

УДК: 532.51

## Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана

А. В. Горшков<sup>1,2,a</sup>, Е. Ю. Просвиряков<sup>1,3,b</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения УрО РАН,  
Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет,  
Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19

<sup>3</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ,  
Россия, 420110, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 10

E-mail: <sup>a</sup> alex55gor@mail.ru, <sup>b</sup> evgen\_pros@mail.ru

*Получено 30.08.2015, после доработки — 08.11.2016.*

*Принято к публикации 09.11.2016.*

В работе осуществлено математическое моделирование нестационарной слоистой конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости. Движение жидкости происходит в бесконечно протяженном слое. Система Обербека–Буссинеска, описывающая слоистую конвекцию Бенара–Марангони, является переопределенной, поскольку вертикальная скорость тождественно равна нулю. Для вычисления двух компонент вектора скорости, температуры и давления имеется система пяти уравнений (три уравнения сохранения импульсов, уравнение несжимаемости и уравнение теплопроводности). Для разрешимости системы Обербека–Буссинеска предложен класс точных решений. Структура предложенного решения такова, что уравнение несжимаемости удовлетворяется тождественно. Таким образом, удается устранить «лишнее» уравнение. Основное внимание уделено исследованию теплообмена на свободной границе слоя, которая считается недеформируемой. При описании термокапиллярного конвективного движения теплообмен задавался согласно закону Ньютона–Рихмана. Использование такого закона распространения тепла приводит к начально-краевой задаче третьего рода. Показано, что переопределенная начально-краевая задача в рамках представленного в статье класса точных решений уравнений Обербека–Буссинеска сводится к проблеме Штурма–Лиувилля. Следовательно, гидродинамические поля выражаются через тригонометрические функции (базис Фурье). Для определения собственных чисел задачи получено трансцендентное уравнение, которое решалось численно. Проведен численный анализ решений системы эволюционных и градиентных уравнений, описывающих течение жидкости. На основании вычислительного эксперимента проведен анализ гидродинамических полей. При исследовании краевой задачи было показано существование противотечений в слое жидкости. Существование противотечений эквивалентно наличию застойных точек в жидкости, что говорит о существовании локального экстремума кинетической энергии жидкости. Установлено, что у каждой компоненты скорости может быть не более одного нулевого значения. Таким образом, поток жидкости расслаивается на две зоны. В этих зонах касательные напряжения разного знака. Причем существует толщина слоя жидкости, при которой на нижней границе слоя жидкости касательные напряжения равны нулю. Данный физический эффект возможен только для классических ньютоновских жидкостей. Для поля температуры и давления справедливы те же свойства, что и для скоростей. Отметим, что в данном случае все нестационарные решения выходят на установившийся режим.

Ключевые слова: конвекция Бенара–Марангони, аналитическое решение, нестационарная задача

UDC: 532.51

## Layered Bénard–Marangoni convection during heat transfer according to the Newton’s law of cooling

A. V. Gorshkov<sup>1,2,a</sup>, E. Yu. Prosviryakov<sup>1,3,b</sup>

<sup>1</sup>Institute of Engineering Science,  
34 Komsomolskay st., Ekaterinburg, 620049, Russia

<sup>2</sup>Ural Federal University,

19 Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russia

<sup>3</sup>Kazansky national research technological university – KAI,  
10 Karl Marx st., Kazan, 420110, Russia

E-mail: <sup>a</sup> alex55gor@mail.ru, <sup>b</sup> evgen\_pros@mail.ru

*Received 30.08.2015, after completion – 08.11.2016.*

*Accepted for publication 09.11.2016.*

The paper considers mathematical modeling of layered Benard–Marangoni convection of a viscous incompressible fluid. The fluid moves in an infinitely extended layer. The Oberbeck–Boussinesq system describing layered Benard–Marangoni convection is overdetermined, since the vertical velocity is zero identically. We have a system of five equations to calculate two components of the velocity vector, temperature and pressure (three equations of impulse conservation, the incompressibility equation and the heat equation). A class of exact solutions is proposed for the solvability of the Oberbeck–Boussinesq system. The structure of the proposed solution is such that the incompressibility equation is satisfied identically. Thus, it is possible to eliminate the «extra» equation. The emphasis is on the study of heat exchange on the free layer boundary, which is considered rigid. In the description of thermocapillary convective motion, heat exchange is set according to the Newton’s law of cooling. The application of this heat distribution law leads to the third-kind initial-boundary value problem. It is shown that within the presented class of exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations the overdetermined initial-boundary value problem is reduced to the Sturm–Liouville problem. Consequently, the hydrodynamic fields are expressed using trigonometric functions (the Fourier basis). A transcendental equation is obtained to determine the eigenvalues of the problem. This equation is solved numerically. The numerical analysis of the solutions of the system of evolutionary and gradient equations describing fluid flow is executed. Hydrodynamic fields are analyzed by a computational experiment. The existence of counterflows in the fluid layer is shown in the study of the boundary value problem. The existence of counterflows is equivalent to the presence of stagnation points in the fluid, and this testifies to the existence of a local extremum of the kinetic energy of the fluid. It has been established that each velocity component cannot have more than one zero value. Thus, the fluid flow is separated into two zones. The tangential stresses have different signs in these zones. Moreover, there is a fluid layer thickness at which the tangential stresses at the liquid layer equal to zero on the lower boundary. This physical effect is possible only for Newtonian fluids. The temperature and pressure fields have the same properties as velocities. All the nonstationary solutions approach the steady state in this case.

