

УДК: 534.4: 517.9

О границе упругопластических тел минимального объема

Ю. С. Найштут

Самарский государственный технический университет, Архитектурно-строительный институт,
Россия, 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

E-mail: neustadt99@mail.ru

Получено 10.01.2017, после доработки — 12.05.2017.

Принято к публикации 31.05.2017.

В статье изучаются упругопластические тела минимального объема. Часть границы всех рассматриваемых тел закреплена в одних и тех же точках пространства, на остальной части граничной поверхности заданы напряжения (загруженная поверхность). Форма загруженной поверхности может изменяться в пространстве, но при этом коэффициент предельной нагрузки, вычисленный в предположении, что тела заполнены упругопластической средой, не должен быть меньше фиксированного значения. Кроме того, предполагается, что все варьируемые тела содержат внутри себя некоторое эталонное многообразие ограниченного объема.

Поставлена следующая задача: какое максимальное количество полостей (или отверстий в двумерном случае) может иметь тело (пластина) минимального объема при сформулированных выше ограничениях? Установлено, что для того, чтобы задача была математически корректно сформулирована, необходимо потребовать выполнения двух дополнительных условий: площади отверстий должны превосходить малую константу, а общая длина контуров внутренних отверстий в оптимальной фигуре должна быть минимальна среди варьируемых тел. Таким образом, в отличие от большинства работ по оптимальному проектированию упругопластических систем, когда осуществляется параметрический анализ приемлемых решений при заданной топологии, в работе проводится поиск топологического параметра связности проектируемой конструкции.

Изучается случай, когда коэффициент предельной нагрузки для эталонного многообразия достаточно велик, а площади допустимых отверстий в варьируемых пластинах превосходят малую константу. Приводятся аргументы, подтверждающие, что в этих условиях оптимальная фигура является стержневой системой Максвелла или Мичелла. В качестве примеров представлены микрофотографии типичных для биологических систем костных тканей. Показано, что в системе Мичелла не может быть внутренних отверстий большой площади. В то же время в стержневом наборе Максвелла могут существовать значительные по площади отверстия. Приводятся достаточные условия, когда в оптимальной по объему сплошной пластинке можно образовать отверстия. Результаты допускают обобщения и на трехмерные упругопластические конструкции.

Статья завершается формулировкой математических проблем, вытекающих из постановки новой задачи оптимального проектирования упругопластических систем.

Ключевые слова: границы тел, коэффициент предельной нагрузки, оптимальное проектирование, жесткопластическое тело, среды Максвелла и Мичелла

UDC: 534.4: 517.9

On the boundaries of optimally designed elastoplastic structures

Yu. S. Nayshtut

Samara State Technical University, Architectural and Civil Engineering Institute,
194, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443001, Russia

E-mail: neustadt99@mail.ru

Received 10.01.2017, after completion — 12.05.2017.

Accepted for publication 31.05.2017.

This paper studies minimum volume elastoplastic bodies. One part of the boundary of every reviewed body is fixed to the same space points while stresses are set for the remaining part of the boundary surface (loaded surface). The shape of the loaded surface can change in space but the limit load factor calculated based on the assumption that the bodies are filled with elastoplastic medium must not be less than a fixed value. Besides, all varying bodies are supposed to have some type of a limited volume sample manifold inside of them.

The following problem has been set: what is the maximum number of cavities (or holes in a two-dimensional case) that a minimum volume body (plate) can have under the above limitations? It is established that in order to define a mathematically correct problem, two extra conditions have to be met: the areas of the holes must be bigger than the small constant while the total length of the internal hole contour lines within the optimum figure must be minimum among the varying bodies. Thus, unlike most articles on optimum design of elastoplastic structures where parametric analysis of acceptable solutions is done with the set topology, this paper looks for the topological parameter of the design connectivity.

The paper covers the case when the load limit factor for the sample manifold is quite large while the areas of acceptable holes in the varying plates are bigger than the small constant. The arguments are brought forward that prove the Maxwell and Michell beam system to be the optimum figure under these conditions. As an example, microphotographs of the standard biological bone tissues are presented. It is demonstrated that internal holes with large areas cannot be a part of the Michell system. At the same the Maxwell beam system can include holes with significant areas. The sufficient conditions are given for the hole formation within the solid plate of optimum volume. The results permit generalization for three-dimensional elastoplastic structures.

The paper concludes with the setting of mathematical problems arising from the new problem optimally designed elastoplastic systems.

Keywords: boundaries of the bodies, limit load factor, optimum design, rigid-plastic structure, Maxwell and Michell beam systems

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 503–515 (Russian).

1. Введение

Вопросы оптимального проектирования упругопластических тел часто приводят к сложным математическим задачам. Одной из первых проблем такого рода явилась задача Плато о нахождении поверхности минимальной площади, натянутой на расположенный в пространстве контур γ [Курант 1953]. Если поверхность в пространстве x, y, z задана посредством функции двух переменных $z(x, y)$ с непрерывными производными, то площадь этой поверхности выражается формулой

$$A(z) = \iint_B \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Здесь B — область, ограниченная проекцией контура γ на плоскость xoy .

