**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2017 Т. 9 № 2 С. 143−165**
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-2-143-165



УДК: 519.85

# Прямые мультипликативные методы для разреженных матриц. Линейное программирование

**А. Б. Свириденко**

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», филиал в г. Новороссийске,
Россия, 353922, г. Новороссийск, ул. Героев Десантников, д. 87

E-mail: roshechka@gmail.com

*Получено 20.07.2016, после доработки — 06.12.2016.*
*Принято к публикации 19.01.2017.*

Мультипликативные методы для разреженных матриц являются наиболее приспособленными для снижения трудоемкости операций решения систем линейных уравнений, выполняемых на каждой итерации симплекс-метода. Матрицы ограничений в этих задачах слабо заполнены ненулевыми элементами, что позволяет получать мультипликаторы, главные столбцы которых также разрежены, а операция умножения вектора на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора. Кроме того, при переходе к смежному базису мультипликативное представление достаточно легко корректируется. Для повышения эффективности таких методов требуется уменьшение заполненности мультипликативного представления ненулевыми элементами. Однако на каждой итерации алгоритма к последовательности мультипликаторов добавляется еще один. А трудоемкость умножения, которая линейно зависит от длины последовательности, растет. Поэтому требуется выполнять время от времени перевычисление обратной матрицы, получая ее из единичной. Однако в целом проблема не решается. Кроме того, набор мультипликаторов представляет собой последовательность структур, причем размер этой последовательности неудобно велик и точно неизвестен. Мультипликативные методы не учитывают фактора высокой степени разреженности исходных матриц и ограничения-равенства, требуют определения первоначального базисного допустимого решения задачи и, как следствие, не допускают сокращения размерности задачи линейного программирования и регулярной процедуры сжатия — уменьшения размерности мультипликаторов и исключения ненулевых элементов из всех главных столбцов мультипликаторов, полученных на предыдущих итерациях. Таким образом, разработка численных методов решения задач линейного программирования, позволяющих преодолеть или существенно ослабить недостатки схем реализации симплекс-метода, относится к актуальным проблемам вычислительной математики.

В данной работе рассмотрен подход к построению численно устойчивых прямых мультипликативных методов решения задач линейного программирования, учитывающих разреженность матриц, представленных в упакованном виде. Преимущество подхода состоит в уменьшении размерности и минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов, причем изменения в позиции очередной обрабатываемой строки матрицы не вносятся, что позволяет использовать статические форматы хранения данных.

В качестве прямого продолжения данной работы в основу построения прямого мультипликативного алгоритма задания направления спуска в ньютоновских методах безусловной оптимизации предлагается положить модификацию прямого мультипликативного метода линейного программирования путем интеграции одной из существующих техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных.

Ключевые слова: численно устойчивые прямые мультипликативные методы, линейное программирование, формат хранения разреженных матриц, параллельное выполнение матричных операций без распаковывания, минимизация заполнения главных строк мультипликаторов, разреженные матрицы

**COMPUTER RESEARCH AND MODELING**
**2017 VOL. 9 NO. 2 P. 143−165**
DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-2-143-165

**MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION**

UDC: 519.85

# Direct multiplicative methods for sparse matrices. Linear programming

**A. B. Sviridenko**

FSEI of HPE "Kuban State University", branch in Novorossiysk,
87 Geroev Desantnikov st., Novorossiysk, 353922, Russia

E-mail: roshechka@gmail.com

*Received 20.07.2016, after completion — 06.12.2016.*
*Accepted for publication 19.01.2017.*

Multiplicative methods for sparse matrices are best suited to reduce the complexity of operations solving systems of linear equations performed on each iteration of the simplex method. The matrix of constraints in these problems of sparsely populated nonzero elements, which allows to obtain the multipliers, the main columns which are also sparse, and the operation of multiplication of a vector by a multiplier according to the complexity proportional to the number of nonzero elements of this multiplier. In addition, the transition to the adjacent basis multiplier representation quite easily corrected. To improve the efficiency of such methods requires a decrease in occupancy multiplicative representation of the nonzero elements. However, at each iteration of the algorithm to the sequence of multipliers added another. As the complexity of multiplication grows and linearly depends on the length of the sequence. So you want to run from time to time the recalculation of inverse matrix, getting it from the unit. Overall, however, the problem is not solved. In addition, the set of multipliers is a sequence of structures, and the size of this sequence is inconvenient is large and not precisely known. Multiplicative methods do not take into account the factors of the high degree of sparseness of the original matrices and constraints of equality, require the determination of initial basic feasible solution of the problem and, consequently, do not allow to reduce the dimensionality of a linear programming problem and the regular procedure of compression — dimensionality reduction of multipliers and exceptions of the nonzero elements from all the main columns of multipliers obtained in previous iterations. Thus, the development of numerical methods for the solution of linear programming problems, which allows to overcome or substantially reduce the shortcomings of the schemes implementation of the simplex method, refers to the current problems of computational mathematics.

In this paper, the approach to the construction of numerically stable direct multiplier methods for solving problems in linear programming, taking into account sparseness of matrices, presented in packaged form. The advantage of the approach is to reduce dimensionality and minimize filling of the main rows of multipliers without compromising accuracy of the results and changes in the position of the next processed row of the matrix are made that allows you to use static data storage formats.

As a direct continuation of this work is the basis for constructing a direct multiplicative algorithm set the direction of descent in the Newton methods for unconstrained optimization is proposed to put a modification of the direct multiplier method, linear programming by integrating one of the existing design techniques significantly positive definite matrix of the second derivatives.

Keywords: numerically stable direct multiplicative method, linear programming, the storage format of sparse matrices, parallel execution of matrix operations without unpacking, minimizing fill the main lines of multipliers, sparse matrices

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 143–165 (Russian).

## Линейное программирование

Задачи линейного программирования (ЛП) представляют собой один из основных классов задач оптимизации, встречающихся в приложениях, например, при исследовании экономических систем. Кроме того, во многих методах нелинейного программирования в основе задания направления спуска лежит решение вспомогательной задачи ЛП. К задачам ЛП приводят и методы решения линейных динамических задач оптимизации, основанные на дискретизации. Теории и методам решения задач ЛП и систем линейных неравенств посвящено огромное количество исследований, например [Булавский и др., 1977; Васильев и др., 2003; Гейл, 1963; Гольштейн и др., 1966; Еремин, 1998; Еремин и др., 1976; Еремин и др., 1983; Еремин, 1983; Еремин, 2001; Муртаф, 1984; Поляк, 1983; Разумихин, 1975; Схрейвер, 1991; Черников, 1968; Юдин и др., 1969]. Первоначально исследования в области численных методов ЛП концентрировались в основном на симплекс-методе. Далее разрабатывались разнообразные итерационные методы, а после опубликования работ [Дикин, 1967; Евтушенко и др., 1973; Евтушенко, 1974; Евтушенко и др., 1977; Mangasarian et al., 1979] внимание многих исследователей переключилось на методы внутренних точек (см., например, [Software, 1999; Kanzow et al., 2003]). При этом возникли новые формулировки задач ЛП и появились новые формы задания необходимых и достаточных условий оптимальности (см., например, [Евтушенко и др., 1992; Евтушенко и др., 1995; Evtushenko et al., 1996]).

**Симплекс-метод.** Симплекс-метод решения задач ЛП представляет собой совокупность алгоритмов, которые можно объединить по следующему признаку. В основу метода положен целенаправленный перебор значений из области допустимых значений ($D$). Доказано, что оптимальное решение лежит в угловых точках многогранника $D$ [Malyshkin, 2007; Вальковский и др., 1988]. Каждой угловой точке многогранника соответствует базисное допустимое решение (БДР) [Malyshkin, 2007]. Перебор всех БДР является алгоритмом с экспоненциальной оценкой. Однако если осуществлять перебор базисных решений в сторону неувеличения (неуменьшения) значения целевой функции, то можно значительно сократить число операций. Следует отметить, что компоненты БДР делятся на базисные и небазисные. Линейно независимые столбцы матрицы ограничений, составляющие базис, и размер базиса определяются по рангу матрицы условий соответственно. В БДР небазисные компоненты являются нулями, а на местах базисных компонент стоят неотрицательные значения. Если среди базисных компонент встречаются нули, то такое БДР называется вырожденным; одному и тому же вырожденному решению может соответствовать несколько различных базисов [Malyshkin, 2007]. Симплекс-метод состоит из трех основных этапов:

- определения некоторого первоначального БДР задачи;
- проверки оптимальности найденного решения;
- правила перехода к следующему не худшему допустимому базисному решению, если текущее БДР неоптимально.

**Алгоритмы на основе метода Ньютона.** Роль метода Ньютона в оптимизации невозможно переоценить: большинство наиболее эффективных методов в линейном и нелинейном программировании строятся на его основе; например, важнейший полиномиальный алгоритм внутренней точки в выпуклой оптимизации основан на методе Ньютона [Поляк, 2006]. В 70-х годах разрабатывался подход к задачам ЛП, основанный на использовании метода внешних штрафных функций (квадратичная функция штрафа). Хорошо известны работы в этом направлении, которые проводились Антипиным, Васильевым, Гольштейном, Ереминым, Поляком, Разумихиным, Третьяковым и другими исследователями из МГУ, ИПУ, ЦЭМИ, ИММ УрО РАН, ВЦ РАН [Вильчевский, 1970; Гольштейн и др., 1966; Karmarcar, 1984; Разумихин, 1975; Разумихин, 1980; Рапопорт, 1980; Черников, 1968; Ядыкин, 1977]. Примерно в это же время близкие исследования проводились Мангасарьяном и его сотрудниками. В их работах [Mangasarian, 1983; Mangasarian, 1984; Mangasarian, 1994] основное внимание уделялось нахождению нормальных решений в задачах ЛП, т. е. решений, обладающих минимальной евклидовой нормой. Широкое распространение этот подход в то время не получил. Впоследствии появились свидетельства о его перспективности с вычислительной точки зрения [Mangasarian, 2004; Meszaros, 1999]. Связано это с использованием быстросходящегося обобщенного метода Ньютона для минимизации выпуклой кусочно-квадратичной непрерывно дифференцируемой штрафной функции. У нее не существует матрица Гессе. Однако для такой штрафной функции можно построить обобщенный метод Ньютона, введя обобщенную матрицу Гессе. В работах [Meszaros, 1999; Mangasarian, 2004; Karmarcar, 1984] доказана конечная глобальная сходимость обобщенного метода Ньютона для минимизации выпуклой кусочно-квадратичной функции. Минимизация этой штрафной функции, примененной к двойственной задаче ЛП, дает возможность получить точное нормальное (с минимальной евклидовой нормой) решение прямой задачи, начиная с некоторого конечного значения коэффициента штрафа.