Keywords: convection of Benard–Maragoni, analytical solutions, nonstationary problem

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940 (Russian).

## Введение

Изучение конвективных течений вязкой несжимаемой жидкости является одной из наиболее распространенных задач в самых разных теоретических и прикладных научных дисциплинах. В последние десятилетия интерес к исследованию решений, описывающих естественную конвекцию, непрерывно возрастает. Это связано с тем, что конвекция является первым примером самоорганизации динамических систем, наблюдаемых экспериментально [Thomson, 1855]. Первая именная структура самоорганизации также относится к конвекции — ячейки Бенара, представляющие собой шестиугольные призмы с подъемом жидкости в центре [Bénard, 1900; Bénard, 1901; Bénard, 1902]. Уже в первых гидродинамических опытах Бенаром было высказано предположение о том, что важную роль в возникновении конвекции играет не только сила тяжести, а также и термокапиллярный эффект Марангони [Landa, 2010]. Отметим, что эффект Марангони не только вносит ясность в причины генерации термокапиллярной конвекции, но и объясняет механизмы возникновения концентрационной конвекции и биоконвекции [Marangoni, 1865; Гершуни, Жуховицкий, 1972; Landa, 2010].

При моделировании указанных выше процессов движения жидкости очень важно иметь определенный запас точных решений, потому что полное интегрирование уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска (система Обербека–Буссинеска) является до сих пор нерешенной задачей (шестая проблема тысячелетия). Первое точное конвективное решение изложено в работе [Остроумов, 1952]. Точное решение, описывающее термокапиллярные движения вязкой несжимаемой жидкости, было впервые предложено Бирихом [Бирих, 1966]. Любопытно, что решение Бириха [Бирих, 1966] неоднократно переоткрывалось [Smith, Davis, 1983; Ortiz-Pérez, Dávalos-Orozco, 2011], причем в [Smith, Davis, 1983; Ortiz-Pérez, Dávalos-Orozco, 2011] не содержится библиографической ссылки на пионерскую работу Бириха. Наиболее полный список точных конвективных движений можно изучить по работам [Гершуни, Жуховицкий, 1972; Napolitano, 1980; Сидоров, 1981; Сидоров, 1989; Кирдяшкин, 1989; Goncharova, Kabov, 2009; Андреев, 2010; Ингель, 2012; Аристов, Шварц, 2006; Аристов, Шварц, 2011] и библиографическим спискам к ним.

К точным решениям относят: решения, представленные в виде элементарных функций и квадратур; решения, при которых исходная система уравнений в частных производных может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных уравнений с частными производными, линейных интегральных уравнений (как правило, можно свести к одному уравнению указанного типа) [Аристов, Князев, Полянин, 2009; Полянин, Аристов, 2011]. Таким образом, решения уравнений Обербека–Буссинеска, полученные благодаря использованию численных методов, можно трактовать в качестве точных [Аристов, Князев, Полянин, 2009; Полянин, Аристов, 2011].

В данной работе предложено новое точное решение, описывающее нестационарную термокапиллярную конвекцию при реализации на границах слоя жидкости теплообмена по закону Ньютона–Рихмана. Исследование таких движений чрезвычайно важно для практических задач. Даже при проведении лабораторных исследований всегда трудно достичь теплоизолированной границы для замкнутых сосудов, а для термокапиллярных течений невозможно потому, что тангенциальные силы любой природы возникают на свободной границе слоя жидкости, на которой всегда происходят процессы тепломассообмена.

Характерной особенностью полученного здесь решения является одномерность скоростей по координатам, а поля температуры и давления трехмерны по координатам. Выбранные условия соответствуют экспериментальным исследованиям по гидродинамике [Гершуни, Жуховицкий, 1972; Napolitano, 1980; Сидоров, 1981; Сидоров, 1989; Кирдяшкин, 1989; Goncharova, Kabov, 2009; Андреев, 2010]. При устойчивом движении неизотермической жидкости одномерность

скоростей практически достигается в прямоугольном слое, что не наблюдается для температуры и давления даже в самых простых случаях.

## Постановка задачи

Рассматривается конвективное движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое, ограниченном снизу недеформируемой поверхностью  $z = 0$ , а верхняя граница является свободной. Общая система уравнений Обербека–Буссинеска, описывающая конвекцию диссипативной несжимаемой жидкости [Ландау, 2006], записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z + g\beta T, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $V_x(t, x, y, z)$ ,  $V_y(t, x, y, z)$ ,  $V_z(t, x, y, z)$  — компоненты вектора скорости жидкости;  $T$  — отклонение температуры от равновесного значения;  $P$  — давление, деленное на постоянную среднюю плотность жидкости  $\rho_0$ ;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности;  $\nu$  — коэффициент кинематической; (молекулярной) вязкости жидкости;  $\beta$  — коэффициент объемного расширения жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа (лапласиан).