Естественным пространством допустимых функций при поиске минимума площади можно считать $L_1(B)$ для производных $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$. Но последовательность допустимых функций $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y), \dots$, для которых соответствующий ряд $A(z_m)$ ограничен, не слабо компактна, так как сопряженное с $L_1(B)$ пространство не является сепарабельным. Чтобы доказать существование минимальных поверхностей, необходимо либо выбрать более узкое выпуклое множество в $L_1(B)$, либо расширить исходное пространство, чтобы в нем последовательность $z_m(x, y)$ сходилась слабо-*

Задача Плато получила решение в пространстве $L_2(B)$, более узком, чем при первоначальной постановке. При этом существенно использовались теоремы о конформных отображениях и возможность замены переменных, преобразующих $A(z)$ в интеграл Дирихле от векторного поля $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$. Буквы s, t — криволинейные изотермические (изометрические) координаты в области B , определяющие в трехмерном пространстве (x, y, z) точки допустимой поверхности.

Сужение и расширение постановки задачи удастся осуществить многими способами, поэтому минимум площади на основе интеграла Дирихле из $L_2(B)$ может быть уменьшен за счет расширения множества гладких многообразий [Бураго, Залгаллер, 1980]. Задача поиска указанных расширений пока не получила полного решения, хотя известно много интересных результатов, некоторые из них найдены инженерами и физиками, проводящими опыты с мыльными пленками [Schock, 2001; Сосинский 2003].

Другая актуальная задача связана с оптимальным проектированием упругих пластин, имеющих заданную частоту собственных колебаний [Лурье, 1975]. Необходимо найти такое распределение толщин в пластине $h(x, y)$, чтобы минимизировать объем материала:

$$V = \iint_B h(x, y) dx dy.$$

При этом первая собственная частота ω , найденная из вариационного принципа, должна принимать заданное значение:

$$\kappa_1 \omega^2 = \inf \frac{\iint_B (k_2 h)^3 ((\nabla w)^2 + 2(1-\nu)(w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy})) dx dy}{\iint_B k_2 h w^2 dx dy}.$$

Нижняя грань вычисляется по множеству функций $w(x, y)$, удовлетворяющих на кривой γ граничным условиям. Постоянные k_1, k_2 зависят от размеров и плотности пластины, а также от E

(модуля упругости материала) и ν (числа Пуассона). Запятой с нижними индексами обозначаются вторые частные производные, символ ∇ — оператор Лапласа.

Чтобы удовлетворить одновременно двум минимальным принципам, пространство дважды дифференцируемых функций следует пополнить. Эта операция приводит к разрывным решениям, природа которых в настоящее время окончательно не установлена [Лурье, Черкаев, 1981].

В предлагаемой статье изучаются оптимальные по объему V тела с заданным коэффициентом предельной нагрузки λ . Как и в задаче с известной частотой колебаний, коэффициент предельной нагрузки определяется дополнительным вариационным принципом:

$$\lambda = \inf \frac{k \iint_B \Gamma(u_i) dx_1 dx_2}{\iint_B p_i u_i dx_1 dx_2}.$$

Здесь для векторов приняты индексные обозначения: составляющие вектора u_i по осям, $i = 1, 2, 3$, записываются как u_1, u_2, u_3 . Число k — предел текучести материала на сдвиг, а диссипативный потенциал $\Gamma(u_i)$ — однородная первой степени функция компонент $\partial u_i / \partial x_j$. Нижняя грань вычисляется по полям u_i , удовлетворяющим условиям на контуре γ . Поле нагрузок $p_i \in L_\infty(B)$.

Для того чтобы существовало решение такой задачи, исходное векторное поле u_i (производные u_i содержатся в $L_1(B)$) приходится значительно расширить [Мосолов, Мясников, 1989]. Появляются разрывные (сингулярные) поля u_i , область B становится многосвязной. Дополнительная трудность состоит в том, что оптимальное решение часто не единственное. Геометрия получающихся фигур оказывается сложной, появляются негладкие границы, связанные с разрывным характером течения упругопластических сред. Многие математические вопросы, вытекающие из перечисленных задач, требуют дальнейшего изучения. Одному из таких вопросов посвящена предлагаемая статья.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы оценить максимальное количество полостей, которое может иметь упругопластическое тело с заданным коэффициентом предельной нагрузки. Приведена математическая постановка проблемы, включая вариационные принципы и дополнительные ограничения, необходимые для существования решений. Для больших значений коэффициента предельной нагрузки найдены достаточные условия, при которых в упругопластических телах могут образоваться полости значительного объема. В заключительной части работы формулируются нерешенные математические задачи оптимального проектирования многосвязных тел, которые представляют интерес для физических и технических приложений.

2. Формулировка задачи оптимального проектирования упругопластической пластины

Изучается следующая задача оптимального проектирования упругопластических систем [Прагер, 1977; Баничук, 1986; Rees, 2009] (рис. 1).

