

УДК: 519.633.2:519.633.6

О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 2. Численные примеры

Н. М. Евстигнеев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Россия, 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 9

E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

Получено 01.07.2016, после доработки — 10.08.2016.

Принято к публикации 01.09.2016.

Схемы WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы) в настоящее время имеют достаточно обширную область применения для аппроксимации разрывных решений в уравнениях в частных производных. Данные схемы применялись для прямого численного моделирования и моделирования динамики больших вихрей в задачах газовой динамики, задачах МГД и даже для задач нейтронной кинетики. Данная работа посвящена уточнению некоторых характеристик схем WENO и численному моделированию характерных задач, которые позволяют сделать выводы об области применимости данных схем. Первая часть работы содержала результаты по доказательству свойств аппроксимации, устойчивости и сходимости схем WENO5, WENO7, WENO9, WENO11 и WENO13. Во второй части работы проводится модифицированный волновой анализ, позволяющий сделать вывод о дисперсионных и диссипативных свойствах схем. Далее, проводится численное моделирование ряда характерных задач для уравнений гиперболического типа: уравнений переноса (одномерное и двухмерное), уравнения Хопфа, уравнения Бюргерса (с малой диссипацией) и уравнения динамики невязкого газа (одномерное и двухмерное). Для каждой из задач, подразумевающих гладкое решение, приведено практическое вычисление порядка аппроксимации с помощью метода Рунге. Во всех задачах проверяются выводы, сделанные в первой части работы по влиянию шага по времени на нелинейные свойства схем. В частности, для уравнений переноса разрывной функции и уравнений Хопфа показано, что невыполнение указанных рекомендаций ведет вначале к росту вариации решения, а затем включается диссипативный нелинейный механизм схемы и аппроксимация падает. Практически подтверждены выводы первой части по условиям устойчивости. Для одномерного уравнения Бюргерса проведено моделирование затухания случайно распределенных начальных условий в периодической области и выполнено сопоставление со спектральным методом. Делается вывод о применимости схем WENO7–WENO13 для прямого численного моделирования турбулентности. В конце демонстрируются возможности схем на начально-краевых задачах для уравнений динамики невязкого газа: неустойчивость Рэлея–Тейлора и отражение ударной волны от клина с образованием сложной конфигурации ударных волн и разрывов.

Ключевые слова: WENO-схемы, нелинейные схемы, устойчивость численных схем, системы уравнений гиперболического типа, уравнение Хопфа

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 14-07-00123).

UDC: 519.633.2:519.633.6

On the construction and properties of WENO schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen.

Part 2. Numerical examples

N. M. Evstigneev

Federal Research Center ‘Informatics and Control’ of Russian Academy of Science,
9 pr. 60-letiya Oktyabrya, Moscow, 117312, Russia

E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

Received 01.07.2016, after completion — 10.08.2016.

Accepted for publication 01.09.2016.

WENO schemes (weighted, essentially non oscillating) are currently having a wide range of applications as approximate high order schemes for discontinuous solutions of partial differential equations. These schemes are used for direct numerical simulation (DNS) and large eddy simulation in the gas dynamic problems, problems for DNS in MHD and even neutron kinetics. This work is dedicated to clarify some characteristics of WENO schemes and numerical simulation of specific tasks. Results of the simulations can be used to clarify the field of application of these schemes. The first part of the work contained proofs of the approximation properties, stability and convergence of WENO5, WENO7, WENO9, WENO11 and WENO13 schemes. In the second part of the work the modified wave number analysis is conducted that allows to conclude the dispersion and dissipative properties of schemes. Further, a numerical simulation of a number of specific problems for hyperbolic equations is conducted, namely for advection equations (one-dimensional and two-dimensional), Hopf equation, Burgers equation (with low dissipation) and equations of non viscous gas dynamics (one-dimensional and two-dimensional). For each problem that is implying a smooth solution, the practical calculation of the order of approximation via Runge method is performed. The influence of a time step on nonlinear properties of the schemes is analyzed experimentally in all problems and cross checked with the first part of the paper. In particular, the advection equations of a discontinuous function and Hopf equations show that the failure of the recommendations from the first part of the paper leads first to an increase in total variation of the solution and then the approximation is decreased by the non-linear dissipative mechanics of the schemes. Dissipation of randomly distributed initial conditions in a periodic domain for one-dimensional Burgers equation is conducted and a comparison with the spectral method is performed. It is concluded that the WENO7–WENO13 schemes are suitable for direct numerical simulation of turbulence. At the end we demonstrate the possibility of the schemes to be used in solution of initial-boundary value problems for equations of non viscous gas dynamics: Rayleigh–Taylor instability and the reflection of the shock wave from a wedge with the formation a complex configuration of shock waves and discontinuities.