Краевые условия на нижней поверхности для скоростей на нижней границе, в силу прилипания жидкости, имеют вид

$$V_x(t, x, y, 0) = 0, \quad V_y(t, x, y, 0) = 0, \quad V_z(t, x, y, 0) = 0.$$

Считаем, что температура жидкости на плоскости  $z = 0$  является однородной и постоянной. За отсчетное значение примем нуль:

$$T(t, x, y, 0) = 0. \quad (2)$$

На свободной поверхности  $z = h$  заданы условия теплопередачи по Ньютону–Рихману:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{z=h} = \vartheta (T^c(x, y, z) - T(t, x, y, h)), \quad (3)$$

где  $T^c(x, y, z) = Ax + By$  — температура внешней среды,  $A$  и  $B$  — постоянные горизонтальные (продольные) градиенты,  $\vartheta$  — параметр, характеризующий отношение коэффициента теплообмена  $\alpha$  к коэффициенту теплопроводности  $\lambda$ . Поверхностное натяжение при выполнении условия плоской (недеформируемой) свободной границы [Гершуни, Жуховицкий, 1972] описывается формулами

$$\eta \left. \frac{\partial V_x}{\partial n} \right|_{z=h} = \sigma \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{z=h}, \quad \eta \left. \frac{\partial V_y}{\partial n} \right|_{z=h} = \sigma \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{z=h}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\eta$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения и коэффициент динамической вязкости соответственно.

На верхней границе давление, нормированное на среднюю плотность жидкости  $\rho_0$ , равно

$$P(t, x, y, h) = S.$$

Начальные значения для скоростей и температуры примем равными отсчетному значению, совпадающему с их величиной на нижней границе:

$$V_x(0, x, y, z) = 0, \quad V_y(0, x, y, z) = 0, \quad V_z(0, x, y, z) = 0, \quad T(0, x, y, z) = 0. \quad (5)$$

Перейдем к изучению слоистого движения вязкой несжимаемой жидкости. В этом случае течение жидкости является плоскопараллельным [Полянин, Аристов, 2011], то есть вертикальная компонента вектора скорости принимает нулевое значение. При изучении слоистых течений топология гидродинамических полей определяется поперечной координатой  $z$ , поэтому, следуя статьям [Сидоров, 1989; Аристов, Шварц, 2006; Аристов, Просвирыков, 2013], точное решение системы (1) будем вычислять в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_x &= U(t, z), \quad V_y = V(t, z), \quad V_z = 0, \\ T &= T_0(t, z) + xT_1(t, z) + yT_2(t, z), \\ P &= P_0(t, z) + xP_1(t, z) + yP_2(t, z). \end{aligned} \quad (6)$$

Структура гидродинамических полей (6) такова, что скорости являются одномерными по координатам, а температура и давление — трехмерными.

Подставив выражения (6) в систему Обербека–Буссинеска (1), получим, применяя метод неопределенных коэффициентов, следующую систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -P_1 + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -P_2 + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + UT_1 + VT_2 = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0. \quad (11)$$

Система (7)–(11) состоит из нескольких уравнений типа теплопроводности. Подсистема (7) состоит из однородных уравнений, а подсистемы (9) и (10) — из неоднородных. Очевидно, что уравнение неразрывности, входящее в систему (1), выполняется тождественно, поскольку скорости  $V_x$  и  $V_y$  не зависят от горизонтальных координат  $x$  и  $y$ , что позволяет устранить «лишнее» уравнение в (1).

## Построение нестационарного решения

Систему (7)–(10) можно разделить на три подсистемы с соответствующими краевыми условиями. Граничные условия (2), (3) в силу класса (6), преобразуются в следующие: для подсистемы (7),

$$T_1(t, 0) = 0, \quad T_2(t, 0) = 0, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{\partial T_1}{\partial z} - \vartheta(A - T_1) \right]_{z=h} = 0, \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial T_2}{\partial z} - \vartheta(B - T_2) \right]_{z=h} = 0; \quad (14)$$

для подсистемы (8), (9)

$$\eta \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=h} = \sigma T_1(t, h), \quad (15)$$

$$\eta \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=h} = \sigma T_2(t, h), \quad (16)$$

$$U(t, 0) = 0, \quad V(t, 0) = 0; \quad (17)$$

$$P_0(t, h) = S, \quad P_1(t, h) = 0, \quad P_2(t, h) = 0; \quad (18)$$

для подсистемы (10), (11)

$$T_0(t, 0) = 0, \quad T_0(t, h) = 0. \quad (19)$$

Начальные условия (5) записываются так:

$$T_0(0, z) = 0, \quad T_1(0, z) = 0, \quad T_2(0, z) = 0, \quad (20)$$

$$U(0, z) = 0, \quad V(0, z) = 0. \quad (21)$$

Решения приведенных ранее подсистем будем вычислять методом разделения переменных Фурье. Краевые условия (13) неоднородные. С помощью замены

$$T_1(t, z) = \frac{A\vartheta z}{1 + \vartheta h} + u(t, z)$$

сводим решение подсистемы (7) к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (22)$$

с однородными краевыми условиями

$$u(t, 0) = 0, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} + \vartheta u(t, h) = 0 \quad (24)$$

и неоднородными начальными возмущениями поля температуры

$$u(0, z) = -\frac{A\vartheta z}{1 + \vartheta h}.$$

Согласно методу разделения переменных представим решение уравнения (22) в мультипликативном виде:

$$u_k(t, z) = u_k^t(t) \varphi_{1k}(z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Исходная начально-краевая задача сводится к проблеме Штурма–Лиувилля для уравнения

$$\frac{d^2 \varphi_{1k}}{dz^2} + \omega_{1k}^2 \varphi_{1k} = 0$$

с краевыми условиями

$$\varphi_{1k}(0) = 0, \quad (25)$$

$$\left. \frac{d\varphi_{1k}}{dz} \right|_{z=h} = -\vartheta\varphi_{1k}(h), \quad (26)$$