Плоская упругопластическая фигура D ограничена контуром $C = C_q + C_u$. Часть границы C_u закреплена, а контур $C_q = C_q^1 + C_q^0$, в свою очередь, состоит из двух частей: на C_q^1 действует нагрузка $q_i(s)$, $i = 1, 2$, а на C_q^0 нагрузка отсутствует, $q_i(s) = 0$. Наряду с фигурой D рассмотрим возможные фигуры $D^* \subset D$. Для областей D^* аналогом контура C_q^0 является C_q^{0*} . Кроме того, внутри областей D^* могут быть отверстия (полости) D_i с контурами C_i . Полости D_i удовлетворяют ограничению: их площади

$$F_i \geq F_0 c_0. \quad (1)$$

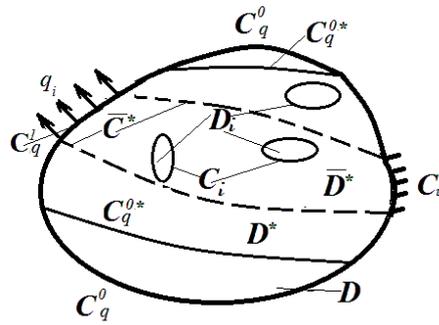


Рис. 1. Начальная и возможные формы конфигурации проектируемой системы. Буквой D обозначена начальная фигура, часть ее границы C_q^1 загружена погонными силами q_i , часть C_q^0 свободна от нагрузки. Граничная кривая C_u закреплена. Возможные фигуры D^* лежат внутри D , они ограничены контурами C_q^1, C_u, C_q^{0*} . Внутри фигур D^* могут быть отверстия D_i с контурами C_i . Имеет место включение

$$\bar{D}^* \subset D^* + \sum_i D_i$$

Здесь F_0 — площадь фигуры D , а число c_0 — малая константа. Односвязную фигуру, контур которой \bar{C} на рис. 1 показан пунктиром, назовем \bar{D}^* . Заполнив все полости фигур D^* упругопластической средой, образуем фигуры D_0^* . Эти односвязные фигуры ограничены контурами $C_0^* = C_q^1 + C_u + C_q^{0*}$. Потребуем выполнения включения

$$D_0^* \supset \bar{D}^*. \tag{2}$$

Введем для областей D^* допустимые векторные поля $u_i \in V$ со свойствами:

$$u_i(s) = 0, \quad s \in C_u, \quad \text{div } u_i = 0, \quad x \in D^*, \quad \int_{C_q^1} q_i(s) u_i(s) ds = 1. \tag{3}$$

Буква V обозначает множество вектор-функций ограниченной деформации. Норма в этом пространстве такова [Дюво, Лионс, 1980]:

$$\|u_i(x)\|_V = \int_{D^*} \Gamma(u_i) dx, \quad dx = dx_1 dx_2. \tag{4}$$

Здесь $\Gamma(u_m) = (2e_{ij}^2(u_m))^{1/2}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, $i, j, m = 1, 2$.

Функция $\Gamma(u_m) = (2e_{ij}^2(u_m))^{1/2}$ отвечает поверхности нагружения Мизеса $f(s_{ij}) = s_{ij}^2 - 2k^2 = 0$.

Буквой x обозначаются внутренние точки области, координаты этих точек названы x_i ($i = 1, 2$), буквой s отмечены координаты контурных линий, $q_i(s) \in L_\infty(C_q^1)$. Для векторов и тензоров принята координатная запись: вектор u_i имеет на плоскости две компоненты (u_1, u_2) , а в пространстве — три (u_1, u_2, u_3) . По повторяющемуся индексу производится суммирование, $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$, $\delta_{12} = 0$. Девиатор напряжений обозначен как s_{ij} , предел текучести материала на сдвиг равен k .

Пусть для области D^* известен коэффициент предельной нагрузки λ :

$$\lambda = k \inf_{u_i} \int_{D^*} \Gamma(u_i) dx. \tag{5}$$

Нижняя грань вычисляется по допустимым векторным полям u_i . Формула (5) — следствие кинематической теоремы о предельной нагрузке для области D^* с условием текучести Мизеса [Качанов, 1969; Мосолов, Мясников, 1989]. Это же соотношение остается справедливым и для упругопластических тел [Панагитопулос, 1989, Найштут, 1993].

Ставится задача: среди фигур, с заданным коэффициентом предельной нагрузки λ и удовлетворяющих условиям (1), (2), найти фигуру наименьшей площади (веса)

$$F = \int_{D^*} dx \quad (6)$$

так, чтобы общая длина всех контуров S , включая отверстия D_i , была минимальной, а число отверстий максимально. Иными словами: вначале выделяются все фигуры минимальной площади, удовлетворяющие условиям (1), (2). Затем среди них выбираются те, где минимально число S . Наконец, определяется фигура, где число отверстий максимально. Другой вопрос таков: оценить число отверстий в оптимальной фигуре.

Требование (1) существенно, так как его отсутствие позволяет рассматривать фигуры D^* с бесконечным числом отверстий и бесконечной длиной всех контуров (например, канторово множество тонких разрезов). Условие (1) принято для того, чтобы исключить «патологию стратифицированных множеств», как это сделано в проблеме Плато [Фоменко, 1982].

Столь же существенно условие (2). Если от него отказаться, то область \bar{D}^* для прочных материалов становится близкой к одномерному стержню, в котором не может быть отверстий.

