. Зададим точечный узконаправленный источник, расположенный в точке  $(x = 0, z_0 = z_*)$  и излучающий в некотором угловом диапазоне. Будем считать, что максимум диаграммы направленности направлен по горизонтали,  $\theta = 0$ . В этом случае все лучи выходят из одной точки  $z_*$ , и траектории лучей определяются значениями тангенса начального угла  $\alpha_0$ . Из выражения (34) можно найти тангенс текущего угла наклона луча:  $\frac{dz}{dx} = \text{tg} \theta + \frac{\alpha_0(z_0)}{\cos^3 \theta} + \frac{\gamma x}{\cos^4 \theta}$ .

## Поле на оси интенсивного пучка в звуковом канале

Если профиль эффективной скорости звука оказывается отличным от линейного и содержит локальные минимумы и максимумы, то на лучевой картине образуются фокальные особенности и каустики. В этих областях обычная методика геометрической акустики не способна описать поле, предсказывая его обращение в бесконечность. При исследовании нелинейных задач это вызывает особые трудности, поскольку построить аналитические решения удается обычно только в некоторых специальных случаях. Отчасти преодолеть эту проблему позволяет развитый в работах [Гамильтон, 1997; Гусев, 2015а] модифицированный метод НГА. Суть его заключается в следующем. Полученные выше уравнения эйконала, как можно убедиться, имеют одинаковый вид как для нелинейной, так и для линейной задач. Таким образом, в приближении НГА лучи рассчитываются по линейной теории, а затем по ним запускаются нелинейные сигналы. С другой стороны, в линейной задаче можно записать точное уравнение эйконала, содержащее также член с поперечным лапласианом амплитуды пучка. Именно это слагаемое «работает» вблизи фокальной точки и обеспечивает конечность поля в ней. В модельном приближении можно рассчитать этот лапласиан для некоторой характерной частоты волны и на его основе получить фазу волны, учитывающую дифракционные искажения [Гамильтон, 1997]. При этом нужно учесть, что дифракционные поправки для более высоких частот, генерируемых за счет нелинейности, будут менее значимыми. Практически задачу следует решать так. Нужно линеаризовать исходное нелинейное уравнение и решить его для гармонической волны с некоторой характерной частотой. Фаза найденного решения используется для расчета лучей, вдоль которых затем будут запускаться нелинейные сигналы [Гусев, 2015а].

Нужно отметить, что решение даже линейной задачи в среде с переменным профилем скорости звука является сложной задачей, далеко не всегда допускающей построение решения в явном виде, удобном для анализа и построения лучевой картины. Поэтому целесообразно применять этот подход для поля вблизи оси пучка и внутри звукового канала, когда параметры могут быть аппроксимированы квадратичными функциями от поперечных координат.

Для иллюстрации метода будем исходить из более простого уравнения (18). Пусть на границу среды  $x = 0$  под некоторым углом  $\theta$  падает пучок с гауссовой поперечной формой. Тогда граничное условие для такого пучка можно записать в виде

$$p(\tau; x = 0; y, z) = A_0 \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{a^2}\right) \exp\left(i\omega\tau - ik\frac{y^2 + z^2}{2R}\right),$$

где  $\tau$  задается выражением (14) при  $x = 0$ . Далее линеаризуем уравнение (18) и отыскиваем его решение для данного уравнения. Из найденного решения выделяем фазу  $\psi$ , которая будет использована для построения нелинейных лучей. Поскольку в данном случае падающая волна является гармонической, такой подход вполне обоснован, поскольку для высших гармоник, возникающих за счет нелинейности, дифракционные эффекты выражены слабее. (В случае негармонического исходного сигнала нужно выбирать характерную низкую частоту. В этом случае общее решение обладает дисперсией, и выделить в нем фазу невозможно.) Далее отыскиваем решение вида  $p = p(T = \tau - \psi/c_{\text{эфф}}, x, y, z)$ , по аналогии с подходом НГА, но с заранее определенной функцией  $\psi$ . В итоге приходим к двум уравнениям — эйконала и переноса. При этом, поскольку уравнения эйконала в линейном и нелинейном случае совпадают, функция  $\psi$  является точным решением «полного уравнения эйконала» с учетом поперечного лапласиана амплитуды (правильнее сказать, уравнения для фазы) для линейного дифрагирующего пучка с частотой  $\omega$ . Например, для волновода с параболическим профилем  $\Delta n(z) = -z^2/2a^2$  фаза равна