которые следуют из краевых условий (23), (24). Здесь и далее  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\omega_{1k}$ ,  $\varphi_{1k}$  — собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля соответственно. Отсюда получим

$$u_k^t(t) = e^{-\chi\omega_{1k}^2 t}, \quad \varphi_{1k}(z) = C_1 \sin(\omega_{1k}z) + C_2 \cos(\omega_{1k}z),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий (25), (26). Из краевого условия (25) следует, что  $C_2 = 0$ , а из равенства (26) получим уравнение для определения собственных чисел:

$$\omega_{1k} \cos(\omega_{1k}h) + \vartheta \sin(\omega_{1k}h) = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) трансцендентное, имеет счетное число корней.

Вспомогательная функция  $u(t, z)$  примет вид

$$u(t, z) = -\frac{A\vartheta}{1+h\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\chi\omega_{1n}^2 t} \sin(\omega_{1n}z).$$

Здесь  $\omega_{1n}$  — корни уравнения (27), коэффициенты  $\alpha_n$  — разложение линейной функции  $z$  в ряд Фурье по ортогональной системе функций  $\sin(\omega_{1n}z)$  на интервале  $(0, h)$ . Таким образом, получим решение уравнения (7)

$$T_1(t, z) = \frac{A\vartheta}{1+h\vartheta} \left( T_1^0 - \sum_{n=1}^{\infty} T_1^n(t) \sin(\omega_{1n}z) \right), \quad (28)$$

где  $T_1^0 = z$  — стационарное решение, а функции  $T_1^k(t) = \alpha_k e^{-\chi\omega_{1k}^2 t}$  описывают переходный процесс. Решение, описывающее горизонтальный градиент температуры  $T_2(t, z)$ , вычисляется аналогично, с учетом граничных условий (14):

$$T_2(t, z) = \frac{B\vartheta}{1+h\vartheta} \left( z + \sum_{n=1}^{\infty} T_1^n(t) \sin(\omega_{1n}z) \right).$$

На основе (8), (11), с учетом начальных условий (18), находим компоненты давления  $P_1(t, z)$  и  $P_2(t, z)$ :

$$P_1(t, z) = \frac{A\vartheta\beta g}{1+\vartheta h} \left[ P_1^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1^n(t)}{\omega_{1n}} (\cos(\omega_{1n}h) - \cos(\omega_{1n}z)) \right],$$

$$P_2(t, z) = \frac{B\vartheta\beta g}{1+\vartheta h} \left[ P_1^0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_1^n(t)}{\omega_{1n}} (\cos(\omega_{1n}h) - \cos(\omega_{1n}z)) \right].$$

Здесь  $P_1^0 = \frac{z^2 - h^2}{2}$  — стационарное решение.

Перейдем к интегрированию уравнений подсистемы (9), которая имеет неоднородные краевые (17), (15) и однородные начальные условия (21). Производя замену

$$U(t, z) = U_1(t, z) + \frac{\sigma}{\eta} T_1(t, z) z,$$

первое уравнение подсистемы (8) сводим к уравнению

$$\frac{\partial U_1(t, z)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U_1(t, z)}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{\eta} \frac{A\vartheta\chi}{1 + \vartheta h} z \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m}^2 \alpha_m e^{-\chi\omega_{1m}^2 t} \sin(\omega_{1m}h) - \frac{A\vartheta\beta g}{1 + \vartheta h} \left[ \frac{z^2 - h^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi\omega_{1n}^2 t} \frac{\alpha_n}{\omega_{1n}} (\cos(\omega_{1n}h) - \cos(\omega_{1n}z)) \right] \quad (29)$$

с однородными краевыми условиями

$$U_1(t, 0) = 0, \quad \left[ \frac{dU_1(t, z)}{dz} \right]_{z=h} = 0 \quad (30)$$

и начальным условием

$$U_1(0, z) = 0.$$

Собственные числа задачи (29) и (30) определяются на основе краевых условий (30) и равны

$$\omega_{2k} = \frac{\pi}{h} \left( k - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(2k-1)}{2h}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а собственные функции имеют вид

$$\varphi_{2k}(z) = \sin(\omega_{2k}z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В решении неоднородного уравнения (29) выделим стационарное решение

$$U^0(z) = \frac{g\beta}{\nu} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3} \right) + \frac{\sigma h z}{\eta}.$$

Заметим, что при идеальном тепловом контакте ( $\vartheta \rightarrow \infty$ ) это решение описывает термокапиллярную конвекцию, рассмотренную в [Аристов, Просвиряков, 2013].

Нестационарное решение (9), как и для системы (7), ищем в виде суммы стационарного решения и ряда по собственным функциям:

$$U(t, z) = \frac{A\vartheta}{1 + h\vartheta} \left[ U^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-U_1^k(t) + U_2^k(t)) \sin(\omega_{2k}z) - zU_3(t) \right], \quad (31)$$

где

$$U_1^k(t) = \frac{g\beta}{\nu} \gamma_{1k} e^{-\nu\omega_{2k}^2 t},$$

$$U_2^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left( \beta g \frac{\gamma_{3nk}}{\omega_{1n}} + \frac{\sigma\chi}{\eta} \omega_{1n}^2 \gamma_{2k} \sin(\omega_{1n}h) \right) \frac{e^{-\chi\omega_{1n}^2 t} - e^{-\nu\omega_{2k}^2 t}}{\nu\omega_{2k}^2 - \chi\omega_{1n}^2},$$

$$U_3(t) = \frac{\sigma}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\chi\omega_{1n}^2 t} \sin(\omega_{1n}h).$$

Здесь  $\gamma_{1m}, \gamma_{2m}, \gamma_{3nm}$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье по системе  $\sin(\omega_{2m}z)$  многочлена  $\frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3}$ , линейной функции  $z$  и функции  $\cos(\omega_{1n}z) - \cos(\omega_{1n}h)$  соответственно.

