

УДК: 531.3

Новые алгоритмы составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета с переменной длиной звеньев и управлением в шарнирах-суставах

А. В. Борисов^{1,a}, Г. М. Розенблат²

¹ Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ» в г. Смоленске, Россия, 214013, г. Смоленск, Энергетический проезд, д. 1

² Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Россия, 125319, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 64

E-mail: ^a BorisowAndrej@yandex.ru

Получено 27.11.2016, после доработки — 18.02.2017.

Принято к публикации 20.02.2017.

В статье рассматривается модель антропоморфного механизма типа экзоскелета со звеньями переменной длины. Комплексно рассмотрены четыре модели звеньев переменной длины: модель звена экзоскелета переменной длины с упругим элементом и абсолютно твердым весомым стержнем, модель телескопического звена; модель звена с массами в шарнирах-суставах и между ними, модель звена с произвольным количеством масс. Составлены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода. На основе проведенного анализа дифференциальных уравнений движения для многосвязных стержневых механических систем типа экзоскелета выявлена их структура, позволившая представить их в векторно-матричном виде. Впервые установлены общие закономерности построения матриц и получены обобщения выражений для элементов матриц в двухмерном случае. Приводятся новые рекуррентный и матричный методы составления дифференциальных уравнений движения. Предлагается единый подход к построению дифференциальных уравнений движения экзоскелета на основе разработанных рекуррентного и матричного методов записи дифференциальных уравнений движения экзоскелета. Проведено сопоставление времени составления дифференциальных уравнений движения предложенными методами, в сравнении с уравнениями Лагранжа второго рода, в системе компьютерной математики *Mathematica*. Осуществлено аналитическое исследование модели экзоскелета. Установлено, что для механизмов с n подвижными звеньями решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений движения при любых начальных условиях существует, единственно и неограниченно продолжаемо. Управление экзоскелетом осуществляется с помощью крутящих моментов, расположенных в шарнирах-суставах в местах соединения звеньев и моделирующих управляющие воздействия. Выполнено численное исследование модели экзоскелета, проведено сопоставление результатов расчетов для экзоскелетов с различными моделями звеньев. Для численного исследования использованы эмпирические данные о человеке и его движениях. Установлено, что при выборе конструкции экзоскелета модель с сосредоточенными массами является предпочтительной, нежели модель с абсолютно твердым весомым стержнем, так как экзоскелет, обеспечивающий комфортабельные передвижения человека в нем, должен повторять свойства опорно-двигательного аппарата.

Ключевые слова: экзоскелет, звено переменной длины, шарнир-сустав, управление, дифференциальные уравнения движения, рекурсия, матрица, метод, интеграл энергии, численное решение

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-41-03224p_центр_A).

UDC: 531.3

New algorithms for composing differential equations of the motion of the exoskeleton with variable length of the links and the control of hinge-joint

A. V. Borisov^{1,a}, G. M. Rozenblat²

¹ The Branch of National Research University “Moscow Power Engineering Institute” in Smolensk,
1 Energeticheskiy proezd, Smolensk, 214013, Russia

² Moscow Automobile and Road Construction State Technical University,
64 Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russia

E-mail: ^a BorisowAndrej@yandex.ru

Received 27.11.2016, after completion — 18.02.2017.

Accepted for publication 20.02.2017.

The article discusses the model of the anthropomorphic type of mechanism of the exoskeleton with links of variable length. Four models of parts of variable length are considered comprehensively: the model link of the exoskeleton of variable length with a resilient member and a rigid strong core; the model of the telescopic link; the model link with the masses in the hinge-joint between them; the link model with an arbitrary number of masses. The differential equations of motion in the form of Lagrange equations of the second kind are made. On the basis of analysis of differential equations of motion for multi-link rod of a mechanical system type, exoskeleton revealed their structure, which allowed us to represent them in vector-matrix form. The General pattern of building matrices are established for the first time and the generalization of the expressions for elements of matrices in two-dimensional case are obtained. New recursive and matrix methods of composing of differential equations of motion are given. A unified approach to constructing differential equations of motion of the exoskeleton based on the developed recursive and matrix methods write differential equations of motion of the proposed exoskeleton. Comparison of the time of writing the differential equations of motion proposed methods, in comparison with the Lagrange equations of the second kind, in the system of computer mathematics Mathematica conducted. An analytical study of the model of the exoskeleton carried out. It was found that for mechanisms with n movable links of the Cauchy problem for systems of differential equations of motion for any initial conditions there is no single and unlimited continue. Control of the exoskeleton is accomplished using the torques which are located in the hinge-joints in the joints of the links and simulating control actions. Numerical investigation of a model of the exoskeleton is made, a comparison of results of calculations for exoskeletons with various models of units is held. A numerical study of the empirical evidence about the man and his movements is used. It is established that the choice structure of the exoskeleton model with lumped masses is more preferable to a model with perfectly rigid strong core. As an exoskeleton, providing comfortable movement of people, and you should repeat the properties of the musculoskeletal system.