**Общая постановка проблемы.** Как известно, для различных вариантов модифицированного симплекс-метода решения задач ЛП [Канторович, 1959; Данциг, 1966; Гольштейн и др., 1966] наиболее трудоемкими операциями в общем случае являются операции решения систем линейных уравнений, выполняемые на каждой итерации симплекс-метода. Для снижения трудоемкости этих операций был предложен мультипликативный алгоритм [Зойтендейк, 1963; Dantzig et al., 1954], развитый в работах [Романовский и др., 1969; Малков, 1977; Ахметов и др., 1970; Forrest et al., 1972; Брэгман и др., 1977].

Идея мультипликативного алгоритма состоит в том, что обратная базисная матрица записывается в факторизованном виде — как произведение матриц-мультипликаторов. Алгоритмы ЛП, использующие мультипликативное представление обратной базисной матрицы, являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ. Матрицы ограничений в этих задачах, как правило, слабо заполнены ненулевыми элементами, что позволяет получать мультипликаторы, главные столбцы которых также разрежены, а операция умножения вектора на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора. Кроме того, при переходе к смежному базису мультипликативное представление достаточно легко корректируется.

Таким образом, для повышения эффективности мультипликативного алгоритма важнейшее значение имеет уменьшение заполненности мультипликативного представления ненулевыми элементами, так как от их числа зависят объем памяти, необходимый для хранения мультипликаторов, объем вычислений и, как следствие, скорость работы алгоритма и точность получаемого решения. Однако на каждой итерации мультипликативного симплекс-метода к последовательности мультипликаторов добавляется еще один, и трудоемкость умножения, которая линейно зависит от длины последовательности, растет. Поэтому требуется выполнять время от времени перевычисление (reinversion — переобращение) обратной матрицы, получая ее из единичной. Следует отметить, что при переобращении можно существенно сэкономить место за счет рационального выбора последовательности включения в формируемое заново базисное множество тех элементов, которые в нем должны быть [Брэгман и др., 1977]. Однако в целом проблема не решается.

Кроме того, набор мультипликаторов представляет собой последовательность структур, каждая из которых составлена из двух элементов, и можно ожидать, что размер этой последовательности неудобно велик, но точно не известен. Отсюда и некоторое неудобство хранения структуры, состоящей из пары полей неодинаковой длины, имеющих разную «степень выравнивания», — придется мириться с потерями либо памяти, либо эффективности. Мультипликативное представление обратной базисной матрицы не учитывает фактора высокой степени разреженности исходных матриц, в процессе решения могут быть получены практически полностью заполненные главные столбцы мультипликаторов.

Алгоритмы ЛП, использующие мультипликативное представление обратной базисной матрицы, требуют определения первоначального БДР задачи, не учитывают ограничения-равенства и, как следствие, не допускают сокращения размерности задачи ЛП и регулярной процедуры сжатия — уменьшения размерности мультипликаторов и исключения ненулевых элементов из всех главных столбцов мультипликаторов, полученных на предыдущих итерациях. Лишние действия — главная причина, по которой в данной работе основное внимание уделяется прямым мультипликативным методам решения систем, а не способам представления обратной базисной матрицы.

Исследования, проведенные Гаранжой, Евтушенко, Голиковым и Нгуеном [Гаранжа и др., 2009], показали, что многие прикладные задачи могут быть представлены в виде задач ЛП, для решения которых давно существуют численные методы и программное обеспечение, и, как могло бы показаться, не представляет никакого труда найти оптимальное решение. Однако размерности современных задач (миллионы переменных и сотни тысяч ограничений) порою не позволяют решить их традиционными методами. Поэтому требуется разработка новых подходов для решения таких задач, с привлечением мощных вычислительных ресурсов [Гаранжа и др., 2009].

Из вышесказанного следует, что разработка численных методов решения задач ЛП, позволяющих преодолеть или существенно ослабить недостатки схем реализации симплекс-метода, относится к актуальным проблемам вычислительной математики.

В [Гаранжа и др., 2009] отмечено, что большие задачи ЛП, как правило, имеют неединственное решение, а методы решения задач ЛП, такие как симплекс-метод, метод внутренних точек и метод квадратичной штрафной функции (см., например, [Булавский и др., 1977; Антипин, 1979]), дают возможность получать различные решения в случае неединственности [Гаранжа и др., 2009]. Так, симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. Метод внешней квадратичной штрафной функции дает возможность найти точное нормальное решение.

Таким образом, к актуальным проблемам вычислительной математики также относится разработка численных методов решения задач ЛП, которые дают возможность нахождения всех вершин многогранного множества, являющихся решениями задачи ЛП.

**Постановка цели и задач исследования.** Целью данной работы является развитие работы [Свириденко, 2015] — разработка численно устойчивого прямого мультипликативного алгоритма решения задач ЛП:

$$\min_{x\in R^n} c^T x \,\middle|\, Ax = a, \quad x \ge 0, \tag{1}$$

учитывающего разреженность матриц, представленных в упакованном виде, позволяющего ослабить или снять указанные выше недостатки симплекс-метода; а также использование формата хранения разреженных матриц, допускающего возможность параллельного выполнения любых матричных или матрично-векторных операций без распаковывания [Свириденко, 2016]. Здесь и далее $A \in R^{m\times n}$, $c \in R^n$, $a \in R^n$, $R^n$ обозначает $n$-мерное евклидово пространство.

В данной работе среди множества определений разреженной матрицы принято то, которое утверждает, что приписывание матрице свойства разреженности эквивалентно утверждению о существовании алгоритма, который, используя ее разреженность, приводит к сокращению временно́й и емкостной сложности реализации по сравнению со стандартными алгоритмами [Писсанецки, 1988; Григорьева и др., 2011; Дмитриева, 2014].

Подход к реализации поставленной цели состоит в модификации вычислительной схемы решения системы линейных уравнений прямым мультипликативным алгоритмом с перестановками [Свириденко, 2016] путем интеграции техники предложенного метода ЛП для выбора ведущего элемента [Хакимова и др., 2010; Свириденко, 2015].

**Замечания к разделу.** Вопросами, связанными с разреженными матрицами произвольной структуры, занимаются главным образом математики прикладных дисциплин, а также специалисты в других областях численного анализа, например в области математического программирования, линейного и нелинейного. Так как многие задачи для разреженных матриц естественным образом формулируются на языке теории графов, то исследованиями занимаются и специалисты в этой области.

Алгоритм, позволяющий сократить размерность пространства искомого вектора неизвестных при решении оптимизационных задач с ограничениями-равенствами, предложен в [Вылегжанин и др., 2008]. Алгоритм основан на модифицированной процедуре рекуррентного псевдообращения. Получены выражения для преобразования целевой функции в случаях, когда она является линейной или квадратичной формой. Приведен пример применения алгоритма для задачи ЛП.

Прямой мультипликативный алгоритм решения задач ЛП с ограничениями-неравенствами предложен в [Свириденко, 2015]. Доказано, что предложенный метод [Хакимова, 2010] позволяет уменьшить по кубическому закону число арифметических операций, необходимых для решения задачи ЛП по сравнению с известным мультипликативным алгоритмом симплекс-метода Малкова [Малков, 1977].

Можно отметить следующие особенности полученных до настоящего времени результатов, обуславливающие актуальность данной работы:

- не делалось серьезных попыток создать прямые мультипликативные алгоритмы решения задач ЛП, рассчитанные именно на разреженные матрицы;
- не делалось серьезных попыток создать прямые мультипликативные алгоритмы решения системы линейных уравнений для построения ньютоновских методов оптимизации с разреженными матрицами вторых производных [Черноруцкий, 2011; Черноруцкий, 2013].

## Прямой мультипликативный метод

В данной работе предлагается прямой мультипликативный алгоритм решения задач ЛП с ограничениями-равенствами, который не требует определения первоначального допустимого решения задачи и учитывает ограничения, что приводит к сокращению размерности задачи и к регулярной процедуре сжатия — уменьшения размерности мультипликаторов и исключения ненулевых элементов из всех главных строк мультипликаторов, полученных на предыдущих итерациях, так как возможность минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов заложена в самой структуре прямых мультипликативных методов.

В [Бахшиян и др., 2000] отмечено, что в задачах большой размерности вырожденность становится практически реальным явлением. Поэтому опишем феноменологию прямого мультипликативного метода на примере решения вырожденной задачи. Такой подход к построению вычислительных схем применяли, например, Парлетт [Парлетт, 1983], Стренг [Стренг, 1980], Гилл и Мюррей [Гилл и др., 1985], Отаров [Отаров и др., 2010], Черноруцкий [Черноруцкий, 2011; Черноруцкий, 2012; Черноруцкий, 2013], Вержбицкий [Вержбицкий, 2005], Цыганков [Цыганков, 2001].