$$\psi(x, z) = -\frac{1}{2k} \arctan \frac{C \sin 2x/a}{1 - C \cos 2x/a} + \frac{x}{2ka} + \frac{C}{a} \frac{\sin 2x/a}{1 + C^2 - 2C \cos 2x/a} z^2,$$

$C = (1 + kd^2/a)/(1 - kd^2/a)$ . Таким образом, рассматривая далее уравнение переноса, в линейном случае мы получили бы точное решение задачи. В нелинейном случае в правой части уравнения переноса появляется разность поперечного лапласиана поля нелинейного пучка и поперечного лапласиана для линейного гармонического пучка. Эта разность связана с различием в искажении поперечной формы пучка в линейном и нелинейном случае и на первом этапе исследования может быть положена равной нулю. В итоге получается уравнение, похожее на уравнения переноса (22) и (31):

$$\cos \theta \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^3} p \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{p}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (35)$$

Однако здесь, в отличие от уравнений (22) и (31), фаза  $\psi$  учитывает дифракционные эффекты для основной частотной компоненты исходного сигнала, так что уравнение (35) корректно описывает области фокусов и каустик нелинейных фокусированных пучков. Преимуществом такого уравнения является возможность построить его общее аналитическое решение для произвольного начального условия. Для решения уравнения (35) удобно ввести лучевые координаты, учитывающие поперечный снос пучка, которые находятся как первые интегралы уравнений  $dy/dx = \partial \psi / \partial y$ ,  $dz/dx = \partial \psi / \partial z$ . Кроме того, нужно перейти к расстоянию  $s$ , отсчитываемому вдоль оси пучка. Тогда уравнение (35) упрощается:

$$\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2} p \frac{\partial p}{\partial T} + \Psi(s) p = 0. \quad (36)$$

Здесь функция  $\Psi(s)$  зависит от расстояния  $s$  вдоль оси пучка, а также от поперечных лучевых координат как от параметров. Таким образом, уравнение (36) описывает изменение профиля волны вдоль каждого из лучей. Общее решение этого уравнения задается в неявном виде

$$p = f p_0 \left( T + \frac{\varepsilon}{\rho_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2} \frac{p}{f} \int_0^x f dx \right),$$

где  $p(x=0) = p_0(T, z)$ ,  $f = \exp(-\int_0^x \Psi dx)$ .

На рис. 1 приведен пример вычисления пиковой амплитуды исходного фокусированного гауссовского пучка на основе уравнений (35)–(36) при наклонном падении волны на границу пористой среды. Пиковая амплитуда рассчитывалась как обычная амплитуда до образования разрыва в профиле и как значение на разрыве после его образования. При распространении пучок претерпевает следующие изменения. Во-первых, происходит расплывание пучка в поперечном направлении, обусловленное учтенными дифракционными эффектами, а также нелинейным сглаживанием пучка. Этот результат характерен и для обычной задачи нормального падения волны. Во-вторых, пучок сносится в боковом направлении относительно начальной плоскости. На первой стадии снос хорошо заметен, а на больших расстояниях ширина пучка значительно увеличивается, центральная часть сглаживается, поэтому снос пучка под определенным углом становится менее заметным. На совсем больших расстояниях расширение пучка становится преобладающим процессом, скрывающим боковой снос.