Keywords: exoskeleton, link of variable-length, hinge-joint, control, differential equations of motion, recursion, matrix, method, the energy integral, numerical solution

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 201–210 (Russian).

The work was supported by RFBR (№ 15-41-03224r_center_A).

1. Введение

Большинство исследований робототехнических систем базируется на модели абсолютно твердого тела [Голубев, 2014; Павловский, 2013; Формальский, 1982; Черноушко, 2006]. Экзоскелеты с абсолютно твердыми звеньями некомфортабельны, что мешает их массовому распространению. При исследовании опорно-двигательного аппарата человека [Борисов, 2012] установлено, что расстояние между осями вращения в суставе не является постоянным, а изменяется в течение шага. Следовательно, звенья, из которых создается экзоскелет, должны моделировать эту особенность опорно-двигательного аппарата человека при локомоциях. Имеющиеся методы составления дифференциальных уравнений движения для экзоскелета трудоемки. В статье впервые предложен единый подход к моделированию звеньев переменной длины и представлены новые — рекуррентный и матричный — методы составления дифференциальных уравнений движения для экзоскелетов. Результаты теоретических исследований иллюстрируются конкретными числовыми примерами.

2. Описание моделей звена переменной длины и постановка задачи

Система имеет одно весоное звено AB переменной длины. На рис. 1, a – $г$ схематично изображены звенья и введены соответствующие обозначения. Положения однозначно определяются углом $\varphi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t)$ (рис. 1, a , $б$) или изменением длины всего стержня $l_1(t)$ (рис. 1, $в$, $г$). Модели имеют две степени свободы. M_1 — управляющий момент, развиваемый в шарнире A . Продольную силу, действующую вдоль стержня, обозначим как F_1 . На рис. 1, a звено AB состоит из невесомой части, изменяющей свою длину AD , и весоной абсолютно твердой части DB ; упругий элемент на участке AD считается невесомым. На рис. 1, $б$ звено состоит из двух весоных абсолютно твердых частей: $AB = l_1$, $CD = l_2$. Изменение длины звена происходит за счет движения вдоль направления AD корпуса CD . Упругий элемент на участке AC считается невесомым. Силой трения штока AB о корпус CD пренебрегаем. Масса штока AB равна m_1 . Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения, — I_1 . Для корпуса CD масса равна m_2 . Момент инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения, — I_2 .

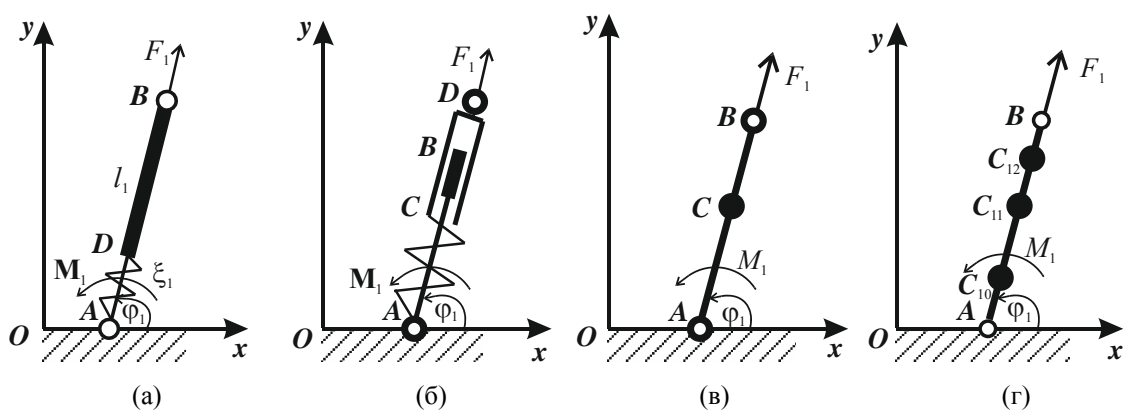


Рис. 1. Модели звеньев экзоскелета переменной длины: а) с абсолютно твердым весоным стержнем DB длины l_1 и невесомым участком переменной длины AD длины ξ_1 ; б) телескопическое звено; в) невесомого стержня AB переменной длины и трех точечных масс на стержне в шарнирах-суставах A и B на концах стержня и в точке C между A и B ; г) с тремя массами на стержне (M_1 — управляющий момент, развиваемый в шарнире A ; F_1 — продольная сила, действующая вдоль стержня; φ_1 — угол между стержнем AB и осью x , отсчитываемый против хода часовой стрелки)