**Пример 1.** Решить задачу (1) на зацикливание симплекс-метода [Шевченко и др., 2002]:

$$c^T = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 500 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -2 & -1/25 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3 & -1/50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -225/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -25 & 200 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 0** (инициализация). Перейти к эквивалентной задаче:

$$\min_{x \in R^n} x_0 \left| c_0 - x_0 + c^T x = 0, \quad Ax = a, \quad x \geq 0. \right.$$

Здесь $x_0$ $(x_0 \geq 0)$ — скалярная переменная, $c_0$ $\left(-c_0 < c^T x^*\right)$ — сколь угодно большая скалярная величина (вводится для уменьшения ошибок компенсации), $x^*$ — решение задачи (1).

**Замечание.** Среди арифметических операций есть такие, которые могут приводить к появлению относительных ошибок, превышающих величину машинной точности во много раз, например вычисления разностей почти совпадающих округленных чисел. Связанные с ними ошибки принято называть ошибками компенсации [Гилл и др., 1985].

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \min_j c_j \left(c_j < 0\right) = c_6 = -75.$$

**Замечание.** В случае точных вычислений выбор ведущего элемента может быть основан на упрощении вычислений, поэтому выберем $q = 8$.

Пересчитать элементы уравнения связи $c_0 - x_0 + c^T x = 0$:

$$x_8 = x_8^0 + e_{8_0\bullet}^0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_7 & x_0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_8^0 = 1/2c_0,\ e_{8_0\bullet}^0 = \begin{pmatrix} 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75/2 & 250 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$E_{8_0}^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75/2 & 250 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2c_0 \end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 1** (расчет $x^1$). Вычислить номер $r$ ведущей строки по формуле

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^0 \right| \left(i = 1,2,3,4\right) = \left| -a_4 + a_{4\bullet} x^0 \right| = \left| 1/2c_0 \right| = 1/2c_0.$$

**Замечание.** Для упрощении вычислений выберем $r = 3$.

Вычислить элементы уравнения связи:

$$a_3^1 + \begin{pmatrix} a_{31}^1 & \cdots & a_{38}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_7 & x_0 \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow a_3^1 = -a_3 + a_{38} x_8^0,\ \begin{pmatrix} a_{31}^1 & \cdots & a_{38}^1 \end{pmatrix} = a_{3\bullet} E_{8_0}^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3^1 = 1 - 1/2c_0, \begin{pmatrix} a_{31}^1 & \cdots & a_{38}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 & 0 & 0 & -1 & 0 & 75/2 & -250 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \max_j a_{3j}^1 \left(a_{3j}^1 > 0,\ j \neq 8\right) = a_{36}^1 = 75/2.$$

Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_6 = x_6^1 + e_{6_1\bullet}^1 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_7 & x_0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_6^1 = -a_3^1 / a_{36}^1,\ e_{6_1\bullet}^1 = -\begin{pmatrix} a_{31}^1 & \cdots & a_{35}^1 & a_{37}^1 & a_{38}^1 \end{pmatrix} / a_{36}^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_6^1 = -2/75 + 1/75c_0,\ e_{6_1\bullet}^1 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 2/75 & 0 & 20/3 & -1/75 \end{pmatrix},$$

$$E_{6_1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ 8 & 0 & 0 & 2/75 & 0 & 20/3 & -1/75 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимизировать заполнение главной строки мультипликатора:

$$x_8 = x_8^1 + e_{8_1\bullet}^0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_7 & x_0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_8^1 = x_8^0 + x_6^1 e_{8_0\,6}^0,\ e_{8_1\bullet}^0 = e_{8_0\bullet}^0 E_{6_1}^1 \ \Rightarrow\ x_8^1 = 1,\ e_{8_1\bullet}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{8_0}^0 E_{6_1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ 8 & 0 & 0 & 2/75 & 0 & 20/3 & -1/75 \\ & & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2/75 + 1/75\,c_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 2** (расчет $x^2$). Вычислить номер $r$ ведущей строки по формуле

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^1 \right| \left( i = 1,2,4 \right) = \left| -a_4 + a_{4\bullet} x^1 \right| = \left| 5/3 - 1/3\,c_0 \right| = 1/3\,c_0 - 5/3.$$

Вычислить элементы уравнения связи:

$$a_4^2 + \begin{pmatrix} a_{4\,1}^2 & \cdots & a_{4\,7}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_7 & x_0 \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_4^2 = -a_4 + a_{4\,6} x_6^1 + a_{4\,8} x_8^1,\ \begin{pmatrix} a_{4\,1}^2 & \cdots & a_{4\,7}^2 \end{pmatrix} = a_{4\bullet} E_{8_1}^0 E_{6_1}^1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_4^2 = 5/3 - 1/3\,c_0,\ \begin{pmatrix} a_{4\,1}^2 & \cdots & a_{4\,7}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625/2 & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 100/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \max_j a_{4\,j}^2 \ \left( a_{4\,j}^2 > 0,\ j \neq 7 \right) = a_{4\,6}^2 = 100/3.$$

Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_7 = x_7^2 + e_{7_2\bullet}^2 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_0 \end{pmatrix}^T \ \Rightarrow\ x_7^2 = -a_4^2 / a_{4\,6}^2,\ e_{7_2\bullet}^2 = -\begin{pmatrix} a_{4\,1}^2 & \cdots & a_{4\,5}^2 & a_{4\,7}^2 \end{pmatrix} / a_{4\,6}^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_7^2 = -1/20 + 1/100\,c_0,\ e_{7_2\bullet}^2 = \begin{pmatrix} 75/8 & 0 & 0 & 1/20 & -3/100 & -1/100 \end{pmatrix},$$

$$E_{7_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ 75/8 & 0 & 0 & 1/20 & -3/100 & -1/100 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимизировать заполнение главных строк мультипликаторов:

$$x_8 = x_8^2 + e_{8_2\bullet}^0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_0 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_8^2 = x_8^1 + x_7^2 e_{8_1\,6}^0,\ e_{8_2\bullet}^0 = e_{8_1\bullet}^0 E_{7_2}^2 \ \Rightarrow\ x_8^2 = 1,\ e_{8_2\bullet}^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$x_6 = x_2^2 + e_{6_2\bullet}^1 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_0 \end{pmatrix}^T \ \Rightarrow\ x_6^2 = x_6^1 + x_7^2 e_{6_1\,6}^1,\ e_{6_2\bullet}^1 = e_{6_1\bullet}^1 E_{7_2}^2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_6^2 = -9/25 + 2/25 c_0,\ e_{6_2\bullet}^1 = \begin{pmatrix} 141/2 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & -2/25 \end{pmatrix},$$

$$E_{8_0}^0 E_{6_1}^1 E_{7_2}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 141/2 & 0 & 0 & 9/25 & -1/5 & -2/25 \\ 75/8 & 0 & 0 & 1/20 & -3/100 & -1/100 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9/25 + 2/25 c_0 & -1/20 + 1/100 c_0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 3** (расчет $x^3$). Вычислить номер $r$ ведущей строки по формуле

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^2 \right| (i = 1,2) = \left| -a_2 + a_{2\bullet} x^2 \right| = \left| -1/20 + 1/100 c_0 \right| = -1/20 + 1/100 c_0.$$

Вычислить элементы уравнения связи:

$$a_2^3 + \begin{pmatrix} a_{2\,1}^3 & \cdots & a_{2\,6}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_5 & x_0 \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_2^3 = -a_2 + a_{2\,6} x_6^2 + a_{2\,7} x_7^2 + a_{2\,8} x_8^2,\ \begin{pmatrix} a_{2\,1}^3 & \cdots & a_{2\,6}^3 \end{pmatrix} = a_{2\bullet} E_{8_0}^0 E_{6_1}^1 E_{7_2}^2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_2^3 = 1/20 - 1/100 c_0,\ \begin{pmatrix} a_{2\,1}^3 & \cdots & a_{2\,6}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81/8 & 0 & -1 & -1/20 & 1/100 & 1/100 \end{pmatrix}.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \max_j a_{2\,j}^3 \ \left( a_{2\,j}^3 > 0,\ j \neq 6 \right) = a_{2\,5}^3 = 1/100.$$

Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_5 = x_5^3 + e_{5_3\bullet}^3 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 & x_0 \end{pmatrix}^T \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x_5^3 = -a_2^3 / a_{2\,5}^3,\ e_{5_3\bullet}^3 = -\begin{pmatrix} a_{2\,1}^3 & \cdots & a_{2\,4}^3 & a_{2\,6}^2 \end{pmatrix} / a_{2\,5}^3 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x_5^3 = -5 + c_0,\ e_{5_3\bullet}^3 = \begin{pmatrix} 2025/2 & 0 & 100 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E^3_{5_3}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\2025/2&0&100&5&-1\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