Keywords: WENO schemes, nonlinear schemes, stability of numerical schemes, hyperbolic systems of differential equations, Hopf equation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 885–910 (Russian).

This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (grant 14-07-00123).

Введение

Настоящая работа является продолжением первой части (далее, часть 1) [Евстигнеев, 2016], где были сформулированы выводы по построению и анализу устойчивости схем WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы). В данной работе планируется на численных примерах подтвердить сделанные в первой части выводы. Во многих источниках литературы опубликованы результаты численного моделирования задач схемой WENO5 (см. например [Martin et al., 2006; Scandaliato, Liou, 2010; Shu, Sher, 1989; Liska, Wendroff, 2003; Woodward, Colella, 1984]), где проводится сопоставление результатов с другими схемами. Сравнение схем WENO друг с другом в широком диапазоне порядков аппроксимации (от 5 до 13) автору не встречалось. Также планируется проанализировать диссипативные и дисперсионные свойства схем как аналитически, так и на численном примере, поскольку в литературе есть данные только о схеме WENO5 (см. например [Martin et al., 2006; Evstigneev, Magnitskii, 2013; Fauconnier, Dick, 2013; Глотов, 2014]).

Модифицированный волновой анализ

Рассмотрим спектральные свойства операторов аппроксимации на конечных объемах. Для схемы WENO5 такой анализ выполнен, например, в [Martin et al., 2006; Evstigneev, Magnitskii, 2013]. Поскольку дифференциальный оператор заменяется разностным то встает вопрос о разрешении различных частот в зависимости от волнового числа. Это легко показать для простой аппроксимации первой производной центральными разностями второго порядка $(\delta(u))_x$. Пусть $u(x) = re^{ikx}$, $u(x)_x = ikre^{ikx} = ik u(x)$. Для центральных разностей имеем:

$$\delta(u(x))_x = \frac{r}{2\Delta x} (e^{ik(x+\Delta x)} - e^{ik(x-\Delta x)}) = ir \underbrace{\frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x}}_{k'} e^{ikx} = ik' u(x). \quad (1)$$

Здесь k' — модифицированное волновое число, $k' \rightarrow k$, при $\Delta x \rightarrow 0$, поскольку $k' = k - k^3 \Delta x^2 + \dots$. Для малых k видно, что (1) корректно воспроизводит поведение производной. Но при увеличении k , т. е. при росте волнового числа, что соответствует уменьшению разрешающего масштаба λ ($\lambda = 2\pi/k$, если $\Delta x = \lambda/N$, то $k\Delta x = 2\pi/N$), ошибка аппроксимации становится значительна. Таким образом, можно определить, какой минимальный масштаб может разрешать данная численная схема, и, следовательно, определить минимальное количество конечных объемов, необходимых для разрешения минимального масштаба (максимально возможной частоты). Запишем общую задачу для нахождения модифицированного волнового числа на отрезке, разбитом на N равных частей Δx для первой производной:

$$k' = -\frac{i}{\Delta x} \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{\frac{i2\pi jk}{N}} = -\frac{i}{\Delta x} \sum_{m=-s}^s a_m e^{imk\Delta x}, \quad (2)$$

откуда

$$k' \Delta x = -i \sum_{m=-s}^s a_m e^{imk\Delta x} = \sum_{m=1}^s (a_m - a_{-m}) \sin(mk\Delta x) - ia_0 - i \sum_{m=1}^s (a_m + a_{-m}) \cos(mk\Delta x), \quad (3)$$

где s — половина ширины шаблона схемы, a_m — коэффициенты при функциях интерполяции.