На рис. 1, *в* модель состоит из невесомого стержня AB переменной длины и трех точечных масс, размещенных на стержне: в шарнирах-суставах A и B на концах стержня и в точке C между A и B . Введем двухиндексные обозначения: первый индекс обозначает номер звена, второй — номер точечной массы на этом звене. В точке A есть масса m_{10} , в точке C — масса m_{11} , в точке B — масса m_{12} . Положение массы в точке C , находящейся на стержне между его концами и не совпадающей с ними, задается множителем n_{11} ($0 < n_{11} < 1$), являющимся константой. Тогда длина $AC = n_{11}l_1(t)$ является переменной величиной — функцией времени. Точечная масса C , находящаяся на стержне, совершает сложное движение: вращательное около полюса (около нижней точки звена A) и поступательное вдоль AB . Такое же движение совершает и точечная масса, расположенная в точке B . На рис. 1, *з* представлена модель с тремя массами на стержне. Их положение задается множителями n_{ij} , где первый индекс относится к номеру звена, второй — к номеру массы на звене. Массы сосредоточены в точках C_{10} (масса m_{10}), C_{11} (масса m_{11}), C_{12} (масса m_{12}).

Составим дифференциальные уравнения движения для предложенных моделей стержней переменной длины, используя уравнения Лагранжа второго рода. Ввиду схожести результаты приведем для первой и четвертой моделей. Дифференциальные уравнения движения для первой модели (рис. 1, *а*) имеют вид

$$(I_1 + m_1(l_1 \xi_1 + \xi_1^2)) + gm_1(l_1 + \xi_1/2) \cos \varphi_1 + m_1(l_1 + 2\xi_1) \ddot{\xi}_1 = M_1, \tag{1}$$

$$-m_1(l_1 + 2\xi_1) \dot{\phi}_1^2 / 2 + gm_1 \sin \varphi_1 + m_1 = F_1. \tag{2}$$

Для четвертой модели (рис. 1, *з*) дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\theta_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 + g\eta_1 l_1 \cos \varphi_1 + 2\theta_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\phi}_1 = M_1, \tag{3}$$

$$-\theta_1 l_1 \dot{\phi}_1^2 + g\eta_1 \sin \varphi_1 + \theta_1 \ddot{l}_1 = F_1, \tag{4}$$

где $\theta_1 = m_{10}n_{10}^2 + m_{11}n_{11}^2 + m_{12}n_{12}^2$, $\eta_1 = m_{10}n_{10} + m_{11}n_{11} + m_{12}n_{12}$.

В итоге получены дифференциальные уравнения движения звеньев переменной длины.

3. Рекуррентно-матричный метод записи дифференциальных уравнений движения экзоскелета

Рассмотрим многозвенную модель экзоскелета, которая может быть составлена из звеньев, представленных на рис. 1, *а-з*. На рис. 2 схематично изображен фрагмент n -звенного экзоскелета в одноопорной фазе движения.

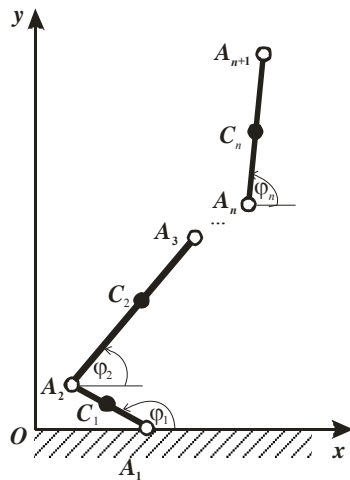


Рис. 2. Модель экзоскелета с n подвижными звеньями переменной длины

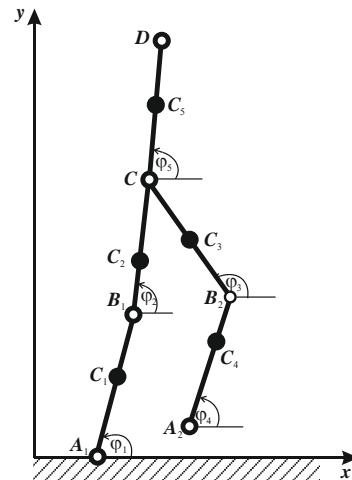


Рис. 3. Модель экзоскелета с пятью подвижными звеньями переменной длины

В результате анализа дифференциальных уравнений движения (1)–(4) выявлена их структура, предложена матричная форма записи и получены формулы для элементов матриц, позволяющие сразу записывать уравнения стержневых систем со звеньями переменной длины. Уравнения движения n -звенной механической системы с рассмотренными четырьмя типами звеньев в одноопорной фазе представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме имеют вид

$$A(q, l)\ddot{q} + B(q, l) + gC(q)l + 2D(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + E(q, l)\ddot{l} = M(q, l), \quad (5)$$

$$G(q, l)\ddot{q} + H(q, l)\dot{q}^2 + gK(q) + 2L(q, l)(\dot{l} \dot{q}) + P(q, l)\ddot{l} = F(q, l), \quad (6)$$