Минимизировать заполнение главных строк мультипликаторов:

$$x_8=x_8^3+e^0_{8_3\bullet}\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_4&x_0\end{pmatrix}^T\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_8^3=x_8^2+x_5^3e^0_{8_2\,5},\ e^0_{8_3\bullet}=e^0_{8_2\bullet}E^3_{5_3}\Rightarrow x_8^3=1,\ e^0_{8_3\bullet}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\end{pmatrix},$$
$$x_6=x_6^3+e^1_{6_3\bullet}\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_4&x_0\end{pmatrix}^T\Rightarrow x_6^3=x_6^2+x_5^2e^1_{6_2\,5},\ e^1_{6_3\bullet}=e^1_{6_2\bullet}E^3_{5_3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_6^3=16/25-3/25c_0,\ e^1_{6_3\bullet}=\begin{pmatrix}-127&0&-20&-16/25&3/25\end{pmatrix},$$
$$x_7=x_7^3+e^2_{7_3\bullet}\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_4&x_0\end{pmatrix}^T\Rightarrow x_7^3=x_7^2+x_5^2e^2_{7_2\,5},\ e^2_{7_3\bullet}=e^2_{7_2\bullet}E^3_{5_3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_7^3=1/10-1/50c_0,\ e^2_{7_3\bullet}=\begin{pmatrix}-21&0&-3&-1/10&1/50\end{pmatrix},$$
$$E^0_{8_0}E^1_{6_1}E^2_{7_2}E^3_{5_3}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\2025/2&0&100&5&-1\\-127&0&-20&-16/25&3/25\\-21&0&-3&-1/10&1/50\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&-5+c_0&16/25-3/25c_0&1/10-1/50c_0&1\end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 4** (расчет $x^4$). Вычислить элементы уравнения связи:

$$a_1^4+\begin{pmatrix}a^4_{1\,1}&\cdots&a^4_{1\,5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_4&x_0\end{pmatrix}^T=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1^4=-a_1+a_{1\,5}x_5^3+a_{1\,6}x_6^3+a_{1\,7}x_7^3+a_{1\,8}x_8^3,\ \begin{pmatrix}a^4_{1\,1}&\cdots&a^4_{1\,5}\end{pmatrix}=a_{1\bullet}E^0_{8_0}E^1_{6_1}E^2_{7_2}E^3_{5_3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1^4=2/25-1/100c_0,\ \begin{pmatrix}a^4_{1\,1}&\cdots&a^4_{1\,5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-77/4&-1&-1&-2/25&1/100\end{pmatrix}.$$

Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_0=x_0^4+e^4_{0_4\bullet}\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_4\end{pmatrix}^T\Rightarrow x_0^4=-8+c_0,\ e^4_{0_4\bullet}=\begin{pmatrix}1925&100&100&8\end{pmatrix},$$
$$E^4_{0_4}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\\1925&100&100&8\end{pmatrix},$$
$$\min x_0=\min e^4_{0_4\bullet}\begin{pmatrix}x_1&\ldots&x_4\end{pmatrix}^T.$$

Пересчитать элементы уравнений связи:

$$x_5 = x_5^4 + e_{5_4\bullet}^3 \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_5^3 = 3,\, e_{5_4\bullet}^3 = e_{5_3\bullet}^3 E_{0_4}^4 = \begin{pmatrix} -1825/2 & -100 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$x_6 = x_6^4 + e_{6_4\bullet}^1 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_6^4 = -8/25,\, e_{6_4\bullet}^1 = e_{6_3\bullet}^1 E_{0_4}^4 = \begin{pmatrix} 104 & 12 & -8 & 8/25 \end{pmatrix},$$

$$x_7 = x_7^4 + e_{7_4\bullet}^2 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_7^4 = -3/50,\, e_{7_4\bullet}^2 = e_{7_3\bullet}^2 E_{0_4}^4 = \begin{pmatrix} 35/2 & 2 & -1 & 3/50 \end{pmatrix},$$

$$x_8 = x_8^4 + e_{8_4\bullet}^0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_8^4 = 1,\, e_{8_4\bullet}^0 = e_{8_3\bullet}^0 E_{0_4}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Замечание.** $x_6^4 < 0,\, x_7^4 < 0,$ поэтому необходимо продолжить построение $x^4$. Технически это делается так, как показано ниже.

Вычислить номер $q$ ведущего столбца для уравнения связи $x_6 \geq 0$:

$$\Theta_q = \min_j \frac{e_{0_4\, j}^4}{e_{6_4\, j}^1} \left( e_{6_4\, j}^1 > 0,\ j = 1, \ldots, 4 \right) = \frac{e_{0_4\, 2}^4}{e_{6_4\, 2}^1} = \frac{100}{12}.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца для уравнения связи $x_7 \geq 0$:

$$\Theta_q = \min_j \frac{e_{0_4\, j}^4}{e_{7_4\, j}^2} \left( e_{7_4\, j}^2 > 0,\ j = 1, \ldots, 4 \right) = \frac{e_{0_4\, 2}^4}{e_{7_4\, 2}^2} = \frac{100}{2}.$$

Вычислить номер $r$ ведущего уравнения связи:

$$\theta_r = \max_j \left( -x_j^4 \frac{e_{0_4\, 2}^4}{e_{j_4\, 2}^2} \right) \left( j = 6, 7 \right) = -x_7^4 \frac{e_{0_4\, 2}^4}{e_{7_4\, 2}^2} = 3.$$

Пересчитать элементы ведущего уравнения связи:

$$x_2 = x_2^4 + e_{2_4\bullet}^4 \begin{pmatrix} x_1 & x_7 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_2^4 = 3/100,\, e_{2_4\bullet}^4 = \begin{pmatrix} -35/4 & 1/2 & 1/2 & -3/100 \end{pmatrix},$$

$$E_{2_4}^4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -35/4 & 1/2 & 1/2 & -3/100 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Пересчитать элементы уравнений связи:

$$x_5 = 0 + e_{5_5\bullet}^3 \begin{pmatrix} x_1 & x_7 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow e_{5_5\bullet}^3 = e_{5_4\bullet}^3 E_{2_4}^4 = \begin{pmatrix} -75/2 & -50 & -50 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_6 = 1/25 + e_{6_5\bullet}^1 \begin{pmatrix} x_1 & x_7 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow e_{6_5\bullet}^1 = e_{6_4\bullet}^1 E_{2_4}^4 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & -1/25 \end{pmatrix},$$

$$x_8 = 1 + e_{8_5\bullet}^0 \begin{pmatrix} x_1 & x_7 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow e_{8_5\bullet}^0 = e_{8_4\bullet}^0 E_{2_4}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^* = x^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3/100 & 0 & 0 & 0 & 1/25 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad c^T x^* = -16/3.$$

**Замечание.** При использовании методов внутренних точек текущая точка постоянно находится внутри допустимой области с помощью штрафной функции, которая в этом случае называется барьерной. Методы внешних точек, наоборот, генерируют последовательность точек, которые выходят за пределы допустимой области, но в пределе дают допустимое решение. Наконец, в комбинированных методах, которые необходимо использовать при ограничениях-равенствах, в процессе оптимизации одни из ограничений удовлетворяются, а другие — нет. Однако при достижении искомого решения все условия в пределах заданного допуска выполняются.

Прямой мультипликативный алгоритм решения задачи ЛП генерирует последовательность точек $x^k$ по следующему правилу: если $x^k \in D$, то $x^k \Rightarrow x^*$; иначе $x^k \notin D$ и гиперплоскость целевой функции не пересекает $D$. Поэтому в соответствии с терминологией [Фиакко и др., 1972] его можно назвать одним из вариантов метода внешних точек.

Последовательность точек $x^k$ на каждом шаге алгоритма задается стратегией выбора ведущей строки $a_{i\bullet}x = a_i$ или ведущего уравнения связи $x_j \ge 0$. Поэтому в соответствии с терминологией [Гилл и др., 1985] стратегия выбора определяет «лицо» (вариант) прямого мультипликативного метода решения задачи ЛП.

Основной вариант расчета $x^k$ определяется принципом построения прямого мультипликативного метода решения задачи ЛП: для каждой строки $a_{i_\nu\bullet}x = a_{i_\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,\mu)$ построить $x^{k_\nu}$ и выбрать из них $x^k$, которая обеспечивает максимальное приближение к области допустимых значений $D$. Технически это делается так, как показано на шаге 4 примера 1. Следует отметить, что аппроксимация основного варианта генерирует множество вычислительных схем расчета $x^*$.

Возникновение на итерации $k$ ситуации, как на шаге 4 примера 1:

$$x_5 = 0 + \begin{pmatrix} -75/2 & -50 & -50 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_7 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T,$$

означает следующее:

- уравнение связи $x_5 \ge 0$ будет справедливо тогда и только тогда, когда $x_1 = x_3 = x_4 = $ $= x_5 = x_7 = 0$;
- дополнительную возможность уменьшения размерности задачи и числа ненулевых элементов мультипликаторов, полученных на предыдущих шагах; в данной работе предлагается запомнить эти переменные и учитывать их равенство нулю на последующих шагах без выполнения матричных операций уменьшения размерности задачи ЛП.

В [Гаранжа и др., 2009] отмечено, что большие задачи ЛП, как правило, имеют неединственное решение. Поэтому опишем феноменологию прямого мультипликативного метода на примере нахождения всех вершин многогранного множества, являющихся решениями задачи ЛП.

**Пример 2.** Решить задачу (1) с бесконечным количеством решений:

$$c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 0** (инициализация). Положить

$$c^0 = c^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 1** (расчет $x^1$). Вычислить номер $r$ ведущей строки по формуле

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet}x^0 \right| (i = 1,2) = \left| -a_1 + a_{1\bullet}x^0 \right| = |2| = 2.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \min_j \frac{c_j^0}{a_{1\,j}} \left( a_{1\,j} > 0,\ j = 1,\ldots,5 \right) = \frac{c_2^0}{a_{1\,2}} = \frac{1}{1}.$$

Пересчитать элементы уравнения связи $-a_1 + a_{1\bullet}x^0 = 0$:

$$x_2 = x_2^1 + e_{2_1\bullet}^1 \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^1 = 2,\ e_{2_1\bullet}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E^1_{2_1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$c^1 = c^0 E^1_{2_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

**Шаг 2** (расчет $x^2$). Вычислить элементы уравнения связи:

$$a_2^2 + \begin{pmatrix} a_{2\,1}^2 & \cdots & a_{2\,4}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2^2 = -a_2 + a_{2\,2} x_2^1,\ \begin{pmatrix} a_{2\,1}^2 & \cdots & a_{2\,4}^2 \end{pmatrix} = a_{2\bullet} E^1_{2_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2^2 = -4,\ \begin{pmatrix} a_{2\,1}^2 & \cdots & a_{2\,4}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить номер $q$ ведущего столбца по формуле

$$\Theta_q = \min_j \frac{c_j^1}{a_{2\,j}^2} \left( a_{2\,j}^2 > 0,\ j = 1,\ldots,4 \right) = \frac{c_2^1}{a_{2\,2}^2} = \frac{1}{3}.$$

Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_3 = x_3^2 + e^2_{3_2\bullet} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3^2 = 4/3,\ e^2_{3_2\bullet} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$E^2_{3_2} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1/3 & -1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Минимизировать заполнение главной строки мультипликатора:

$$x_2 = x_2^2 + e^1_{2_2\bullet} \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2^2 = x_2^1 + x_3^2 e^2_{3_2\,2},\ e^1_{2_2\bullet} = e^1_{2_1\bullet} E^2_{3_2} \Rightarrow x_2^2 = 2/3,\ e^1_{2_2\bullet} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$E^1_{2_1} E^2_{3_2} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 0 & 1 \\ -1/3 & -1 & -1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$c^2 = c^1 E^2_{3_2} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$x^* = x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,\quad c^T x^* = 10/3.$$

Для построения $x^*$ с другими координатами решим две задачи ЛП:

$$\min\left(c_4x_4 + c_5x_5\right),$$

$$2/3 + x_5 \geq 0,\;\; 4/3 - x_4 - x_5 \geq 0,\;\; x_4 \geq 0,\;\; x_5 \geq 0.$$

Критерий первой: $c_4x_4 + c_5x_5 = -x_4$; критерий второй: $c_4x_4 + c_5x_5 = -x_5$. Подстановкой решения в уравнения связи:

$$x_2 = x_2^2 + e^1_{2_2\bullet}\left(x_1 \quad x_4 \quad x_5\right)^T,\;\; x_2^2 = 2/3,\;\; e^1_{2_2\bullet} = \left(1/3 \quad 0 \quad 1\right),$$

$$x_3 = x_3^2 + e^2_{3_2\bullet}\left(x_1 \quad x_4 \quad x_5\right)^T,\;\; x_3^2 = 4/3,\;\; e^2_{3_2\bullet} = \left(-1/3 \quad -1 \quad -1\right)$$

получим:

$$x^{*_1} = x^* = \left(0 \quad 2/3 \quad 4/3 \quad 0 \quad 0\right)^T,\;\; c^Tx^* = 10/3,$$

$$x^{*_2} = (0 \quad 2/3 \quad 0 \quad 4/3 \quad 0)^T,\;\; c^Tx^* = 10/3,$$

$$x^* = (0 \quad 6/3 \quad 0 \quad 0 \quad 4/3)^T,\;\; c^Tx^* = 10/3.$$

Исследования, проведенные Гаранжой, Евтушенко, Голиковым и Нгуеном [Гаранжа и др., 2009], показали, что многие прикладные задачи могут быть представлены в виде современных задач ЛП (миллионы переменных и сотни тысяч ограничений), для которых не представляет никакого труда найти оптимальное решение. Из вышесказанного следует, что разработка новых подходов для решения таких задач, с привлечением мощных вычислительных ресурсов, не приведет к существенной переоценке ценностей. Поэтому в данной работе основное внимание уделяется построению вычислительной схемы наиболее подходящего варианта прямого мультипликативного алгоритма решения задачи ЛП:

$$\min_{x\in R^n} c^Tx \,\big|\, Ax = a,\;\; c \geq 0,\;\; x \geq 0, \tag{2}$$

которую можно положить в основу задания направления спуска в ньютоновских методах безусловной оптимизации [Свириденко, 2015] путем интеграции одной из предложенных в [Свириденко и др., 2016; Зеленков и др., 2013; Свириденко, 2015; Гилл и др., 1985] техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных.

Такой подход позволяет ослабить или снять дополнительные специфические трудности, обусловленные необходимостью решения больших систем линейных уравнений с разреженной матрицей вторых производных [Черноруцкий, 2011]. Дело заключается в том, что решение систем обычно проводится на основе некоторой процедуры факторизации положительно-определенной матрицы вторых производных. Наиболее часто применяется симметричный вариант гауссова исключения, основанный на факторизации Холесского. При этом нижний треугольный фактор в разложении Холесского может оказаться заполненным, несмотря на разреженность исходной матрицы. Развитые в [Джордж и др., 1984] методы оптимального упорядочения строк и столбцов матрицы линейной системы позволяют достичь определенной экономии памяти и сократить число вновь появляющихся ненулевых элементов. Однако проблема в целом не решается. Кроме того, становятся, по существу, неприемлемыми методы, основанные на модифицированном разложении Холесского, так как в данном случае непосредственно не удается воспользоваться результатами упомянутой работы [Джордж и др., 1984].

Из вышесказанного следует, что если бы удалось построить такую вычислительную схему прямого мультипликативного алгоритма ЛП, которую можно положить в основу задания направления спуска в ньютоновских методах решения задач большой размерности с разреженной матрицей вторых производных, то это, по-видимому, могло бы привести к существенной переоценке ценностей.

Ниже приводится детальное описание всех операций, выполняемых по ходу построения решения задачи (2) прямым мультипликативным алгоритмом с перестановками. Если в процессе вычислений элементы становятся меньше по абсолютной величине так называемого критического значения $\varepsilon_0$, то их предлагается приравнивать нулю.

### *Вычислительная схема прямого мультипликативного алгоритма линейного программирования с перестановками*

**Шаг 0** (инициализация). Положить

$$k=1,\quad x^0=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T,\quad c^0=c^T=\begin{pmatrix}c_1 & \cdots & c_n\end{pmatrix}.$$

**Шаг 1** (расчет элементов $a_k^k$, $a_{k\,j}^k$ уравнения связи). Вычислить номер $r$ ведущей строки:

$$\theta_r=\max_i\left|-a_i+a_{i\bullet}x^{k-1}\right|\left(i=k,\ldots,n\right)$$

и поменять местами элементы $r$-й и $k$-й строк матриц $A$, $a$.
Если $k=1$, то вычислить

$$a_k^k+\begin{pmatrix}a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k^k=-a,\ \begin{pmatrix}a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{k\,k} & \cdots & a_{k\,n}\end{pmatrix}$$

и перейти к шагу 2; иначе вычислить

$$a_k^k+\begin{pmatrix}a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k^k=-a_k+\sum_{j=1}^{k-1}a_{k\,j}x_j^j,\ \begin{pmatrix}a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k\end{pmatrix}=a_{k\bullet}\prod_{i=1}^{k-1}E_{1_i}^i=a_{k\bullet}\begin{pmatrix}e_{1_{k-1}\,k}^1 & \cdots & e_{1_{k-1}\,n}^1\\ & \vdots & \\ e_{1_{k-1}\,k}^{k-1} & \cdots & e_{1_{k-1}\,n}^{k-1}\\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

**Шаг 2** (анализ элементов $a_k^k$, $a_{k\,j}^k$ уравнения связи).

**Замечание.** В процессе анализа элементов уравнения связи будем считать, что $a_k^k\le 0$; иначе $a_k^k$, $a_{k\,j}^k$ достаточно умножить на –1. Анализ необходим для идентификации одной из возможных ситуаций:

- $a_k^k=0,\ a_{k\,j}^k=0\ \left(j=k,\ldots,n\right)$ — исключение $k$-й строки из числа ограничений задачи (3);
- $a_k^k<0,\ a_{k\,j}^k\le 0\ \left(j=k,\ldots,n\right)$ — несовместность ограничений задачи (3);
- $a_k^k=0,\ a_{k\,j}^k\le 0\ \left(j=k,\ldots,n\right)$ — возможность уменьшения размерности задачи (3) и, как следствие, возможность уменьшения числа ненулевых элементов мультипликаторов, полученных на предыдущих шагах.

Интеграция предложенных в [Свириденко и др., 2016; Зеленков и др., 2013; Свириденко, 2015; Гилл и др., 1985] техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных исключает возможность возникновения рассмотренных выше ситуаций. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, анализ элементов уравнения связи можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

**Шаг 3** (расчет главной строки $e^k_{1_k \bullet}$ мультипликатора $E^k_{1_k}$). Вычислить номер $q$ ведущего столбца:

$$\Theta_q = \min_j \left( c_j^{k-1} \big/ a_{r\,j} \right) \left( j = k, ..., n \right).$$

Поменять местами элементы $q$-го и $k$-го столбцов матриц $A, c^0$, перенумеровать и запомнить порядок неизвестных. Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_k = x_k^k + e^k_{1_k \bullet} \begin{pmatrix} x_{k+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x_k^k = -a_k^k \big/ a_{k\,k}^k,\ e^k_{1_k \bullet} = -\begin{pmatrix} a^k_{k\,k+1} & \ldots & a^k_{k\,n} \end{pmatrix} \big/ a^k_{k\,k},$$
$$E^k_{1_k} = \begin{pmatrix} e^1_{1_1\,k+1} & \cdots & e^1_{1_1\,n} \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

**Шаг 4** (расчет элементов $x^k$, $c^k$, $e^i_{1_k \bullet}$). Пересчитать $c^{k-1}$:

$$c^k = \begin{pmatrix} c^k_{k+1} & \cdots & c^k_n \end{pmatrix} = c^{k-1} E^k_{1_k}.$$

Если $k = 1$, то вычислить решение уравнения $a_{k \bullet} x = a_k$:

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

и перейти к шагу 5; иначе вычислить решение системы уравнений $a_{i \bullet} x = a_i \left( i = 1, \ldots, k \right)$:

$$x_i = x_i^k + e^i_{1_k \bullet} \begin{pmatrix} x_{k+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T,\ x_i^k = x_i^i + x_k^k e^i_{1_{k-1}\,k} \quad \left( i = 1, \ldots, k-1 \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x^k = \begin{pmatrix} x_1^k & \cdots & x_k^k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

пересчитать $e^i_{1_{k-1} \bullet}$ (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов):

$$e^i_{1_k \bullet} = e^i_{1_{k-1} \bullet} E^k_{1_k} \left( i = 1, \ldots, k-1 \right).$$

**Шаг 5** (проверка учета строк $a_{i \bullet} x = a_i$). Если $k = m$, то перейти к шагу 6; иначе положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 1.