3. Геометрия упругопластических тел минимального объема при большом значении коэффициента предельной нагрузки

Основное допущение, при котором изучается задача, таково: в дополнение к условию (2) о том, что все варьируемые фигуры покрывают двумерную область \bar{D}^* с контуром \bar{C}^* , вводится предположение: число λ^* , вычисленное по формуле (5) для фигуры \bar{D}^* , принимает большое значение, а число c_0 достаточно мало. Рассмотрим одну из возможностей создания минимальной фигуры D^* . Нанесем на фрагмент \bar{D}^* , показанный на рис. 2, конечную координатную сетку с такими размерами $\Delta x_1, \Delta x_2$, чтобы внутри каждого четырехугольника можно было образовать отверстие при параметре $\lambda_1 > \lambda$. Эта операция выполняется при условии, что параметр c_0 достаточно мал, а $\lambda \ll \lambda^*$. В самом деле, для любого $\lambda' > \lambda$ каждый из четырехугольников, показанных на рис. 2, в силу теоремы о предельной нагрузке может быть уравновешен напряжениями, лежащими внутри поверхности нагружения с условием Мизеса $f(s_{ij}) = s_{ij}^2 - 2k'^2 = 0$, когда $k' < k$. Следовательно, внутри каждого четырехугольника можно образовать достаточно малое отверстие, и фигура D^* , отмеченная более темной краской, является допустимой для последующего анализа.

Так как число λ^* для фигуры \bar{D}^* велико, а для оптимальной фигуры D^* оно должно уменьшиться до значения λ , то переход от λ^* к λ сопровождается увеличением площади отверстий и уменьшением расстояний между ними δ_{1m}, δ_{2m} . Наконец, если отношение λ^* / c_0 стремится к бесконечности, расстояние между отверстиями стремится к нулю, и область D^* может быть отождествлена со стержневой системой, показанной на рис. 3.

Таким образом, в рамках основного допущения двумерная поверхность заменяется системой одномерных линий (стержней, нитей, струн), которым в качестве физических параметров следует приписать длины S_{1m}, S_{2m} и толщины δ_{1m}, δ_{2m} . В пределе $\lambda^* / c_0 \rightarrow \infty$ построенная сеть

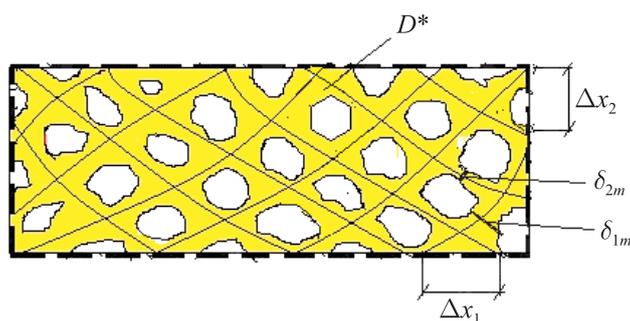


Рис. 2. Образование отверстий в фигуре \bar{D}^* . Показан фрагмент возможной фигуры D^* с конечной сеткой координатных линий; $\Delta x_1, \Delta x_2$ — шаг координатной сетки; δ_{1m}, δ_{2m} — минимальные расстояния между отверстиями в фигуре D^*

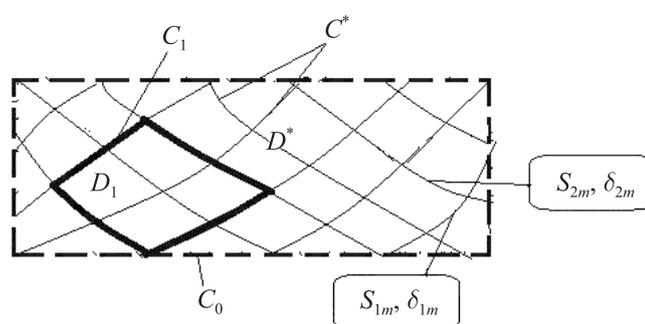


Рис. 3. Аппроксимация фигуры \bar{D}^* стержневой сеткой. Фрагмент координатной сетки фигуры D^* с границей C_0 . Линии C^* характеризуются длинами сторон четырехугольников S_{1m}, S_{2m} и толщинами δ_{1m}, δ_{2m} , образуя конечный аналог каркаса Максвелла–Мичелла. Обозначения D_1, C_1 определяют подобласть D_1 с граничным контуром C_1 внутри фигуры D^*

может быть интерпретирована как континуальное множество одномерных линий (стержней), обладающих плотностями

$$\mu_1 = \delta_{1m} / \Delta x_2, \quad \mu_2 = \delta_{2m} / \Delta x_1.$$

Такую стержневую конструкцию принято называть континуумом (фермой) Максвелла–Мичелла [Баничук, 1986; Прагер, 1977]. Обратим внимание на то, что понятие плотности стержней в ферме Максвелла–Мичелла совпадает с понятием плотности силовых линий (напряженности) электромагнитного поля, введенным Фарадеем.

Деформации во внутренних точках стержней, составляющих фермы Максвелла–Мичелла, можно изучать, если известно двумерное векторное поле, определенное в узлах сети. Чтобы удовлетворить условию $\operatorname{div} u_i = 0$ в точках, перпендикулярных к линиям S_{1m}, S_{2m} , достаточно доопределить в этих точках произвольно выбираемое перемещение внутри отверстий.

Следует отметить, что описанный выше процесс редукции исходной двумерной задачи к одномерной при $\lambda^* / c_0 \rightarrow \infty$ не является законченным математическим рассуждением, автор не располагает строгим доказательством этого результата. Подтверждением справедливости выводов служат многие факты, известные в биологии и медицине. Они описываются ниже, вселяя надежду, что возникшие математические проблемы могут быть преодолены.

После сведения двумерной проблемы оптимизации к задаче о расчете фермы Максвелла–Мичелла возникает следующий вопрос: можно ли из области D^* удалить часть каркаса D_1 таким образом, чтобы не увеличивать общий объем конструкций? Ответ на этот вопрос содержится в последующем изложении.