где: q — угловые обобщенные координаты $q = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$; l — обобщенные координаты, описывающие изменения длины звеньев $l = (l_1, \dots, l_n)^T$; $A(q, l)$, $B(q, l)$, $G(q, l)$, $H(q, l)$ — матрицы, учитывающие инерционные свойства; $C(q)$, $K(q)$ — матрицы, определяемые моментами силы тяжести; $D(q, l)$, $E(q, l)$, $L(q, l)$, $P(q, l)$ — матрицы, учитывающие переменную длину звеньев; $M(q, l)$, $F(q, l)$ — матрицы-столбцы обобщенных сил; \ddot{q} — матрица обобщенных ускорений; \dot{q} — матрица обобщенных скоростей, тогда $\dot{q}^2 = (\dot{\varphi}_1^2, \dots, \dot{\varphi}_n^2)^T$; $(\dot{l} \dot{q}) = (\dot{l}_1 \dot{q}_1, \dots, \dot{l}_n \dot{q}_n)^T$ — матрица, составленная из произведений \dot{l} при равных индексах.

Уравнения сохраняют свою структуру, различия для разных моделей будут заключаться только в обозначениях и виде матриц.

Для матрицы A первой модели:

$$a_{ij} = \delta_{ij}I_i + (l_i + \xi_i) \left(m_j(l_j \tilde{\delta}n_{ij} + \xi_j) + (l_j + \xi_j) \sum_{k=j+1}^n m_k \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ символ $\tilde{\delta}n_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1/2, & i \neq j. \end{cases}$

Для матрицы A четвертой модели:

$$a_{ij} = l_i l_j \left(\sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{j\beta} n_{j\beta} \tilde{\delta}n_{i\beta} + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{k=j+1}^n m_{k\beta} \right) \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad (8)$$

где символ $\tilde{\delta}n_{i\beta} = \begin{cases} n_{j\beta}, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases}$ α — количество масс на стержне.

Рекуррентный алгоритм позволяет, с учетом матрицы для n -звенной механической системы, построить матрицу для $(n + 1)$ -звенной модели. Рассмотрим на примере матрицы A . Построение матрицы для механической системы из $n + 1$ звена по матрице n -звенной модели проводится следующим образом:

$$A_{n+1} = A_n + \delta A_n, \quad (9)$$

где матрица A_n записывается в виде

$$A_n = \begin{pmatrix} I_1 + (l_1 + \xi_1) \left(m_1 \xi_1 + \sum_{k=2}^n m_k (l_1 + \xi_1) \right) & \dots & \left((l_1 + \xi_1) m_n \left(\frac{l_n}{2} + \xi_n \right) \right) \cos(\phi_1 - \phi_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left((l_1 + \xi_1) m_n \left(\frac{l_n}{2} + \xi_n \right) \right) \cos(\phi_1 - \phi_n) & \dots & I_n + (l_n + \xi_n) m_n \xi_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta A_n = \begin{pmatrix} m_{n+1} \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1 m_{n+1} \lambda_n \cos(\phi_1 - \phi_n) & \lambda_1 m_{n+1} \Lambda_{n+1} \cos(\phi_1 - \phi_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 m_n \Lambda_n \cos(\phi_1 - \phi_n) & \dots & m_{n+1} \lambda_n^2 & \lambda_n m_{n+1} \Lambda_{n+1} \cos(\phi_n - \phi_{n+1}) \\ \lambda_1 m_{n+1} \Lambda_{n+1} \cos(\phi_1 - \phi_{n+1}) & \dots & \lambda_n m_{n+1} \Lambda_{n+1} \cos(\phi_n - \phi_{n+1}) & I_{n+1} + \lambda_{n+1} m_{n+1} \xi_{n+1} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = l_1 + \xi_1$, $\lambda_n = l_n + \xi_n$, $\lambda_{n+1} = l_{n+1} + \xi_{n+1}$; $\Lambda_n = l_n/2 + \xi_n$, $\Lambda_{n+1} = l_{n+1}/2 + \xi_{n+1}$.

Аналогично строятся все матрицы, входящие в уравнения движения.

В матричном методе строится матрица A по предложенной формуле (7) или (8). Аналогично определяются элементы для всех остальных матриц, входящих в уравнения (5)–(6). Затем умножаем записанную матрицу на соответствующий ей вектор в уравнениях (5)–(6). В результате получаем дифференциальные уравнения движения. Данные методы автоматизируют составление дифференциальных уравнений движения экзоскелета с любым количеством звеньев переменной длины, минуя трудоемкий этап составления уравнений Лагранжа. Сравним время работы рассмотренных методов (таблица 1).