Решение подсистемы (9) для скорости  $V(t, z)$  при краевых условиях (16) имеет аналогичный вид:

$$V(t, z) = \frac{B\vartheta}{1 + h\vartheta} \left[ U^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-U_1^k(t) + U_2^k(t)) \sin(\omega_{2k}z) - zU_3(t) \right].$$

Из приведенного выражения видно (31), что решение для скорости состоит из трех групп слагаемых, меняющихся с существенно различными скоростями. Первое слагаемое связано с силами трения. Характерное время довольно велико. Процессы устанавливаются медленно. Скорость изменения второго слагаемого, так же как и первого, определяется трением. Третье слагаемое скорости определяется процессами теплопроводности, установление этих слагаемых происходит за малое время.

Численно решать задачу такого типа довольно сложно. Нужно выбирать шаг по времени достаточно малым, чтобы обеспечить приемлемую точность. Но при больших  $t$  это приведет к большому времени счета и накоплению погрешности. При большем шаге произойдет потеря точности, особенно на начальном этапе. При аналитическом представлении решения эти проблемы отпадают. Можно оценить время влияния слагаемых теплопроводности и начало наиболее существенного влияния трения.

После подстановок вычисленных ранее решений уравнение третьей подсистемы (10) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} = & \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} - \frac{(A^2 + B^2) \vartheta^2}{(1 + h\vartheta)^2} \left( z - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\chi \omega_{1n}^2 t} \sin \omega_{1n} z \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{g\beta}{\nu} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{h^3 z}{3} \right) + \frac{\sigma h z}{\eta} - \frac{g\beta}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} e^{-\nu \omega_{2k}^2 t} \sin(\omega_{2k} z) + \right. \\ & + \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi \omega_{1m}^2 t} - e^{-\nu \omega_{2k}^2 t}}{\nu \omega_{2k}^2 - \chi \omega_{1m}^2} \left( \beta g \frac{\gamma_{3mk}}{\omega_{1m}} + \frac{\sigma \chi}{\eta} \alpha_m \omega_{1m}^2 \gamma_{2k} \sin(\omega_{1m} h) \right) \sin(\omega_{2k} z) - \\ & \left. - \frac{\sigma z}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-\chi \omega_{1k}^2 t} \sin(\omega_{1k} h) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

с краевыми условиями (19) и начальными (20). Из условий (19) найдем собственные числа краевой задачи:  $\omega_{3n} = \pi n/h$  и собственные функции  $\sin(\omega_{3n} z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Как и раньше, решение ищем в виде суммы стационарного решения и ряда Фурье по собственным функциям.

$$\begin{aligned} T_0(t, z) = & \frac{(A^2 + B^2) \vartheta^2}{(1 + h\vartheta)^2} \times \\ & \times \left[ T_0^0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( T_0^{1k}(t) + T_0^{2k}(t) + T_0^{3k}(t) + T_0^{4k}(t) + T_0^{5k}(t) + T_0^{6k}(t) + T_0^{7k}(t) \right) \sin(\omega_{3k} z) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $T_0^0$  — стационарное решение, которое определяется формулой

$$T_0^0 = - \frac{(A^2 + B^2) \vartheta^2}{(1 + h\vartheta)^2 \chi} \left[ \frac{\beta g}{\nu} \left( \frac{z^7}{1008} - \frac{h^2 z^5}{80} + \frac{h^3 z^4}{36} - \frac{41 h^6 z}{2520} \right) - \frac{\sigma h z (z^3 - h^3)}{12 \eta} \right].$$