Рассмотрим в области D^* систему стержней C^* . Построенная сеть занимает площадь

$$F = \sum_m (S_{1m} \delta_{1m} + S_{2m} \delta_{2m}). \quad (7)$$

Но для одномерных стержневых систем число λ по формуле (5) равно

$$\lambda = \sum_m R(S_{1m} \delta_{1m} + S_{2m} \delta_{2m}) |\varepsilon_m|. \quad (8)$$

Здесь постоянная R — предел текучести материала на растяжение-сжатие, а ε_m — относительное удлинение, отвечающее вектору скорости течения u_i . Оба выражения одновременно достигают экстремальных значений, поэтому по лемме Фаркаша [Лоран, 1975] справедливо равенство

$$|\varepsilon_m| = \text{const}. \quad (9)$$

Следовательно, направления стержней в оптимальной по весу конструкции совпадают с главными направлениями деформаций вектора u_i . При этом деформации в двух направлениях одинаковы по абсолютной величине:

$$|\varepsilon_{1m}| = |\varepsilon_{2m}| = \varepsilon. \quad (10)$$

Возникает вопрос: можно ли удалить в стержневой системе часть элементов, не увеличивая оптимальную площадь F ? Если $\varepsilon_{1m} = -\varepsilon_{2m}$ (сеть Мичелла), то в этой системе удлинение по любому направлению меньше по абсолютной величине, чем ε . Поэтому в сети Мичелла нельзя образовать большие отверстия (максимум их площадь $F_0 c_0$), сохранив оптимальный объем. Другими словами, в сети Мичелла присутствуют только малые отверстия, отвечающие константе c_0 . Убедимся, что если $\varepsilon_{1m} = \varepsilon_{2m}$ (сеть Максвелла), то «паутина» этой области может быть заменена одним контурным стержнем при условии, что плотности струн μ_1, μ_2 удовлетворяют условию

$$\mu_1 = \delta_{1m} / \Delta x_1 > 0, \quad \mu_2 = \delta_{2m} / \Delta x_2 > 0. \quad (11)$$

Рассмотрим подробнее область D_1 (рис. 4). Примем во внимание, что область D_1 имеет малую площадь. Это позволяет считать координатную сетку ортогональной.

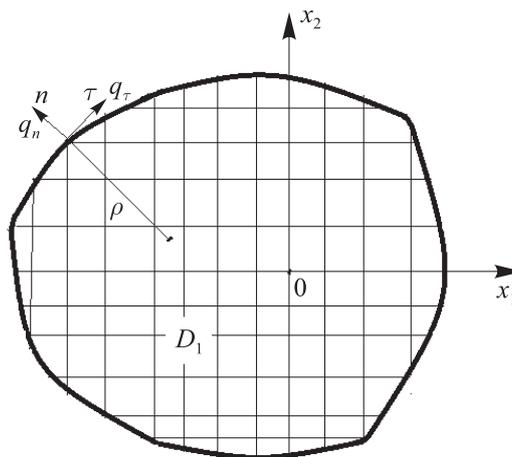


Рис. 4. К анализу сети Максвелла. Координатная сетка в подобласти D_1 . Компоненты q_n, q_τ — составляющие погонной нагрузки вдоль нормали и касательной на границе области, ρ — радиус кривизны в точке контура

Пусть контур C_1 задан в координатах x_1, x_2 уравнениями

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s), \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2. \quad (12)$$

В произвольной точке контура спроектируем усилия от континуума Максвелла на нормаль \mathbf{n} и касательную $\boldsymbol{\tau}$, обозначив радиус кривизны контура в этой точке буквой ρ . Для определения формы контура C_1 и усилия в нем T имеем два уравнения равновесия:

$$\frac{T}{\rho} = q_n, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = q_\tau, \quad q_n = \mu_1 \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2, \quad q_\tau = (\mu_1 - \mu_2) \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_2}{ds}. \quad (13)$$

Исключив из первого уравнения усилие T и учитывая формулы для кривизны,

$$\rho = \frac{A}{B}, \quad A = \left(\left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}, \quad B = \frac{dx_1}{ds} \frac{d^2 x_2}{ds^2} - \frac{dx_2}{ds} \frac{d^2 x_1}{ds^2},$$

запишем вместе с (12) уравнения, определяющие форму контура C_1 .

Получающаяся система не вырождается при условии (11) и допускает непрерывное решение. Выбрав толщину кольца на отрезке с номером k — δ_k из равенства $T_k = R\delta_k$, видим, что площадь, занятая контуром C_1 , совпадает с площадью континуума Максвелла. Действительно, система, включающая контур C_1 и континуум Максвелла, допускает деформацию равномерного растяжения-сжатия. А в силу принципа виртуальных мощностей получится

$$\sum_m R(S_{1m}\delta_{1m} + S_{2m}\delta_{2m})|\varepsilon_m| = \sum_{C_1} R\delta_k \Delta s_k \varepsilon. \quad (14)$$

В сочетании с (10) видно, что площадь кольца равна площади континуума Максвелла, поэтому в этом случае оптимальная по весу фигура может иметь немалые отверстия.