Таблица 1. Время составления дифференциальных уравнений движения разными методами в системе компьютерной математики *Mathematica*

| Метод | Время, с | | |
|---------------------------------|----------|---------|---------|
| | 1 звено | 2 звена | 3 звена |
| Уравнения Лагранжа второго рода | 0.922 | 7.827 | 45.171 |
| Рекуррентный метод | — | 0.640 | 0.859 |
| Матричный метод | 0.456 | 0.551 | 0.794 |

Из таблицы следует, что для составления дифференциальных уравнений движения эффективными являются предложенные рекуррентный и матричный методы. Различия в скорости нарастают с увеличением количества звеньев, рациональность предложенных методов становится видимой.

4. Аналитическое исследование модели экзоскелета

Если рассматривать баллистические движения, к которым близка одноопорная фаза при антропоморфной ходьбе, то управления в системе нет. Правая часть уравнения (5) равна нулю. Правую часть уравнения (6) будем считать потенциальной. Тогда существует интеграл энергии для рассматриваемых моделей. Рассмотрим интеграл энергии для первой модели.

$$E = T + \Pi = [\dot{\xi}_1^2 m_1 + \dot{\phi}_1^2 m_1 (\xi_1^2 + \xi_1 l_1) + \dot{\phi}_1^2 I_1] / 2 + gm_1(l_1 + \xi_1) \sin \varphi_1 = h. \quad (10)$$

Отсюда получаем:

$$\dot{\xi}_1^2 m_1 + \dot{\phi}_1^2 m_1 (\xi_1^2 + \xi_1 l_1) + \dot{\phi}_1^2 I_1 = 2(h - gm_1(l_1 + \xi_1) \sin \varphi_1). \quad (11)$$

Левая часть равенства (11) является положительно-определенной. Правая часть (11) зависит от тригонометрической функции и принимает все свои возможные значения в некоторой ограниченной замкнутой области. Следовательно, она ограничена сверху некоторой постоянной величиной H :

$$\dot{\xi}_1^2 m_1 + \dot{\phi}_1^2 m_1 (\xi_1^2 + \xi_1 l_1) + \dot{\phi}_1^2 I_1 \leq H. \quad (12)$$

Следовательно, при любом решении $\xi_1(t)$, $\varphi_1(t)$ все значения $\dot{\xi}_1, \dot{\phi}_1$ остаются ограниченными. Отсюда следует [7], что решение системы (1)–(2) имеет неограниченную продолжительность вперед и назад.

Проведем аналогичные рассуждения для четвертой модели.

$$E = T + \Pi = \theta_1(\dot{l}_1^2 + l_1 \dot{\phi}_1^2)/2 + g\eta_1 l_1 \sin \phi_1 = h. \quad (13)$$

Отсюда получаем:

$$\theta_1(\dot{l}_1^2 + l_1 \dot{\phi}_1^2) = 2(h - g\eta_1 l_1 \sin \phi_1). \quad (14)$$

Аналогично рассмотренному выше:

$$\theta_1(\dot{l}_1^2 + l_1 \dot{\phi}_1^2) \leq H. \quad (15)$$

Таким образом, решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений движения (1)–(2) и (3)–(4) при любых начальных условиях существует, единственно и неограниченно продолжаемо.

Очевидно, что полученный выше результат обобщается на модели с n подвижными звеньями. Покажем это для первой модели. В обобщенном виде выражения для кинетической и потенциальной энергии записываются в виде