**Шаг 6** (расчет $x^*$). Если $x^m \geq 0$, то вычислить

$$x^m = \begin{pmatrix} x_1^m & \cdots & x_m^m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^*$$

и остановиться; иначе перейти к шагу 7.

**Шаг 7** (пересчет $x^m$). Пересчитать $x^m$, перенумеровать и запомнить порядок неизвестных, перейти к шагу 6.

**Замечание.** Основной вариант пересчета определяется принципом построения прямого мультипликативного метода решения задачи ЛП: для каждого уравнения связи

$$x_i = x_i^m + e^i_{1_m \bullet} \begin{pmatrix} x_{m+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \left( x_i^m < 0 \right)$$

построить $x^{m_i}$ и выбрать из них $x^m$, которая обеспечивает максимальное приближение к области допустимых значений $D$. Технически это делается так, как показано на шаге 4 примера 1.

Следует отметить, что основной вариант пересчета позволяет избежать больших последовательностей итераций, на которых целевая функция практически не изменяется.

**Замечание.** Исследования, проведенные Бахшияном [Бахшиян и др., 2000], показали, что при решении вырожденных задач ЛП симплекс-методом часто возникают большие последовательности итераций, на которых целевая функция практически не изменяется. Вероятность появления таких вырожденных итераций резко возрастает с увеличением размерности задачи и зачастую делает применение алгоритма симплекс-метода бесполезным. Большинство классических методов теории вырожденного линейного программирования было посвящено лишь борьбе с зацикливанием, избежать вырожденных итераций при использовании таких методов не удавалось. Эти способы сводились либо к специальному выбору выводимого из базиса вектора (лексикографическое правило и правило случайного выбора [Dantzig, 1963]), либо к выбору вводимого в базис вектора (правило Данцига [Dantzig, 1989]), либо к одновременному выбору обоих этих векторов (правило Блэнда [Bland, 1977]). По-видимому, наиболее эффективным методом борьбы с вырожденностью является метод Вольфа, предложенный впервые в [Wolfe, 1963] и модифицированный в [Ryan et al., 1988]. Этот метод требует решения на каждой вырожденной итерации вспомогательной задачи линейного программирования. Ее решение позволяет либо сделать вывод об оптимальности текущего базиса основной задачи, либо заменить в нем сразу несколько векторов, что приводит к уменьшению целевой функции. Таким образом, процесс поиска оптимального решения исходной задачи становится строго монотонным. Однако метод Вольфа имеет два недостатка. Во-первых, размерность вспомогательной задачи совпадает с размерностью исходной. Во-вторых, при решении вспомогательной задачи также могут возникнуть вырожденные итерации. В этом случае в процедуре преодоления вырожденности необходимо применять рекурсию.

## Заключение

Предложен подход к построению численно устойчивых прямых мультипликативных методов ЛП с перестановками, учитывающих разреженность матриц, представленных в упакованном виде, позволяющих ослабить или снять указанные выше недостатки симплекс-метода. Преимущество подхода состоит в возможности минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов, причем изменения в позиции очередной обрабатываемой строки матрицы не вносятся, что позволяет использовать статические форматы хранения данных.

Изучен подход к построению всех вершин многогранного множества, являющихся решениями задачи ЛП.

Полученные результаты являются основой для дальнейших исследований, которые могут быть использованы для построения прямых мультипликативных методов ньютоновского типа следующим образом. Прямые мультипликативные методы ЛП являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ: разреженные матрицы ограничений позволяют получать мультипликаторы, главные строки которых также разрежены, а операция умножения вектора-строки на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора. Поэтому в основу построения прямого мультипликативного алгоритма задания направления спуска в ньютоновских методах безусловной оптимизации предлагается положить модификацию прямого мультипликативного метода ЛП, в основе которой лежит интеграция одной из предложенных в [Свириденко и др., 2016; Зеленков и др., 2013; Свириденко, 2015; Гилл и др., 1985] техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных. Следует отметить, что техника Гилла и Мюррея, как аппроксимация техник, обсуждаемых в [Свириденко и др., 2016; Свириденко, 2015], дает возможность существенно упростить построение вычислительной схемы задания направления спуска, быть может, за счет некоторой потери точности результатов.

## Список литературы (References)


*Антипин А. С.* Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. — М.: ВНИИСИ, 1979.

*Antipin A. S.* Metody nelinejnogo programmirovanija, osnovannye na prjamoj i dvojstvennoj modifikacii funkcii Lagranzha [Methods of nonlinear programming based on direct and dual modifications of the Lagrange function]. — Moscow: VNIISI, 1979 (in Russian).

*Ахметов П. А., Малков У. Х.* Повышение эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода при решении больших задач линейного программирования на ЭВМ // Экономика и математические методы. — 1970. — Т. 6, вып. 3. — С. 422–426.

*Ahmetov P. A., Malkov U. H.* Povyshenie jeffektivnosti mul'tiplikativnogo algoritma simpleks-metoda pri reshenii bol'shih zadach linejnogo programmirovanija na JeVM [Improving the efficiency of the multiplicative algorithm of the simplex method in solving large linear programming problems on a computer] // Economics and mathematical methods. — 1970. — Vol. 6, no. 3. — P. 422–426 (in Russian).

*Бахшиян Б. Ц., Матасов А. И., Федяев К. С.* О решении вырожденных задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 1. — С. 105–117.

*Bahshijan B. C., Matasov A. I., Fedjaev K. S.* O reshenii vyrozhdennyh zadach linejnogo programmirovanija [Regarding the solution of degenerate linear programming problems] // Automation and remote control. — 2000. — No. 1. — P. 105–117 (in Russian).

*Брэгман Л. М., Прыгичев А. Н., Сурин С. С.* Повышение эффективности мультипликативного алгоритма метода последовательного улучшения плана // Исследование операций и статистическое моделирование: Сборник / Ред. И. В. Романовский. — Вып. 4. — Изд-во ЛГУ, 1977. — С. 3–49.

*Brjegman L. M., Prygichev A. N., Surin S. S.* Povyshenie jeffektivnosti mul'tiplikativnogo algoritma metoda posledovatel'nogo uluchshenija plana [Improving the efficiency of the multiplicative algorithm of the method of sequential improvement of the plan] // I. V. Romanovsky, ed., “Operations research and statistical modeling”. — Vol. 4. — Publishing house of Leningrad State University, 1977. — P. 3–49 (in Russian).

*Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А.* Численные методы линейного программирования. — М.: Наука, 1977.

*Bulavskij V. A., Zvjagina R. A., Yakovleva M. A.* Chislennye metody linejnogo programmirovanija [Numerical methods of linear programming]. — Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

*Вальковский В. А., Малышкин В. Э.* Синтез параллельных программ и систем на вычислительных моделях. — Новосибирск: Наука, 1988.

*Val'kovskij V. A., Malyshkin V. E.* Sintez parallel'nyh programm i sistem na vychislitel'nyh modeljah [Synthesis of parallel programs and systems on the computational models]. — Novosibirsk: Nauka, 1988 (in Russian).

*Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.* Линейное программирование. — М.: Факториал, 2003.

*Vasil'ev F. P., Ivanickij A. Yu.* Linejnoe programmirovanie [Linear programming]. — Moscow: Faktorial, 2003 (in Russian).

*Вержбицкий В. М.* Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005.

*Verzhbickij V. M.* Chislennye metody. Linejnaja algebra i nelinejnye uravnenija [Numerical methods. Linear algebra and nonlinear equations]. — Moscow: ONYX 21 century, 2005 (in Russian).

*Вильчевский Н. О.* О выборе коэффициента штрафа в задачах линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 4. — С. 121–126.

*Vil'chevskij N. O.* O vybore kojefficienta shtrafa v zadachah linejnogo programmirovanija [On the choice of the penalty coefficient in the linear programming problems] // Automation and remote control. — 1970. — No. 4. — P. 121–126 (in Russian).

*Вылегжанин О. Н., Шкатова Г. И.* Учет ограничений равенств при решении оптимизационных задач с линейными ограничениями // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312, № 5. — С. 76–78.

*Vylegzhanin O. N., Shkatova G. I.* Uchet ogranichenij ravenstv pri reshenii optimizacionnyh zadach s linejnymi ogranichenijami [The constraints of equations in solving optimization problems with linear constraints] // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. — 2008. — Vol. 312, no. 5. — P. 76–78 (in Russian).

*Гаранжа В. А., Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г., Нгуен М. Х.* Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 8. — С. 1369–1384.

*Garanzha V. A., Golikov A. I., Evtushenko Yu. G., Nguen M. H.* Parallel'naja realizacija metoda N'jutona dlja reshenija bol'shih zadach linejnogo programmirovanija [Parallel implementation of Newton's method for solving large linear programming problems] // Computational mathematics and mathematical physics. — 2009. — Vol. 49, no. 8. — P. 1369–1384 (in Russian).

*Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

*Gale D.* The theory of linear economic models. — Associate professor of mathematics Broun university and consultant to mathematics division of the RAND corporation // McGraw Book Company, 1960. (Russ. Ed.: Gejl D. Teorija linejnyh jekonomicheskih modelej. — Moscow: Izd-vo inostr. lit., 1963.)

*Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.

*Gill Ph. E., Murray W., Wright M. H.* Practical optimization. — System Optimization Laboratory Department of Operations Research Stanford University California, USA // Academic Press, 1981. (Russ. ed.: Gill F., Mjurrej U., Rajt M. Prakticheskaja optimizacija. — Moscow: Mir, 1985.)

*Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. — М.: Сов. радио, 1966.

*Gol'shtejn E. G., Judin D. B.* Novye napravlenija v linejnom programmirovanii [New directions in linear programming]. — Moscow: Sov. radio, 1966 (in Russian).

*Григорьева О. Н., Дмитриева О. А.* Моделирование линейных динамических систем большой размерности с разреженными матрицами коэффициентов // Информатика и компьютерные технологии – 2011. — Донецк: Донецкий национальный технический университет, 2011. — С. 199–203.

*Grigor'eva O. N., Dmitrieva O. A.* Modelirovanie linejnyh dinamicheskih sistem bol'shoj razmernosti s razrezhennymi matricami kojefficientov [Modeling linear dynamical systems of high dimension with sparse matrices of coefficients] // Informatics and computer technologies – 2011. — Donetsk: Donetsk national technical University, 2011. — P. 199–203 (in Russian).

*Данциг Дж. Б.* Линейное программирование, его применения и обобщения. — М.: Прогресс, 1966.

*Dantzig G. B.* Linear programming and extensions. — The Rand Corporation and University of California, Berkeley. — Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963. (Russ. ed.: Dancig Dzh. B. Linejnoe programmirovanie, ego primenenija i obobshhenija. — Moscow: Progress, 1966.)

*Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. — М.: Мир, 1984.

*George A., Liu J. W.-H.* Computer solution of large sparse positive definite systems // Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, Ne Jersey, 1981. (Russ. ed.: Dzhordzh A., Lju Dzh. Chislennoe reshenie bol'shih razrezhennyh sistem uravnenij. — Moscow: Mir, 1984.)

*Дикин И. И.* Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 4. — С. 745–747.

*Dikin I. I.* Iterativnoe reshenie zadach linejnogo i kvadratichnogo programmirovanija [Iterative solution of problems of linear and quadratic programming] // Dokl. AN SSSR. — 1967. — Vol. 174, no. 4. — P. 745–747 (in Russian).

*Дмитриева О. А.* Оптимизация выполнения матрично-векторных операций при параллельном моделировании динамических процессов // Наукові праці ДонНТУ. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. — 2014. — № 1 (26). — С. 94–100.

*Dmitrieva O. A.* Optimizacija vypolnenija matrichno-vektornyh operacij pri parallel'nom modelirovanii dinamicheskih processov [Optimization of performance of matrix and vector operations at parallel simulation of dynamic processes] // Donetsk National Technical University. — 2014. — No. 1 (26). — P. 94–100 (in Russian).

*Евтушенко Ю. Г.* Два численных метода решения задач нелинейного программирования // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 215, № 1. — С. 38–40.

*Evtushenko Yu. G.* Dva chislennyh metoda reshenija zadach nelinejnogo programmirovanija [Two numerical methods of solving non-linear programming problems] // Dokl. AN SSSR. — 1974. — Vol. 215, no. 1. — P. 38–40 (in Russian).

*Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Барьерно-проективные и баръерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). — М.: ВЦ РАН, 1992.

*Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G.* Bar'erno-proektivnye i bar’erno-n'yutonovskie chislennye metody optimizacii (sluchaj linejnogo programmirovanija) [Barrier-projective and barrier-newton numerical optimization methods (linear programming)]. — Moscow: CCRAS, 1992 (in Russian).

*Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1977. — Т. 17, № 4. — С. 890–904.

*Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G.* Relaksacionnyj metod reshenija zadach nelinejnogo programmirovanija [The relaxation method of solving problems of nonlinear programming] // Computational mathematics and mathematical physics. — Vol. 17, no. 4. — P. 890–904 (in Russian).

*Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.* Численные методы решения некоторых задач исследования операций // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1973. — Т. 13, № 3. — С. 583–597.

*Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G.* Chislennye metody reshenija nekotoryh zadach issledovanija operacij [Numerical methods for solving some problems of operations research] // Computational mathematics and mathematical physics. — 1973. — Vol. 13, no. 3. — P. 583–597 (in Russian).

*Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г., Черенков А. П.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1995. — Т. 35, № 6. — С. 850–866.

*Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G., Cherenkov A. P.* Primenenie metoda N'jutona k resheniju zadach linejnogo programmirovanija [Application of the Newton method to solving linear programming problems] // Computational mathematics and mathematical physics. — 1995. — Vol. 35, no. 6. — P. 850–866 (in Russian).

*Еремин И. И., Астафьев Н. Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1976.

*Eremin I. I., Astaf'ev N. N.* Vvedenie v teoriju linejnogo i vypuklogo programmirovanija [Introduction to the theory of linear and convex programming]. — Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).

*Еремин И. И.* Двойственность в линейной оптимизации. — Екатеринбург: УрО РАН, 2001.

*Eremin I. I.* Dvojstvennost' v linejnoj optimizacii [Duality in linear optimization]. — Ekaterinburg: UrO RAN, 2001 (in Russian).

*Еремин И. И.* Противоречивые модели оптимального планирования. — М.: Наука, 1983.

*Eremin I. I.* Protivorechivye modeli optimal'nogo planirovanija [Contradictory models of optimal planning]. — Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).

*Еремин И. И.* Теория линейной оптимизации. — Екатеринбург: УрО РАН, 1998.

*Eremin I. I.* Teorija linejnoj optimizacii [Theory of linear optimization]. — Ekaterinburg: UrO RAN, 2001 (in Russian).

*Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1983.

*Eremin I. I., Mazurov V. D., Astaf'ev N. N.* Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovanija [Improper problems of linear and convex programming]. — Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).

*Зеленков Г. А.*, *Хакимова А. Б.* Подход к разработке алгоритмов ньютоновских методов оптимизации, программная реализация и сравнение эффективности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 367–377.

*Zelenkov G. A., Hakimova A. B.* Podhod k razrabotke algoritmov n'jutonovskih metodov optimizacii, programmnaja realizacija i sravnenie jeffektivnosti [Approach to development of algorithms of Newtonian methods of unconstrained optimization, their software implementation and benchmarking] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 5, no. 3. — P. 367–377 (in Russian).

*Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений. — М.: ИЛ, 1963.

*Zoutendijk G.* Methods of Feasible Directions. A study in linear and non-linear programming // Research mathematician, Koninklijke shell laboratories, Amsterdam. Elselvier Publishing Company, 1960. (Russ. ed.: Zojtendejk G. Metody vozmozhnyh napravlenij. — Moscow: IL, 1963.)

*Канторович Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд. АН СССР, 1959.

*Kantorovich L. V.* Jekonomicheskij raschet nailuchshego ispol'zovanija resursov [Economic calculation of best utilization of resources]. — Moscow: Izd. AN SSSR, 1959 (in Russian).

*Малков У. Х.* Обзор путей повышения эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода // Математические методы решения экономических задач. — 1977. — № 7. — С. 30–51.

*Malkov U. H.* Obzor putej povyshenija jeffektivnosti mul'tiplikativnogo algoritma simpleks-metoda [Overview of ways to improve the efficiency of the multiplicative algorithm of the simplex method] // Mathematical methods of solving economic problems. — 1977. — No. 7. — P. 30–51 (in Russian).

*Муртаф Б.* Современное линейное программирование. — М.: Мир, 1984.

*Murtagh B. A.* Advanced linear programming: computation and practice. — McGraw-Hill International Book Company, New York, 1981. (Russ. ed.: Murtaf B. Sovremennoe linejnoe programmirovanie. — Moscow: Mir, 1984.)

*Отаров А. О., Уразымбетова Э. П., Отаров А. А.* Решение неустойчивых систем линейных алгебраических уравнений методом дифференциального спуска // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. — 2010. — № 3–4. — Ташкент: SAYDANA-PRINT. — С. 7–15.

*Otarov A. O., Urazymbetova E. P., Otarov A. A.* Reshenie neustojchivyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij metodom differencial'nogo spuska [The solution of unstable systems of linear algebraic equations by the method of differential descent] // Bulletin of Karakalpak state University After Berdakh. — 2010. — No. 3–4 (8–9). — Tashkent: SAYDANA-PRINT. — P. 7–15 (in Russian).

*Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М.: Мир, 1983.

*Parlett B. N.* The symmetric eigenvalue problem. — University of California Berkeley, California, 1980. (Russ. ed.: Parlett B. Simmetrichnaja problema sobstvennyh znachenij. Chislennye metody. — Moscow: Mir, 1983.)

*Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 410 с.

*Pissanetzky S.* Sparse matrix technology. — Centro Atamico Bariloche, Bariloche, Argentina. — Academic Press Inc., 1984. (Russ. ed.: Pissanecki S. Tehnologija razrezhennyh matric. — Moscow: Mir, 1988.)

*Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.

*Poljak B. T.* Vvedenie v optimizaciju [Introduction to optimization]. — M.: Nauka, 1983 (in Russian).

*Поляк Б. Т.* Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике // Труды ИСА РАН. — 2006. — Т. 28. — С. 48–66.

*Poljak B. T.* Metod N'jutona i ego rol' v optimizacii i vychislitel'noj matematike [Newton's method and its role in optimization and computational mathematics] // Proceedings of ISA RAS. — 2006. — Vol. 28. — P. 48–66 (in Russian).

*Разумихин Б. С.* О двух методах условной оптимизации II. Метод годографа для задач линейного программирования // Модели и методы оптимизации. Тр. ВНИИСИ. — № 3. — М.: ВНИИСИ, 1980. — С. 37–53.

*Razumihin B. S.* O dvuh metodah uslovnoj optimizacii II. Metod godografa dlja zadach linejnogo programmirovanija [Two methods of constrained optimization II. Hodograph method for linear programming problems] // Models and methods of optimization. Tr. VNIISI. — No. 3. — Moscow: VNIISI, 1980. — P. 37–53 (in Russian).

*Разумихин Б. С.* Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. — М.: Наука, 1975.