Существенно, что сеть с плотностями μ_1, μ_2 превращается в кольцо конечной площади порядка $A_r = \mu\rho$, где $\mu = \max(\mu_1, \mu_2)$. Близкий результат имеет место при оптимальном проектировании пластин с заданной частотой собственных колебаний [Лурье, Черкаев, 1981].

Отметим, что условия (11) нельзя ослабить. Действительно, если в однонаправленном напряженном состоянии какое-то из чисел $\mu_i = 0$, то малые отверстия с площадями c_0 (условие (1)) нельзя объединить, сделав отверстие большей площади. Поэтому в условиях чистого сдвига и одноосного растяжения (и большом коэффициенте запаса) оценка для числа n возможных отверстий в области D^* одинакова:

$$n \leq 1/c_0. \quad (15)$$

Здесь $F(D^*)$ — площадь фигуры D^* . Для длины S справедлива оценка

$$S \geq 2n\sqrt{\pi F(D^*)c_0}.$$

Свойства сетей реализованы в живой природе в виде различных тканей. На рис. 5 представлены микрофотографии костной ткани [Yuehuei, Kylie, 2010].

Условие (11) в природе практически нереализуемо из-за того, что нагрузка на суставы часто меняет направление. Поэтому оптимальные по расходу прочного материала кости состоят из тканей с большим количеством пустот. В геологии и инженерной практике сеть Максвелла также редко встречается. Можно отметить появление пещер в грунтах, испытывающих всестороннее сжатие. Конструкции подводных лодок (всестороннее сжатие) или космических аппаратов (всестороннее растяжение) также относятся к этой категории.

Аналог сети Максвелла–Мичелла можно построить и в трехмерном пространстве, как это наблюдается в конструкции губчатой кости (рис. 6) [Yuehuei, Kylie, 2010; Киченко, Тверье и др., 2008]. Действительно, двумерную область D_1 (рис. 2, 3) следует заменить трехмерной фигурой D^* (рис. 7).

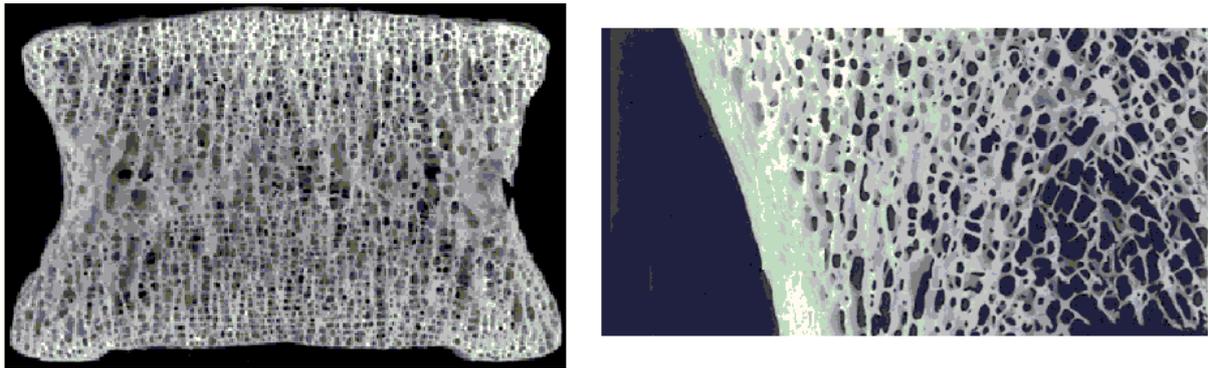


Рис. 5. Сеть костной ткани — аналог сети Мичелла

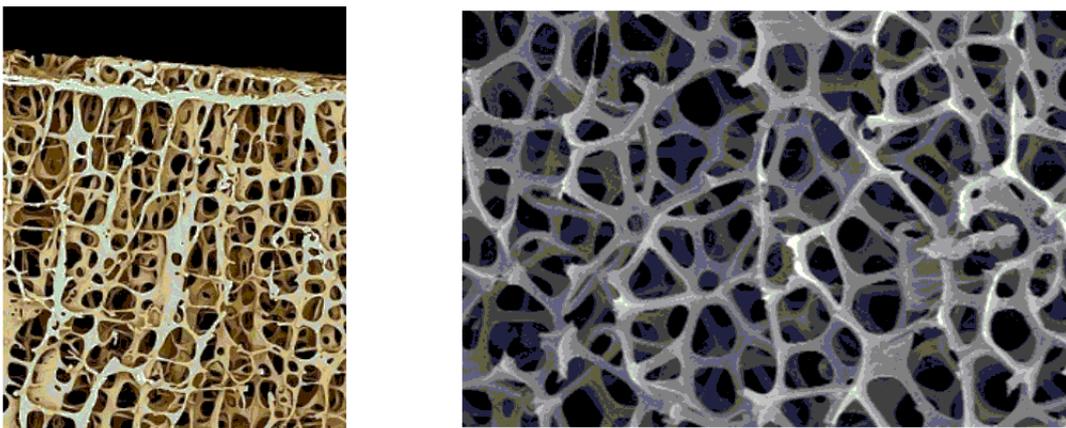
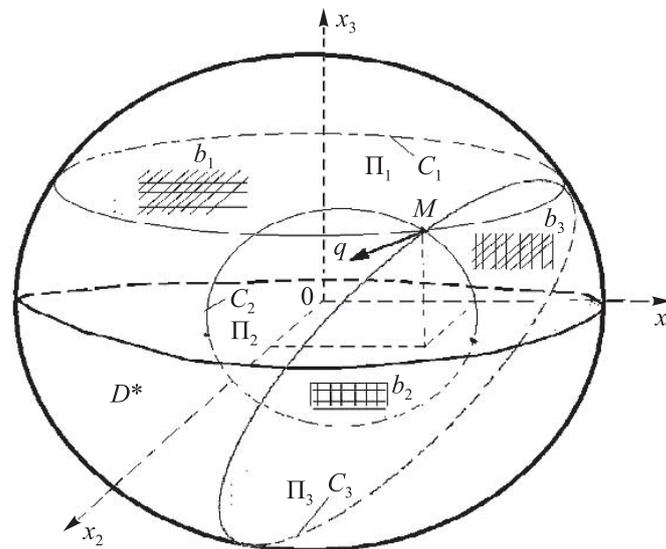