$$\begin{aligned} E = T + \Pi = & \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n I_i \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \sum_{j=1}^i \dot{\xi}_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (\xi_j + l_j)^2 \dot{\phi}_j^2 + (\xi_i^2 + \xi_i l_i) \dot{\phi}_i^2 + \right. \right. \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} [(2\xi_i + l_i) \dot{\phi}_i \dot{\xi}_j - 2(\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_i] \sin(\phi_j - \phi_i) + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(\xi_j + l_{j+1}) \dot{\phi}_{j+1} \dot{\xi}_j - (\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \sin(\phi_j - \phi_{j+1}) + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} [(l_j l_i + \xi_j l_i + 2l_j \xi_i + 2\xi_j \xi_i) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_i] \cos(\phi_j - \phi_i) + \\ & \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(l_j l_{j+1} + \xi_j l_{j+1} + l_j \xi_{j+1} + \xi_j \xi_{j+1}) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_{j+1} + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \cos(\phi_j - \phi_{j+1}) \right\} \right] + \\ & + g \left(\sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^i (l_j + \xi_j / 2) \sin \phi_j \right] \right) = h. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n I_i \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \sum_{j=1}^i \dot{\xi}_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (\xi_j + l_j)^2 \dot{\phi}_j^2 + (\xi_i^2 + \xi_i l_i) \dot{\phi}_i^2 + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} [(2\xi_i + l_i) \dot{\phi}_i \dot{\xi}_j - 2(\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_i] \sin(\phi_j - \phi_i) + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(\xi_j + l_{j+1}) \dot{\phi}_{j+1} \dot{\xi}_j - (\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \sin(\phi_j - \phi_{j+1}) + \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} [(l_j l_i + \xi_j l_i + 2l_j \xi_i + 2\xi_j \xi_i) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_i] \cos(\phi_j - \phi_i) + \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(l_j l_{j+1} + \xi_j l_{j+1} + l_j \xi_{j+1} + \xi_j \xi_{j+1}) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_{j+1} + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \cos(\phi_j - \phi_{j+1}) \right\} = \\ & = 2 \left(h - g \left(\sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{j=1}^i (l_j + \xi_j / 2) \sin \phi_j \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично рассмотренному выше:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n I_i \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \sum_{j=1}^i \dot{\xi}_j^2 + \sum_{j=1}^{i-1} (\xi_j + l_j)^2 \dot{\phi}_j^2 + (\xi_i^2 + \xi_i l_i) \dot{\phi}_i^2 + \right. \\ & \quad + \sum_{j=1}^{i-1} [(2\xi_i + l_i) \dot{\phi}_i \dot{\xi}_j - 2(\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_i] \sin(\phi_j - \phi_i) + \\ & \quad + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(\xi_j + l_{j+1}) \dot{\phi}_{j+1} \dot{\xi}_j - (\xi_j + l_j) \dot{\phi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \sin(\phi_j - \phi_{j+1}) + \\ & \quad + \sum_{j=1}^{i-1} [(l_j l_i + \xi_j l_i + 2l_j \xi_i + 2\xi_j \xi_i) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_i + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_i] \cos(\phi_j - \phi_i) + \\ & \quad \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-2} [(l_j l_{j+1} + \xi_j l_{j+1} + l_j \xi_{j+1} + \xi_j \xi_{j+1}) \dot{\phi}_j \dot{\phi}_{j+1} + \dot{\xi}_j \dot{\xi}_{j+1}] \cos(\phi_j - \phi_{j+1}) \right\} \leq H. \end{aligned}$$

Для четвертой модели обобщения для случая n звеньев и α масс имеют вид

$$E = T + \Pi = \sum_{i=1}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{i\beta} (\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2) / 2 + g \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \left(m_{i\beta} n_{i\beta} + \sum_{j=i+1}^n m_{j\beta} \right) l_i \sin \phi_i \right) = h.$$

Здесь x, y — координаты массы на звене.

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{i\beta} (\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2) = 2 \left(h - g \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \left(m_{i\beta} n_{i\beta} + \sum_{j=i+1}^n m_{j\beta} \right) l_i \sin \phi_i \right) \right).$$

Аналогично рассмотренному выше:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{i\beta} (\dot{x}_{i\beta}^2 + \dot{y}_{i\beta}^2) \leq H.$$

Таким образом, получили, что для механизмов с n подвижными звеньями для рассмотренных моделей решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений движения (1)–(2) и (3)–(4) при любых начальных условиях существует, единственно и неограниченно продолжаемо.

5. Численное исследование динамики модели экзоскелета

Численное решение проведем для моделей с пятью подвижными звеньями переменной длины (рис. 3). Звенья экзоскелетов соответствуют рис. 1, *a, в*. Сопоставим влияние конструкции звена на поведение модели при одном и том же управлении, эмпирически определенном ранее [Борисов, 2012]. Значения параметров модели для рис. 1, *a*: $m_1 = m_4 = 2.91$ кг, $m_2 = m_3 = 8.93$ кг, $m_5 = 28.93$ кг; значения длины весомой абсолютно твердой части звена: $l_1 = l_4 = 0.385$ м, $l_2 = l_3 = 0.477$ м, $l_5 = 0.771$ м [Борисов, 2012]. На рис. 1, *в* значения масс звеньев брались такими же, но распределялись они в виде точечных масс — в шарнирах $\frac{1}{4}$ и на стержне $\frac{1}{2}$ от массы звена. Множители, задающие положение сосредоточенной массы на стержне, равны: $n_{11} = n_{41} = 0.595$, $n_{21} = n_{31} = 0.545$, $n_{51} = 0.500$. Длины звеньев для модели на рис. 1, *в* задавались в виде интерполяционных функций времени по эмпирическим данным [Борисов, 2012]. Начальные условия для обеих моделей: $\phi_1(0) = 1.68$ рад, $\phi_2(0) = 1.70$ рад, $\phi_3(0) = 1.21$ рад, $\phi_4(0) = 0.39$ рад, $\phi_5(0) = 1.57$ рад, $\dot{\phi}_1(0) = -1.57$ рад/с, $\dot{\phi}_2(0) = -2.92$ рад/с, $\dot{\phi}_3(0) = -0.19$ рад/с, $\dot{\phi}_4(0) = -2.83$ рад/с, $\dot{\phi}_5(0) = -0.07$ рад/с. На рис. 4 в качестве иллюстрации приводятся исходные эмпирические данные для моделей на примере голени переносимой ноги — звена номер 3 на рис. 3.