*Razumihin B. S.* Fizicheskie modeli i metody teorii ravnovesija v programmirovanii i jekonomike [Physical models and methods of equilibrium theory in programming and Economics]. — Moscow: Nauka, 1975 (in Russian).

*Рапопорт Л. Б.* Модифицированный метод годографа для задач линейного программирования // Модели и методы оптимизации. Тр. ВНИИСИ. — 1980. — № 3. — М.: ВНИИСИ, 1980. — С. 82–93.

*Rapoport L. B.* Modificirovannyj metod godografa dlja zadach linejnogo programmirovanija [Modified hodograph method for linear programming problems] // Models and methods of optimization. Tr. VNIISI. — 1980. — No. 3. — Moscow: VNIISI, 1980. — P. 82–93 (in Russian).

*Романовский И. В., Сурин С. С.* Триангуляция базисной матрицы и мультипликативный алгоритм решения задач линейного программирования // Оптимальное планирование. — Вып. 12. — Новосибирск: Изд. ИМ СО АН СССР, 1969. — С. 48–51.

*Romanovskij I. V., Surin S. S.* Trianguljacija bazisnoj matricy i mul'tiplikativnyj algoritm reshenija zadach linejnogo programmirovanija [Triangulation of the base matrix, and the multiplicative algorithm for solving linear programming problems] // Optimal planning. — Vol. 12. — Novosibirsk: Izd. THEM WITH of the USSR, 1969. — P. 48–51 (in Russian).

*Свириденко А. Б.* Априорная поправка в ньютоновских методах оптимизации // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 835–863.

*Sviridenko A. B.* Apriornaja popravka v n'jutonovskih metodah optimizacii [The correction to Newton's methods of optimization] // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, no. 4. — P. 835–863 (in Russian).

*Свириденко А. Б., Зеленков Г. А.* Взаимосвязь и реализация квазиньютоновских и ньютоновских методов безусловной оптимизации // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, №. 1. — С. 55–78.

*Sviridenko A. B., Zelenkov G. A.* Vzaimosvjaz' i realizacija kvazin'jutonovskih i n'jutonovskih metodov bezuslovnoj optimizacii [Correlation and realization of quasi-Newton methods of absolute optimization] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, no. 1. — P. 55–78 (in Russian).

*Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980.

*Strang G.* Linear algebra and its applications / Massachusetts Institute of Technology. — Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976. (Russ. ed.: Streng G. Linejnaja algebra i ee primenenija. — M.: Mir, 1980.)

*Схрейвер А*. Теория линейного и целочисленного программирования. — М.: Мир, 1991.

*Schrijver A.* Theory of linear and integer programming // Department of Econometrics, Tilburg University and Centrum voor Wickunde en Informatica, Amsterdam. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & sons, 1990. (Russ. ed.: Shrejver A. Teorija linejnogo i celochislennogo programmirovanija. — Moscow: Mir, 1991.)

*Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М.: Мир, 1972.

*Fiacco A. V., McCormick G. P.* Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques // Research analysis corporation McLean, Virginia. John Wiley and cons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1968. (Russ ed.: Fiakko A., Mak-Kormik G. Nelinejnoe programmirovanie. Metody posledovatel'noj bezuslovnoj minimizacii. — Moscow: Mir, 1972.)

*Хакимова А. Б., Зеленков Г. А., Рзун И. Г.* Подход к увеличению эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода // Труды ИСА РАН «Динамика неоднородных систем». — Выпуск 14. — Т. 53 (2). — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — С. 245–251.

*Khakimova A. B., Zelenkov G. A., Rzun I. G.* Podhod k uvelicheniju jeffektivnosti mul'tiplikativnogo algoritma simpleks-metoda [Approach to increase the efficiency of the multiplicative algorithm of the simplex method] // The works of ISA Russian Academy of Sciences “Dynamics of heterogeneous systems”. — 2010. — Issue 14, Vol. 53 (2). — P. 245–251 (in Russian).

*Цыганков А. А.* Новые условия экстремума для гладких задач с ограничениями в форме равенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 10. — С. 1474–1484.

*Cygankov A. A.* Novye uslovija jekstremuma dlja gladkih zadach s ogranichenijami v forme ravenstv [New extremum conditions for smooth problems with constraints in form of equalities] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 41, no. 10. — P. 1474–1484 (in Russian).

*Черников С. Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.

*Chernikov S. N.* Linejnye neravenstva [Linear inequalities]. — Moscow: Nauka, 1968 (in Russian).

*Черноруцкий И. Г.* Методы оптимизации [Электронный ресурс]: Учебное пособие / И. Г. Черноруцкий. Санкт-Петербургский государственный политехнический университет. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 908 Кб). — СПб., 2012. — Загл. с титул. экрана. — Доступ из сети Интернет, чтение. — Текстовый документ. — Adobe Acrobat Reader 6.0. — URL: http://elib.spbstu.ru/dl/2357.pdf

*Chernoruckij I. G.* Metody optimizacii [Methods of optimization] // Saint Petersburg state Polytechnical University. (Electronic resource). — SPb., 2012. — Adobe Acrobat Reader 6.0. — URL: http://elib.spbstu.ru/dl/2357.pdf (in Russian).

*Черноруцкий И. Г.* Методы оптимизации. Компьютерные технологии. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 384 с.

*Chernoruckij I. G.* Metody optimizacii. Komp'juternye tehnologii [Methods of optimization. Computer technology]. — St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. — 384 p. (in Russian).

*Черноруцкий И. Г.* Практическая оптимизация и невыпуклые задачи // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — № 4 (176). — СПб.: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2013. — С. 79–86.

*Chernoruckij I. G.* Prakticheskaja optimizacija i nevypuklye zadachi [Practical optimization and nonconvex problems] // Nauchno-tekhnicheskie Vedomosti SPbGPU. Informatics. Telecommunications. Management. — No. 4 (176). — St. Petersburg: Federal state Autonomous educational institution of higher professional education “Saint-Petersburg Polytechnic University Peter the Great”, 2013. — P. 79–86 (in Russian).

*Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю.* Линейное и целочисленное программирование: Учебное пособие. — Нижний Новгород: Изд. Нижегородского Государственного Университета, 2002.

*Shevchenko V. N., Zolotyh N. Yu.* Linejnoe i celochislennoe programmirovanie [Linear and integer programming]: Textbook. — Nizhny Novgorod: Ed. Nizhny Novgorod State University, 2002 (in Russian).

*Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование: теория, методы и приложения. — М.: Наука, 1969.

*Yudin D. B., Gol'shtejn E. G.* Linejnoe programmirovanie: teorija, metody i prilozhenija [Linear programming: theory, methods and applications]. — Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).

*Ядыкин А. Б.* О параметризации в вырожденных задачах квадратичного программирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1977. — № 3. — С. 634–648.
*Yadykin A. B.* O parametrizacii v vyrozhdennyh zadachah kvadratichnogo programmirovanija [On the parametrization in degenerate quadratic programming problems] // Computational mathematics and mathematical physics. — 1977. — No. 3. — P. 634–648 (in Russian).

*Bland R. G.* New finite pivot rules for simplex method // Math. Oper. Res. — 1977. — Vol. 2. — P. 103–107.

*Dantzig G. B*. Linear programming and extensions. — N. J.: Princeton U. P., 1963.

*Dantzig G. B.* Making progress during a stall in the simplex algorithm // Linear Algebra and its Applications. — 1989. — Vol. 114/115. — P. 251–259.

*Dantzig G. B., Orchard-Hays W*. The product form for the inverse in simplex method // Math. Tables Aids Cornput. — 1954. — Vol. 8. — P. 64–67.

*Evtushenko Yu. G., Zhadan V. G*. Space-transformation technique: the state of the art // Nonlinear Optimization and Applications (Edited by G. DI Pillo, F. Giannessi). — Kluwer Acad. Publis. — 1996. — P. 101–123.

*Forrest J. J. H., Tomlin J. A*. Updating triangular factors of the basis to maintain sparsity in the product form simplex method. — Math. Program. — 1972. — 2:263–278.

*Kanzow C., Qi H., Qi L*. On the Minimum Norm Solution of Linear Programs // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2003. — Vol. 116. — P. 333–345.

*Karmarcar N.* A new polinomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. — 1984. — No. 4. — P. 373–395.

*Malyshkin V.* Fragmented Programming of Library Parallel Numerical Subroitines // Proceedings of the 7-th Int. conference on New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques, IOS Press. — 28–30 September, 2007, Dubai. — Vol. 193. — P. 425–430.

*Mangasarian O. L*. Least-norm linear programming solution as an unconstrained minimization problem // J. Math. Analysis and Applic. — 1983. — Vol. 92. — P. 240–251.

*Mangasarian O. L., Meyer R. R*. Nonlinear perturbation of linear programs // SIAM J. Control and Optimizat. — 1979. — Vol. 17, no. 6. — P. 745–752.

*Mangasarian O. L*. A Newton Method for Linear Programming // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2004. — Vol. 121. — P. 1–18.

*Mangasarian O. L*. Nonlinear programming. — Philadelphia: SIAM, 1994.

*Mangasarian O. L*. Normal solutions of linear programs // Math. Program. Study. — 1984. — Vol. 22. — P. 206–216.

*Mészáros Cs*. The BPMPD interior point solver for convex quadratic programming problems // Optimizat. Meth. and Software. — 1999. — Vol. 11, no. 1–4. — P. 431–449.

*Ryan D. M., Osborne M. R.* On the solution of highly degenerate linear programmes // Mathematical Programming. — 1988. — Vol. 41. — P. 385–392.

*Optimization Methods & Software*. — 1999. — Vol. 11, no. 1–4. — P. 1–690.

*Wolfe P.* A technique for resolving degeneracy in linear programming // J. Soc. Indust. and Appl. Math. — 1963. — Vol. 11. — P. 205–211.