## Заключение

В работе исследовано распространение акустических волн большой интенсивности в вязкоупругой среде с газовыми полостями. Рассчитано вторичное поле, обусловленное осцилляциями поверхности пор. Выведено самосогласованное уравнение с эффективными параметрами однородной пористой среды и рассчитаны эти параметры. Развита методика расчета акустических

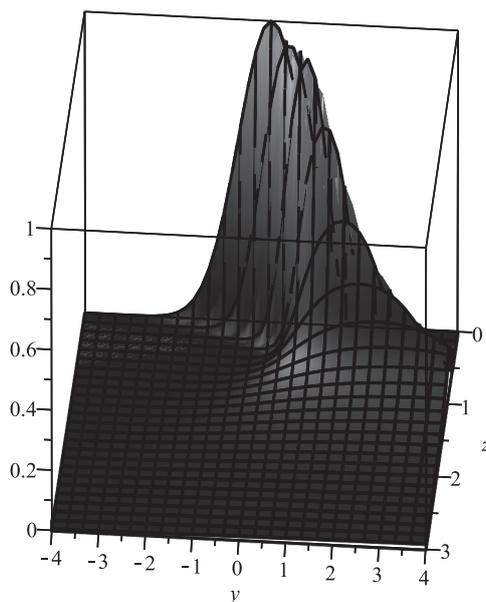


Рис. 1. Изменение поперечной формы интенсивного акустического пучка, падающего под некоторым углом к границе пористого материала, рассчитанное на основе уравнения (35)

волн, падающих наклонно на границу пористой среды. Предложен метод расчета поля интенсивных акустических пучков в неоднородной среде, позволяющий корректно описывать фокальные области. Полученные результаты предполагается применить для конструирования новых материалов со специальными свойствами для управления акустическими полями.

## Список литературы (References)

- Гаврилов Л. Р. Содержание свободного газа в жидкости и акустические методы его измерений // Акуст. журн. — 1969. — Т. 15, № 3. — С. 321–333.  
*Gavrilov L. R. Soderzhanie svobodnogo gaza v zhidkosti i akusticheskie metody ego izmerenij* [The free gas content in fluid and acoustic methods of its measurement] // *Akust. Zhurn.* — 1969. — Vol. 15, no. 3. — P. 321–333 (in Russian).
- Гамильтон М. Ф., Руденко О. В., Хохлова В. А. Новый метод расчета паракиальной области интенсивных акустических пучков // Акуст. журн. — 1997. — Т. 43, № 1. — С. 48–53.  
*Hamilton M. F., Rudenko O. V., Khokhlova V. A. Novyj metod rascheta paraksial'noj oblasti intensivnykh akusticheskikh puchkov* [A new method of calculating of paraxial region of intense acoustic beams] // *Akust. Zhurn.* — 1997. — Vol. 43, no. 1. — P. 48–53 (in Russian).
- Глотов В. П. Дисперсия скорости звука в пористом морском грунте // Акуст. журн. — 1990. — Т. 36, № 6. — С. 1113–1115.  
*Glotov V. P. Dispersiya skorosti zvuka v poristom morskom grunte* [Dispersion of sound velocity in porous sea bottom] // *Akust. Zhurn.* — 1990. — Vol. 36, no. 6. — P. 1113–1115 (in Russian).
- Григорьев В. А., Луньков А. А., Петников В. Г. Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // Акуст. журн. — 2015. — Т. 61, № 1. — С. 90–100.  
*Grigor'ev V. A., Lun'kov A. A., Petnikov V. G. Zatuhanie zvuka v melkovodnykh akvatoriyah s gazonasyschennym dnom* [Sound attenuation in shallow water with gas-saturated bottom] // *Akust. Zhurn.* — 2015. — Vol. 61, no. 1. — P. 90–100 (in Russian).
- Гусев В. А. Прохождение широкополосных звуковых ударов через случайный фазовый экран // Известия РАН. — Сер. Физическая. — 2002. — Т. 66, № 12. — С. 1742–1746.  
*Gusev V. A. Prokhozhdenie shirokopolosnykh zvukovykh udarov cherez sluchajnyj fazovyj ekran* [Transmission of wideband sound shocks through random phase screen] // *Izvestiya RAN. — Ser. Fiz.* — 2002. — Vol. 66, no. 12. — P. 1742–1746 (in Russian).
- Гусев В. А., Жостков Р. А., Преснов Д. А. Эволюция интенсивных акустических волн в неоднородных средах в рамках обобщенного уравнения Бюргерса // Сборник трудов Научной

- конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике и XXV сессия Российского акустического общества». — Т. 1. — М.: ГЕОС, 2012. — С. 129–133.
- Gusev V. A., Zhostkov R. A., Presnov D. A.* Evolyuciya intensivnykh akusticheskikh voln v neodnorodnykh sredakh v ramkakh uravneniya Byurgersa [High intensity acoustic wave evolution in inhomogeneous media under Burgers equation] // Sbornik trudov Nauchnoy konferencii Sessiya Nauchnogo soveta RAN po akustike b XXV sessiya Rossijskogo akusticheskogo obschestva. Moskva, Geos, 2012. — Vol. 1. — P. 129–133 (in Russian).
- Гусев В. А., Руденко О. В.* Нелинейный звук в слое газонасыщенных осадков // Акуст. журн. — 2015. — Т. 61, № 2. — С. 169–181.
- Gusev V. A., Rudenko O. V.* Nelinejnyj zvuk v sloe gazonasyschennykh osadkov [Nonlinear sound in a gas-saturated sediment layer] // Akust. Zhurn. — 2015. — Vol. 61, no. 2. — P. 169–181 (in Russian).
- Гусев В. А., Жостков Р. А.* Трансформация интенсивных акустических волн, распространяющихся вертикально вверх в изотермической стратифицированной атмосфере // Изв. РАН. Физика океана и атмосферы. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 587–597.
- Gusev V. A., Zhostkov R. A.* Transformaciya intensivnykh akusticheskikh voln, rasprostranyayuschihsvya vverkh v isotermicheskoj stratificirovannoy atmosfere [Transformation of intense acoustic waves propagating vertically upward in an isothermally stratified atmosphere] // Izv. RAN. Fizika okeana i atmosfery. — 2015. — Vol. 51, no. 5. — P. 587–597 (in Russian).
- Нагоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
- Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G., Shrejber I. H.* Volnovaya dinamika gazo- i parozhidkostnykh sred [Wave dynamic of gas- and vapor-liquid media]. — Moscow: Energoatomizdat, 1990 (in Russian).
- Руденко О. В., Солюян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
- Rudenko O. V., Soluyan S. I.* Teoreticheskie osnovy nelinejnoj akustiki [Theoretical fundamentals of nonlinear acoustics]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).
- Руденко О. В.* Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // УФН. — 2006. — Т. 176. — С. 77–95.
- Rudenko O. V.* Gigantskie nelinejnosti strukturno-neodnorodnykh sred i osnovy metodov nelinejnoj akusticheskoy diagnostiki [Giant nonlinearity of structural inhomogeneous media and basics of nonlinear acoustic diagnostic methods] // UFN. — 2006. — Vol. 176. — P. 77–95 (in Russian).
- Руденко О. В., Гурбатов С. Н., Хедберг К. М.* Нелинейная акустика в задачах и примерах. — М.: Физматлит, 2007.
- Rudenko O. V., Gurbatov S. N., Hedberg K. M.* Nelinejnaya akustika v zadachakh i primerakh [Nonlinear acoustics in problems and examples]. — Moscow: Fizmatlit, 2007 (in Russian).
- Собисевич А. Л., Руденко О. В.* О резонансных свойствах магматических структур // Акуст. журн. — 2005. — Т. 51, № 7. — С. 169–176.
- Sobisevich A. L., Rudenko O. V.* O resonansnykh svojstvakh magmaticheskikh porod [on the resonant properties of magmatic rocks] // Akust. Zhurn. — 2005. — Vol. 51, no. 7. — P. 169–176 (in Russian).
- Nunziato J. W., Cowin S. C.* A non-linear theory of elastic material with voids // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1979. — Vol. 72. — P. 175–201.
- Tong W., Ravichandran G.* Dynamic pore collapse in viscoplastic materials // J. Appl. Phys. — 1993. — Vol. 74 (4). — P. 2425–2435.
- Wright T. W.* Elastic wave propagation through a material with voids // J. Mech. Phys. Solids. — 1998. — Vol. 46 (10). — P. 2033–2047.