Численное решение полученных систем дифференциальных уравнений движения с описанными выше данными о моделях представлены на (рис. 5).

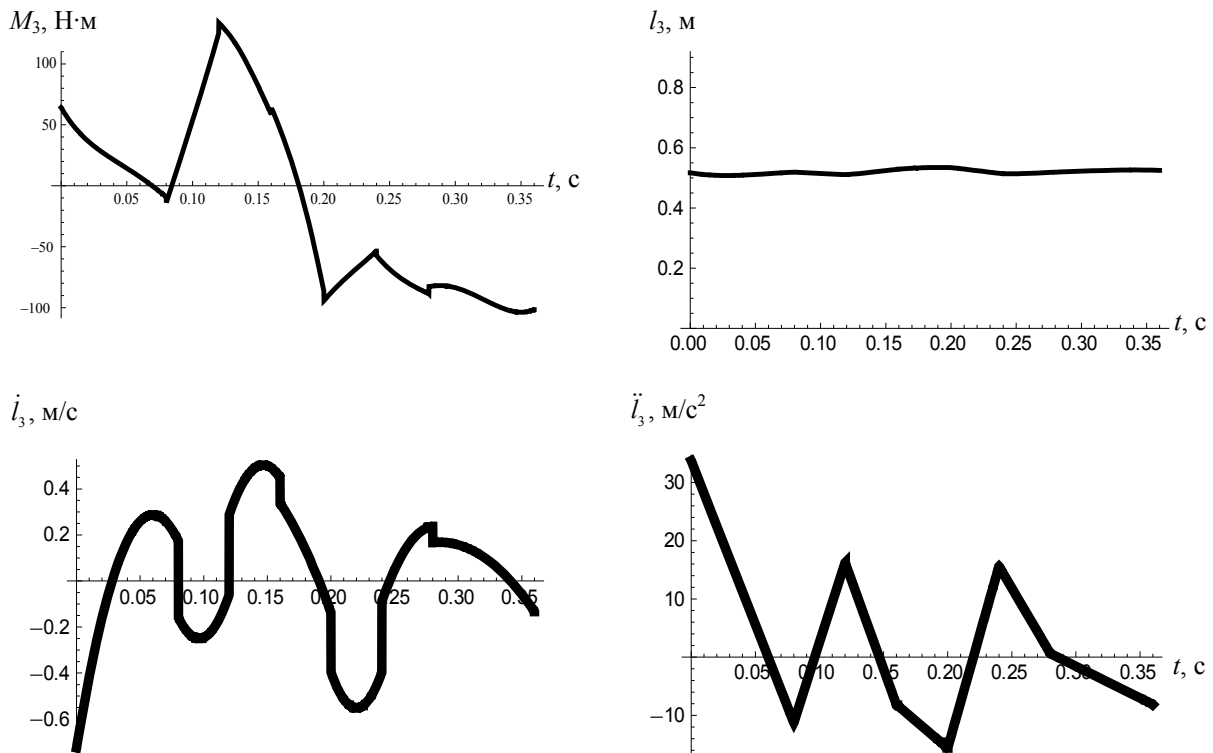


Рис. 4. Исходные эмпирические данные на примере голени переносимой ноги (звена номер 3): $M_3(t)$ — управляющий момент, $l_3(t)$ — изменение длины звена, $\dot{l}_3(t)$ — скорость изменения длины звена, $\ddot{l}_3(t)$ — ускорение изменения длины звена