Рис. 6. Трехмерные стержневые сети (аналоги сетей Максвелла–Мичелла), наблюдаемые в губчатых костных тканях

Рис. 7. Схема трехмерной стержневой системы Максвелла–Мичелла. Фигура D^* разбивается трехмерной сеткой на линии b_1, b_2, b_3 , располагающиеся в плоскостях, перпендикулярных осям x_1, x_2, x_3 . Пересечение этих плоскостей Π_1, Π_2, Π_3 с границей области D^* порождает кривые (стержни) C_1, C_2, C_3 , которые в сети Максвелла могут заменить наборы стержней b_1, b_2, b_3

В условии (1) надо заменить площадь свободной от материала ячейки F_i на объем полости V_i , переписав его:

$$V_i \geq c_0 V_0. \quad (16)$$

Переформулированная задача такова: среди фигур, с заданным коэффициентом предельной нагрузки λ и удовлетворяющих условию (16), найти фигуру наименьшего объема (веса)

$$V = \int_{D^*} dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3$$

так, чтобы общая поверхность F^* всех областей D^* была минимальной, а число полостей максимально. Как и в плоском случае принимаются основные допущения: имеет место включение (2), число λ^* велико для фигуры \bar{D}^* , а c_0 достаточно мало. И в пространственном случае оптимальная по весу фигура представляет собой континуальный набор одномерных стержней, расположенных в трех взаимно перпендикулярных направлениях главных деформаций. Для этого набора выполняется аналог условия (11):

$$|\varepsilon_{1m}| = |\varepsilon_{2m}| = |\varepsilon_{1b}| = \varepsilon. \quad (17)$$

Если числа ε_{im} различаются по знаку, то образуется система Мичелла, и стержневой набор, расположенный внутри области, нельзя заменить системой стержней, расположенной на поверхности F^* . Если же все числа ε_{im} одного знака, то образуется аналог континуума Максвелла, для которого при дополнительном условии

$$\mu_1 = a_{1m} / \Delta x_2 \Delta x_3 > 0, \quad \mu_2 = a_{2m} / \Delta x_3 \Delta x_1 > 0, \quad \mu_3 = a_{3m} / \Delta x_1 \Delta x_2 > 0 \quad (18)$$

можно заменить внутренние стержни элементами, находящимися на поверхности F^* . В формуле (18) буквами a_{im} обозначаются площади стержней каждого из трех направлений.

Чтобы убедиться в последнем утверждении, достаточно рассмотреть в произвольной точке M поверхности F^* наборы стержней b_1, b_2, b_3 , расположенные в плоскостях Π_1, Π_2, Π_3 , перпендикулярных осям координат (рис. 7). Если стержневой набор передает на поверхность нагрузку q (q_1, q_2, q_3), то ее можно переразложить для каждой плоскости в виде $p_1 = (q_1/2, q_2/2)$, $p_2 = (q_1/2, q_3/2)$, $p_3 = (q_3/2, q_2/2)$. Эта операция позволяет заменить стержневой набор в рассматриваемых плоскостях стержнями на контурных линиях C_1, C_2, C_3 без увеличения объема всей системы.

Следовательно, и в трехмерном случае выполнение условия (18) позволяет конструировать полости в упругопластических телах. Вопрос о количестве полостей остается открытым.

4. Заключение

В статье рассмотрена задача о максимальном числе отверстий в упругопластическом теле минимального объема при заданном коэффициенте предельной нагрузки. Сформулированы дополнительные ограничения, отсутствие которых лишает проблему физического смысла. В предельном случае ($\lambda^*/c_0 \rightarrow \infty$) задача сведена к анализу геометрии ферм Максвелла–Мичелла. В результате этого анализа обнаружена аналогия между каркасами Максвелла–Мичелла и строением некоторых природных тканей.

Содержание работы позволяет поставить несколько общих математических проблем.

Представляет интерес строгое доказательство основного предположения, сформулированного в начале § 3. Другой вопрос состоит в анализе задачи без ограничения $\lambda^*/c_0 \rightarrow \infty$.

Много проблем возникает, если необходимо одновременно учесть ряд нагружений, то есть когда одно условие (3) и соответствующее ему равенство (5) заменяются несколькими аналогичными соотношениями. Наконец, предстоит выяснить, как влияет гладкость граничных поверхностей на геометрию тел минимального объема.

Решение перечисленных задач представляется важным не только в математическом плане, но и для понимания проблем прочности, возникающих в технике и биомеханике.