Вычисления, проведенные по выражению (3), показаны на рис. 1, слева. Здесь сплошной отрезок — точное волновое число, кривые — волновые числа, модифицируемые схемами. Действительная часть — дисперсионная ошибка схемы, мнимая часть — диссипативная ошибка

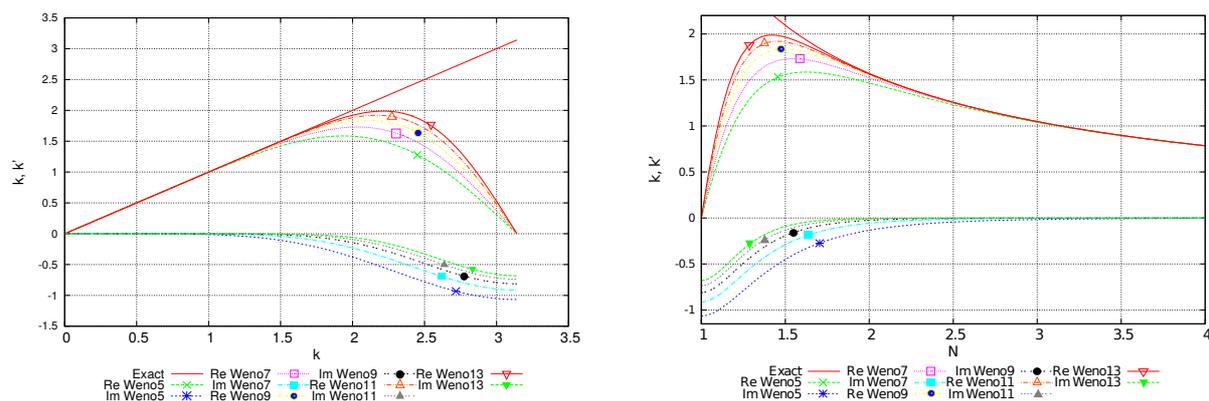


Рис. 1. Модифицированное волновое число k' по отношению к волновому числу k (слева) и минимальное количество элементов N для правильного разрешения волнового числа (справа)

схемы. Видно, что с увеличением порядка схемы разрешающая способность растет. Более наглядный график представлен на рис. 1, справа. Показано минимальное количество элементов для корректного разрешения данной частоты. Видно, что для схемы WENO5 требуется 3–4 элемента, для схемы WENO7 — 3 элемента, а для схем WENO9–WENO13 — 2 элемента. Полученные результаты будут далее проверены в численном примере для уравнения Бюргерса.

Численные примеры

В данном разделе рассматриваются численные примеры использования схемы WENO для решения различного класса уравнений с целью проверки полученных индикаторов гладкости, критериев устойчивости и спектральных свойств, а также для анализа возможностей схем WENO.