Функции  $T_0^{jk}$  имеют вид

$$\begin{aligned} T_0^{1k} = & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\chi \omega_{1m}^2 t} - e^{-\nu \omega_{3k}^2 t}}{\nu \omega_{3k}^2 - \chi \omega_{1m}^2} \alpha_m \gamma_{4mk}, \\ T_0^{2k} = & - \sum_{n,m=1}^{\infty} \left( \frac{e^{-\chi \omega_{1n}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3k}^2 t}}{\chi (\omega_{3k}^2 - \omega_{1n}^2)} - \frac{e^{-\nu \omega_{2k}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3k}^2 t}}{\chi \omega_{3k}^2 - \nu \omega_{2m}^2} \right) \frac{\alpha_n \gamma_{5km}}{\nu \omega_{2m}^2 - \chi \omega_{1n}^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( g\beta \frac{\gamma_{3nm}}{\omega_{1n}} - \frac{\sigma \chi g\beta}{\eta \nu} \omega_{1n}^2 \gamma_{1m} \sin(\omega_{1n}h) \right), \\ T_0^{3k} &= \gamma_{6k} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin(\omega_{1m}h) \frac{e^{-\chi \omega_{1m}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3k}^2 t}}{\chi (\omega_{3k}^2 - \omega_{1m}^2)}, \\ T_0^{4k} &= \sum_{n,m,j=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_j \left( g\beta \frac{\gamma_{3nm}}{\omega_{1n}} - \frac{\sigma \chi g\beta}{\eta \nu} \omega_{1n}^2 \gamma_{1m} \sin(\omega_{1n}h) \right) \frac{\gamma_{7mjk}}{\nu \omega_{2m}^2 - \chi \omega_{1n}^2} \times \\ & \times \left( \frac{e^{-\chi(\omega_{1n}^2 + \omega_{1k}^2)t} - e^{-\chi \omega_{3j}^2 t}}{\chi (\omega_{3j}^2 - \omega_{1n}^2 + \omega_{1k}^2)} - \frac{e^{-\nu \omega_{2m}^2 t - \chi \omega_{1k}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3j}^2 t}}{\chi (\omega_{3j}^2 - \omega_{1k}^2) - \nu \omega_{2m}^2} \right), \\ T_0^{5k} &= \frac{g\beta}{\nu} \sum_{m,j=1}^{\infty} \alpha_j \gamma_{1m} \gamma_{7jmk} \frac{e^{-\chi \omega_{1n}^2 t - \nu \omega_{2m}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3k}^2 t}}{\chi (\omega_{3k}^2 - \omega_{1j}^2) - \nu \omega_{2m}^2}, \\ T_0^{6k} &= \frac{\sigma}{\eta} \sum_{n,j=1}^{\infty} \alpha_n \alpha_j \gamma_{8nk} \sin(\omega_{1j}h) \frac{e^{-\chi(\omega_{1n}^2 + \omega_{1j}^2)t} - e^{-\chi \omega_{3k}^2 t}}{\chi (\omega_{3k}^2 - \omega_{1n}^2 - \omega_{1j}^2)}, \\ T_0^{7k} &= \frac{g\beta}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{1k} \gamma_{5km} \frac{e^{-\nu \omega_{2k}^2 t} - e^{-\chi \omega_{3m}^2 t}}{\chi \omega_{3m}^2 - \nu \omega_{2k}^2}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_{4mk}$  — коэффициенты разложения  $U^0(z) \sin(\omega_{1m}z)$  в ряд по  $\sin(\omega_{3k}z)$ ;  $\gamma_{5km}$  — коэффициенты разложения произведения  $z \sin(\omega_{2k}z)$  в ряд по  $\sin \omega_{3m}z$ ;  $\gamma_{6k}$  — коэффициенты разложения  $z^2$  в ряд по  $\sin(\omega_{3k}z)$ ;  $\gamma_{7mjk}$  — коэффициенты разложения в ряд  $\sin(\omega_{2m}z) \sin(\omega_{1j}z)$  по  $\sin(\omega_{3k}z)$ ;  $\gamma_{8nj}$  — коэффициенты разложения  $z \sin(\omega_{1n}z)$  в ряд по  $\sin(\omega_{3j}z)$ .

Решение  $P_0$  получается интегрированием соответствующих слагаемых  $T_0$  по  $z$ :

$$P_0 = \frac{(A^2 + B^2) \vartheta^2}{(1 + h\vartheta)^2} \left[ P_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (T_0^{1k} + T_0^{2k} + T_0^{3k} + T_0^{4k} + T_0^{5k} + T_0^{6k} + T_0^{7k}) \frac{(\cos(\omega_{3k}h) - \cos(\omega_{3k}z))}{\omega_{3k}} \right],$$

где  $P_0^0$  — стационарное решение:

$$P_0^0 = -g\beta \left[ \frac{\beta g}{\nu} \left( \frac{z^8}{8064} - \frac{h^2 z^6}{480} + \frac{h^3 z^5}{180} - \frac{41h^6 z^2}{5040} + \frac{61h^8}{13440} \right) - \frac{\sigma}{\eta} \left( \frac{z^5}{60} - \frac{h^3 z^2}{24} + \frac{h^5}{40} \right) \right].$$

## Численный эксперимент

Для иллюстрации полученных точных решений, описывающих поля скоростей, давления и температуры, рассмотрим далее численный эксперимент. Для иллюстрации физических эффектов в качестве диссипативной среды выбрана вода. Без ограничения общности продольный градиент температуры  $A$  полагается равным единице, толщина слоя  $h = 1/2$ . Физические постоянные среды приняты следующими: плотность  $\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ; теплопроводность  $\lambda = 59,9 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ; теплоемкость  $C_p = 4,183 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ; температуропроводность  $\chi = 14,310 \cdot 10^{-8} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$ ; вязкость кинематическая  $\nu = 1,00610 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}$ ; коэффициент объемного расширения  $\beta = 1,8210 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{К}}$ ; коэффициент

поверхностного натяжения  $\sigma = 726,410^{-4} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ; коэффициент теплообмена с металлической стенкой  $\alpha = 350 \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}^2}$ . При проведении вычислительного эксперимента использовались следующие связи между параметрами:  $\vartheta = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $\chi = \frac{\lambda}{C_p \rho_0}$ .

Уравнение для вычисления собственных чисел (27) задачи Штурма–Лиувилля решалось численно. Коэффициенты разложения функций в ряды Фурье вычислялись заранее и хранились в таблицах (массивах). При вычислении гидродинамических полей для суммирования рядов использовалась не более пятидесяти членов рядов Фурье. При проведении численных экспериментов было показано, что существует не только верхняя оценка количества собственных функций, необходимых для формирования рядов Фурье например, но и нижняя. Использование рядов, составленных из десяти и менее слагаемых, хотя и сохраняет качественное поведение решения, но дает существенно большую погрешность.