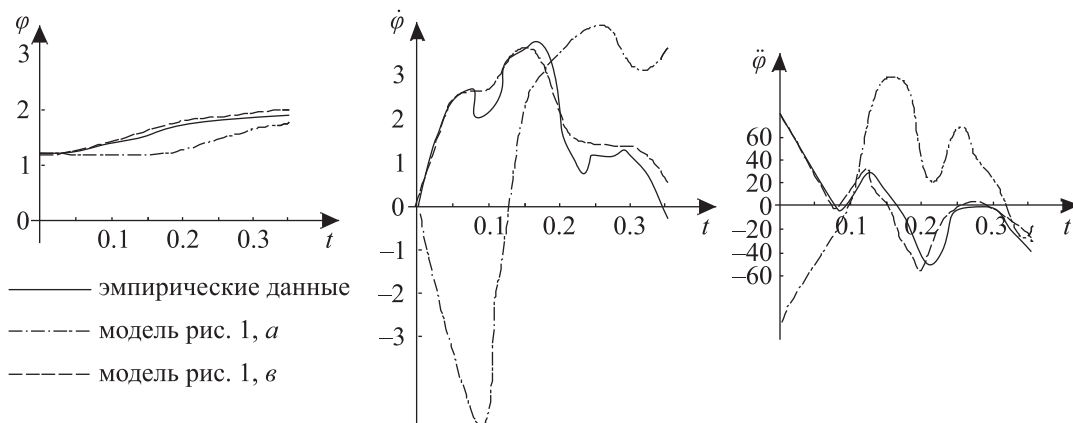


Рис. 5. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений движения экзоскелета, составленных из звеньев, модели которых представлены на рис. 1, а и рис. 1, в, и для сопоставления эмпирических данных кинематических характеристиках движения для голени переносимой ноги (звена номер 3): $\varphi(t)$ — угол поворота звена, $\dot{\varphi}(t)$ — угловая скорость звена, $\ddot{\varphi}(t)$ — угловое ускорение звена

По графикам видно, что для модели с сосредоточенными массами получается хорошее совпадение с исходным движением, а для модели с абсолютно твердым звеном совпадение отдаленное. Следовательно, при распределении точечных масс так, чтобы они соответствовали звену опорно-двигательного аппарата человека, получается близкое к исходному движение механизма. Однородный абсолютно твердый стержень отдаленно моделирует звено опорно-двигательного аппарата человека. Этим объясняется некомфортность моделей экзоскелетов, которые делаются из абсолютно твердых звеньев.

6. Заключение

В статье комплексно рассмотрены четыре математические модели стержней переменной длины, из которых может быть создан экзоскелет, обеспечивающий комфортабельные передвижения человека в нем за счет повторения свойств опорно-двигательного аппарата. Для них составлены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода.

Проведенный анализ дифференциальных уравнений движения для многосвязных стержневых механических систем типа экзоскелета позволил выявить их структуру и представить в векторно-матричном виде. Впервые установлены общие закономерности построения матриц и получены выражения элементов матриц. Разработаны новые подходы к получению нелинейных дифференциальных уравнений движения стержневой механической системы. Предложены эффективные алгоритмы записи дифференциальных уравнений движения для механизма типа экзоскелета с n подвижными звеньями без этапа составления уравнений при помощи уравнений Лагранжа второго рода, общих теорем динамики и т. п. Они позволяют получить усложненные системы за счет увеличения количества звеньев и учета изменения длины звеньев в процессе движения. Данные подходы составляют новое направление в динамике нелинейных систем применительно к эндо- и экзоскелетам.

Проведено аналитическое исследование предложенных моделей экзоскелетов, составленных из различных моделей звеньев, рассмотренных в статье. Установлено, что для механизмов с n подвижными звеньями решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений движения при любых начальных условиях существует, единственно и неограниченно продолжаемо.

Проведенное численное решение показало, что при выборе конструкции экзоскелета модель с сосредоточенными массами является предпочтительной в связи с тем, что, распределив точечные массы так, чтобы они в плане масс-инерционных характеристик соответствовали звену опорно-двигательного аппарата человека, можно получить хорошее совпадение с исходным движением. Для модели с абсолютно твердым стержнем совпадение масс-инерционных характеристик отдаленное от реального звена опорно-двигательного аппарата человека, и расчетное движение механизма получается не очень близкое к исходному.

Список литературы (References)

- Борисов А. В.* Динамика эндо- и экзоскелета: Монография. — Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. — 296 с.
BorISOV A. V. Dinamika endo- i ekzoskeleta: Monografija [Dynamics of endo- and exoskeleton: Monograph]. — Smolensk: Smolenskaja gorodskaja tipografija [Smolensk city printing], 2012. — 296 p. (in Russian).
- Голубев Ю. Ф.* Функция Аппеля в динамике систем твердых тел // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2014. — № 58. — 16 с.
Golubev Yu. F. Funkcija Appelja v dinamike sistem tverdyh tel [Appell function in the dynamics of systems of solids] // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha [Preprint IPM name M. V. Keldysha]. — 2014. — No. 58. — 16 p. (in Russian).
- Павловский В. Е.* О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2013. — № 101. — 32 с.
Pavlovsky V. E. O razbotkah shagajushhih mashin [On the development of walking machines] // Preprinty IPM im. M. V. Keldysha [Preprint IPM name M. V. Keldysh]. — 2013. — No. 101. — 32 p. (in Russian).
- Формальский А. М.* Перемещение антропоморфных механизмов. — М.: Наука, 1982. — 368 с.
Formal'skii A. M. Peremeshhenie antropomorfnyh mehanizmov [Moving anthropomorphic mechanisms]. — Moscow: Nauka, 1982. — 368 p. (in Russian).
- Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006. — 328 с.
Chernous'ko F. L., Anan'evskij I. M., Reshmin S. A. Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimimi sistemami [Nonlinear mechanical systems management practices]. — Moscow: FIZMATLIT, 2006. — 328 p. (in Russian).