Экспериментальное определение порядка аппроксимации

Для определения порядка аппроксимации рассматриваемых схем из численных экспериментов воспользуемся правилом Рунге [Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2003, с. 144], и будем учитывать только пространственную аппроксимацию. Пусть u — точное решение задачи $L(u) = f$, а u_h — приближенное решение задачи $L_h(u_h) = f_h$, причем предполагается, что дискретный оператор аппроксимирует непрерывный. Пусть известно, что $\|u - u_h\|_A = Gh^p + O(h^{p+1})$, где G не зависящий от h (но зависящий от задачи) ограниченный функционал ($|G| \gg \epsilon$, где ϵ — точность вычислений на ЭВМ), A — некоторая сеточная норма. Необходимо определить p из численного эксперимента. Будем проводить вычисление p следующим образом. Пусть h_j — шаг по пространству на сетке номер j с числом элементов N_j . Если точное решение задачи известно, то порядок аппроксимации можно оценить как

$$\frac{\|u(x_k) - u_{h_j}(x_k)\|}{\|u(x_k) - u_{h_{j+1}}(x_k)\|} = \frac{Gh_j^p + O(h_j^{p+1})}{Gh_{j+1}^p + O(h_{j+1}^{p+1})} = \left(\frac{h_j}{h_{j+1}}\right)^p + O(h), \quad (4)$$

и, следовательно,

$$p \approx \ln\left(\frac{\|u(x_k) - u_{h_j}(x_k)\|}{\|u(x_k) - u_{h_{j+1}}(x_k)\|}\right) / \ln\left(\frac{h_j}{h_{j+1}}\right). \quad (5)$$

Если точное решение не известно, то экспериментальную оценку порядка аппроксимации можно получить разными способами. Первый — рассчитать \tilde{u}_h на сетке N_0 такой, что $jN < N_0$ для всех рассчитываемых j . Такое приближенное решение на измельченной сетке принимается

за точное и подставляется в (5). Второй подход — оценить точность через отношение норм относительной ошибки, посчитанных для последовательностей h_j , где $j = 1, 2, 3, \dots$. Для упрощения анализа обычно сгущение сетки производится кратно двум, т. е. $h_j = 2h_{j+1}$. Тогда выражение для определения порядка аппроксимации записывается как

$$\frac{\|u_{h_{j+1}}(x_k) - u_{h_j}(x_k)\|}{\|u_{h_{j+2}}(x_k) - u_{h_{j+1}}(x_k)\|} = \frac{Gh_j^p - Gh_{j+1}^p + O(h_j^{p+1})}{Gh_{j+1}^p - Gh_{j+2}^p + O(h_{j+1}^{p+1})} = \frac{1 - 2^{-p}}{2^{-p} - 2^{-2p}} + O(h) = 2^p + O(h), \quad (6)$$

$$p \simeq \log_2 \left(\frac{\|u_{h_{j+1}}(x_k) - u_{h_j}(x_k)\|}{\|u_{h_{j+2}}(x_k) - u_{h_{j+1}}(x_k)\|} \right). \quad (7)$$

Оценка будет приближаться к точному порядку аппроксимации при $h \rightarrow 0$. С учетом (5, часть 1) точки сетки для разных h_j должны иметь одинаковые координаты x_k .

Одномерное уравнение переноса

Рассматривается уравнение вида $u_t + au_x = 0$, $a > 0$, с периодическими условиями и начальными условиями $u(0, x) = u_0$ на отрезке $I = [0; 1]$. Данный тест позволяет провести сравнение переноса скалярной функции начального распределения и определить влияние условий устойчивости для разных начальных условий. Рассмотрим начальное условие в виде гладкой функции $u_0(x) = e^{-k(0.5-x)^2}$ на указанном отрезке, где k выбирается так, чтобы исключить значительные изменения весов линейной комбинации. Для гладкого решения будем оценивать порядок схем. Для минимизации влияния ошибки, связанной с интегрированием по времени, шаг по времени выбирается как $\Delta t = 1/350\Delta x$ для метода RK4, всего делается 1000 периодов. Как можно видеть из таблицы 1, все схемы на гладких решениях дают правильный порядок, соответствующий номеру схемы.