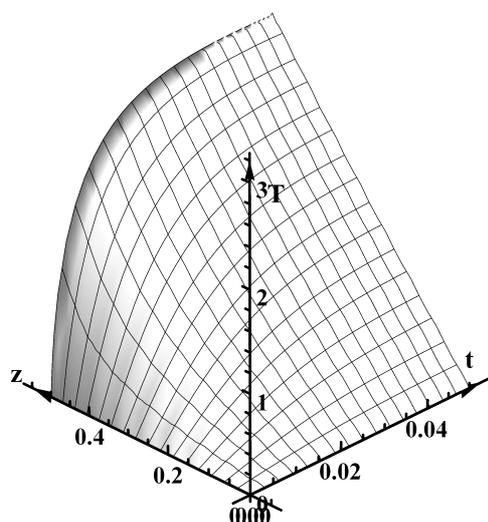


Рис. 1. График нестационарного температурного поля  $T_0$

При описании неоднородных гидродинамических полей (температуры и давления) в их структуре (6) существенную роль играет однородное слагаемое  $T_0$  или  $P_0$ . Далее рассмотрим подробно эволюцию температуры в бесконечно замкнутом слое вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). В начале нагрева жидкости профиль температуры для каждого слоя  $z$  происходит интенсивная конвекция за счет перекрестного влияния процессов теплообмена и термокапиллярных сил на свободной границе. В этом случае в жидкости локализуется термический пограничный слой. При дальнейшем конвективном движении жидкость прогревается и за конечное время выходит на стационарный тепловой режим. Аналогичные рассуждения справедливы и для давления.

Влияние температурной стратификации приводит к генерации в вязкой жидкости противотечений (существованию двух встречных потоков) и усилению скоростей относительно свободной границы (рис. 2). Данный физический эффект возможен только из-за конвекции в жидкости, поскольку выравнивание в ней тепла приводит к образованию застойных точек. При наличии застойных точек жидкость в каком-то слое останавливается. Отметим, что выход на стационарное поле скоростей занимает существенно больше времени, поскольку даже в установившемся температурном поле жидкость будет продолжать свое движение до достижения механического равновесия, которое, как известно, проявляется в исключительных случаях [Гершуни, Жуховицкий, 1972; Landa, 2010].

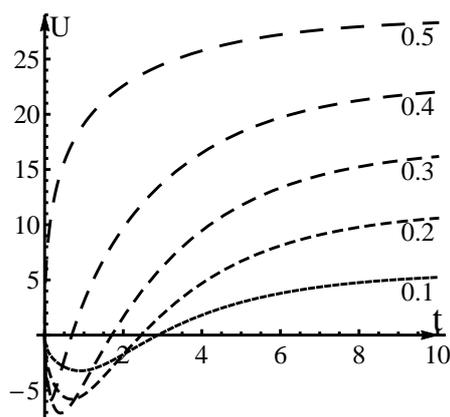


Рис. 2. График скорости жидкости в начале движения

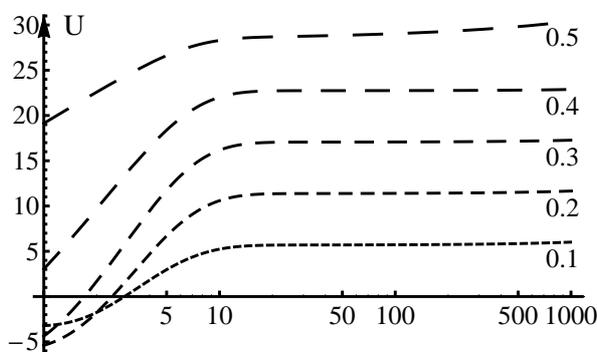


Рис. 3. График асимптотического распределения скоростей

В настоящей работе рассмотрены нестационарные слоистые течения конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые горизонтальным (продольным) градиентом температуры. Исследована сложная конвекция, которая генерируется не только термокапиллярными силами, но и фазовым переходом, который задается теплообмен по закону Ньютона, выраженный краевыми условиями третьего рода на свободной поверхности. Построенные решения позволяют оценить время переходного процесса, необходимого для выхода на установившиеся режимы (стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости). В приведенном примере показан процесс установления температуры и горизонтальной скорости жидкости. Показан начальный этап процесса установления с возникновением противотечений. Таким образом, найденные решения могут быть использованы при математическом моделировании экваториальных противотечений в мировом океане. Еще одним приложением анонсированного в статье класса точных решений может служить его использование при описании реологических сред. Это объясняется тем фактом, что вычисленные в статье решения справедливы только для сред, в которых учитываются необратимые эффекты в жидкости, описываемые диссипативными коэффициентами вязкости и температуропроводности.

## Список литературы (References)

- Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. — Препринт No. 1–10, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. — 68 с.