Список литературы (References)

- Баничук Н. В.* Введение в оптимизацию конструкций. — М.: Наука, 1986.
Banichuk N. V. Introduction to optimal structural design [Vvedenie v optimizaciyu konstrukcii]. — Moscow: Nauka, 1986.
- Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. — Л.: Наука, 1980.
Burago Yu. D., Zalgaller V. A. Geometric inequalities [Geometricheskie neravenstva]. — L.: Nauka, 1980.
- Дюво Г., Лионс Ж. Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
Duvaut G., Lions J. L. Les inequations en Mechanique et en Phisque. — Paris, Dunod, 1972. [Russ.: *Duvo G., Lions J. L.* Neravenstva v mehanike i fizike. — Moscow: Nauka, 1980.]
- Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
Kachanov L. M. Foundation of the theory of plasticity [Osnovi teorii plastichnosti]. — Moscow: Nauka, 1969.
- Киченко А. А., Тверье В. М., Няшин Ю.И., Симановская Е. Ю., Еловицова А. Н.* Становление и развитие классической теории описания структуры костной ткани // Российский журнал биомеханики. — 2008, — Т. 12, № 1. — С. 69–89.
Kichenko A. A., Tverie V. M., Niashin Yu. I., Simanovskaya E. Yu., Elovikova A. N. Classical description of the mechanical properties of the bone tissue // Russian biomechanical journal. — 2008. — Vol. 12, no. 1. — P. 69–89. (Original Russian paper: *Kichenko A. A., Tverie V. M., Niashin Yu. I., Simanovskaya E. Yu., Elovikova A. N.* Stanovlenie i razvitie klassicheskoi teorii opisaniia structuri kostnoi tkani // Rossiiskii zhurnal biomehaniki. — 2008. — Vol. 12, no. 1. — P. 69–89.)
- Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1953.
Courant R. Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. — New York. Interscience, 1950. [Russ.: *Kurant R.* Printsip Dirihle, konformnye otobrazheniya i minimalnye poverhnosti. — Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury, 1953.]
- Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975.
Laurent P.-J. Approximation et optimisaion. — Paris, Hermann, 1972. [Russ.: *Loran P.-J.* Approksimaziya i optimizaciya. — Moscow: Mir, 1975.]
- Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
Lurie K. A. Optimal control in the problems of mathematical physics [Optimalnoe upravlenie v zadachah matematicheskoy fiziki]. — Moscow: Nauka, 1975.
- Лурье К. А., Черкаев А. В.* О корректности постановки и о регуляризации задач оптимального проектирования пластин // Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций: Сборник. — М.: Мир, 1981. — С. 263–276.
Lurie K. A., Cherkaev A. V. On proper set up and regularization of structural optimization problems // Olhoff N. Optimal structural design. — Moscow: Mir, 1981. — P. 263–276. (Original Russian paper: *Lurie K. A., Cherkaev A. V.* O korrektnosti i o reguliarizacii zadach optimalnogo proektirovaniya plastin // Olhoff N. Optimalnoe proektirovanie konstrukcii. — Moscow: Mir, 1981. — P. 263–276.)
- Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1989.
Mosolov P. P., Miasnikov V. P. Mechanics of rigid plastic solids [Mehanika zhestkoplásticoshkh sred]. — Moscow: Nauka, 1989.
- Найштут Ю. С.* Обобщенные решения в теории течения идеальных упругопластических тел // Известия РАН, Механика твердого тела. — 1993. — № 6. — С. 74–78.
Nayshut Yu. S. Generalized solutions in the theory of elastoplasticity // Mechanics of solids. — 1993. — № 6. — P. 74–78. (Original Russian paper: *Nayshut Yu. S.* Obobschennie reshenia v theory techeniya idealnih uprugoplastičeskikh tel // Izvestia RAS, Mehanika tverdogo tela. — 1993. — № 6. — P. 74–78.)

- Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения. — М.: Мир, 1989.
Panagiotopoulos P. Inequality problems in mechanics and applications. — Boston–Basel–Stuttgart: Birkhauser, 1985.
[Russ.: Panagiotopoulos P. Neravenstva v mehanike i ih prilozheniya. — Moscow: Mir, 1989.]
- Прагер В.* Основы теории оптимального проектирования конструкций. — М.: Мир, 1977.
Prager W. Introduction to structural optimization. — Udine.: Springer-Verlag, 1974. (Russ.: *Prager W.* Osnovi teorii optimalnogo proektirovaniya konstrukcii. — Moscow: Mir, 1977.)
- Сосинский А. Б.* Сингулярные мыльные пленки [Электронный ресурс]: Дубна, 24.07.2003 г.
<https://www.youtube.com/watch?v=Ba782RRaQMY>
[Electronic resource]: <https://www.youtube.com/watch?v=Ba782RRaQMY>
- Фоменко А. Т.* Вариационные методы в топологии. — М.: Наука, 1982.
Fomenko A. T. Variational methods in topology [Variacionnie metodi v topologii]. — Moscow: Nauka, 1982.
- Rees D. W. A.* Mechanical of optimal structural design: minimal weight structures. New York, Willey, 2009.
- Schock H.-J.* Atlante delle Tensostrutture. — Basel–Torino: Birkhauser, 2001.
- Yuehwei H., Kylie L.* (eds.) Handbook of Histology Methods for Bone and Cartilage Softcover. — New York: Humana Press, 2010.