- Andreev V. K.* Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotorye ego obobshcheniya [Birikh Solutions to Convection Equations and Some of its Extensions]. — Krasnoyarsk, IBM SO RAN Publ., 2010. — 68 p. (In Russian).
- Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю.* О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. — 2013. — Т. 9, № 3. — С. 3–9.
- Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu.* On layered flows of plane free convection. Nelineynaya dinamika. — 2013. — Vol. 9, No. 4. — P. 651–657 (In Russian).
- Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. — Пермь: Перм. ун-т, 2006. — 155 с.
- Aristov S. N., Shvarts K. G.* Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti [Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. — Perm, Izd-vo PGU Publ., 2006. — 154 p. (In Russian).
- Аристов С. Н., Шварц К. Г.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости. — Киров: ВятГУ, 2011. — 207 с.
- Aristov S. N., Shvarts K. G.* Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti [Vortex Flows in Thin Fluid Layers]. — Kirov, VyatGU Publ., 2011. — 207 p. (In Russian).
- Аристов С. Н., Князев Д. Е., Полянин А. Д.* Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. — 2009. — Т. 43, № 5. — С. 547–566.
- Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyinin A. D.* Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theor. Found. of Chem. Eng. — 2009. — T. 43, No. 5. — P. 642–662 (In Russian).
- Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. — 1966. — № 3. — С. 69–72.
- Birikh R. V.* Thermocapillary convection on a horizontal fluid layer // J. Appl. Mech. Technol. Phys. — 1966. — Vol. 7, iss. 3. — P. 43–44.
- Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
- Gershuni G. Z., Zhukhovitsky E. M.* Konvektivnaya ustoichivost neshzhimaemoy zhidkosti [Convective Stability of Incompressible Fluid]. — M.: Nauka Publ., 1972 (In Russian).
- Ингель Л. Х., Калашиник М. В.* Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов // Успехи физических наук. — 2012. — Т. 182, № 4. — С. 379–406.
- Ingel L. Kh., Kalashnik M. V.* Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions // Physics-Uspokhi. — Vol. 55, No. 4. — P. 356–381.
- Кирдяшкин А. Г.* Тепловые гравитационные течения и теплообмен в астеносфере. — Новосибирск: Наука, СО РАН, 1989. — 81 с.
- Kirlyashkin A. G.* Teplovye gravitatsionnye techeniya i teploobmen v astenosfere [Heat and Gravitational Flows and Heat Exchange in the Asthenosphere]. — Novosibirsk: Nauka, SO RAN Publ., 1989. — 81 p. (In Russian).
- Ланда П. С.* Автоколебания в распределенных системах. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 320 с.
- Landa P. S.* Avtokolebaniya v raspredelennykh sistemakh [Self-Excited Vibrations in Distribution Systems]. — M.: Knizhnyi Dom “Librokom”, 2010. — 320 p. (In Russian).
- Ландау Л. Д.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 2006. — 736 с.
- Landau L. D.* Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. — M.: Nauka, 2006. — 736 p. (In Russian).
- Остроумов Г. А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. — М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры. 1952. — 256 с.
- Ostroumov G. A.* Svobodnaya konvekciya v usloviyah vnutrenney zadachi. — M.: Gos.izd-vo tehniko-teoreticheskoy lit-ry, 1952. — 256 s. (In Russian).

- Полянин А. Д., Аристов С. Н.* Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Теоретические основы химической технологии. — 2011. — Т. 45, № 6. — С. 696–701.
- Polyanin A. D., Aristov S. N.* A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier–Stokes and Euler equations // Theor. Found. of Chem. Eng. — 2011. — Т. 45, No. 6. — P. 885–890.
- Сидоров А. Ф.* Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды: Сборник научных трудов. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. — С. 101–117.
- Sidorov A. F.* On one class of solutions to equations of gas dynamics and natural convection // Chislennye i analiticheskie metody resheniya zadach sploshnoi sredy [Numerical and Analytical Methods of Solving Continuum Problems]. — Sverdlovsk: UNTs AN SSSR Publ., 1981. — P. 101–117 (In Russian).
- Сидоров А. Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикладная механика и техническая физика. — 1989. — № 2. — С. 34–40.
- Sidorov A. F.* Two classes of solution of the fluid and gas mechanics equatins and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1989. — Vol. 30, Iss. 2. — P. 197–203.
- Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en regime permanent. Thése. — Paris: Gauthier-Villars, 1901. — 88 p. — Annales de chimie et de physique. — 1901. — Vol. 23. — P. 62–144.
- Bénard H.* Étude expérimentale des courants de convection dans une nappe liquide // Régime permanent: tourbillons cellulaires // J. Phys. Theor. Appl. — 1900. — Vol. 9, No. 1. — P. 513–524.
- Bénard H.* Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en r’egime permanent. Th’ese. — Paris: Gauthier-Villars, 1901. — 88 p. — Annales de chimie et de physique. — 1901. Vol. 23. — P. 62–144.
- Goncharova O., Kabov O.* Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer // Microgravity Sci. Technol. — 2009. — Vol. 21, Suppl. 1. — P. 129–137.
- Marangoni C.* Sull espansione delle gocce di un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquid // Pavia: Tipografia dei fratelli Fusi, 1865.
- Napolitano L. G.* Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immisible fluids // Acta Astronaut. — 1980. — Vol. 7. — P. 461–478.
- Ortiz-Pérez A. S., Dávalos-Orozco L. A.* Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // Phys. Fluids. — 2011. — No. 28(3). — P. 084107–084111.
- Smith M. K., Davis S. H.* Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Pt. 1. Convective instabilities // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 132. — P. 119–144.
- Thomson J.* On certain curious motions observable on the surfaces of wine and other alcoholic liquours // Philosophical Magazine. — 1855. — Vol. 10. — P. 330–333.