Таблица 1. Экспериментальное определение порядка схем WENO на гладком решении для уравнения переноса

N	WENO5		WENO7		WENO9		WENO11		WENO13	
	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord
20	$1.35 \cdot 10^{-2}$		$9.91 \cdot 10^{-5}$		$1.15 \cdot 10^{-5}$		$6.59 \cdot 10^{-7}$		$1.35 \cdot 10^{-8}$	
30	$2.04 \cdot 10^{-3}$	4.67	$6.98 \cdot 10^{-6}$	6.54	$2.81 \cdot 10^{-7}$	9.16	$7.19 \cdot 10^{-9}$	11.15	$9.79 \cdot 10^{-11}$	12.16
40	$4.94 \cdot 10^{-4}$	4.93	$9.04 \cdot 10^{-7}$	7.12	$2.02 \cdot 10^{-8}$	9.17	$2.87 \cdot 10^{-10}$	11.19	$2.29 \cdot 10^{-12}$	13.06
50	$1.63 \cdot 10^{-4}$	4.97	$1.81 \cdot 10^{-7}$	7.20	$2.61 \cdot 10^{-9}$	9.16	$2.37 \cdot 10^{-11}$	11.18	$1.25 \cdot 10^{-13}$	13.03
60	$6.57 \cdot 10^{-5}$	4.99	$4.92 \cdot 10^{-8}$	7.14	$4.95 \cdot 10^{-10}$	9.11	$3.08 \cdot 10^{-12}$	11.20	$1.15 \cdot 10^{-14}$	13.07
70	$3.04 \cdot 10^{-5}$	5.00	$1.64 \cdot 10^{-8}$	7.12	$1.20 \cdot 10^{-10}$	9.19	$5.58 \cdot 10^{-13}$	11.08	$1.80 \cdot 10^{-15}$	12.06
80	$1.56 \cdot 10^{-5}$	5.00	$6.397 \cdot 10^{-9}$	7.06	$3.572 \cdot 10^{-11}$	9.08	$1.26 \cdot 10^{-13}$	11.12		
90	$8.66 \cdot 10^{-6}$	5.00	$2.79 \cdot 10^{-9}$	7.04	$1.23 \cdot 10^{-11}$	9.04	$3.40 \cdot 10^{-14}$	11.14		
100	$5.11 \cdot 10^{-6}$	5.00	$1.33 \cdot 10^{-9}$	7.04	$4.76 \cdot 10^{-12}$	9.01	$1.07 \cdot 10^{-14}$	11.02		

Далее рассмотрим классический тест Леонарда, [Leonard, 1991], где в качестве $u_0(x)$ берется композиция функций в виде ступени, полуэллипса, полуволны синуса и треугольника, которая переносится, в работе Леонарда, на 10 периодов на отрезке $I = [0; 1]$, разбиение $N = 250$. Такая задача позволяет проверить поведение схемы сразу разных типах решений. Поскольку данный тест задумывался для схем типа TVD, в данном случае будем переносить $u_0(x)$ на 400 периодов методом RK3 (поскольку иначе отличия будут практически незаметны). В процессе расчета вычисляется полная вариация по выражению (56, часть 1). Результаты расчетов показаны на рис. 2–6. Можно видеть важность учета рекомендованных значений C_{ref1} из таблиц для функций, имеющих разрывы. Уже отличие в несколько процентов приводит к усилению эффекта

Гиббса для схем WENO7 и WENO9 (рис. 3 и 4), что можно отметить по графикам TV. Для схем WENO5–WENO9 учет $C \leq C_{ref1}$ позволяет получить неувеличение полной вариации со временем. Этого нельзя сказать для случаев $C > C_{ref1}$. В этом случае при длительном переносе на возникающих осцилляциях в окрестностях разрывов проявляются нелинейные свойства схем, что приводит к значительному сглаживанию решений. Для всех графиков при $C > C_{ref1}$ решение переходит в гладкое подобие начального условия. Это видно по начальному забросу TV с последующим быстрым уменьшением вариации. Избавиться от эффекта Гиббса для схем WENO11 и WENO13 не удастся независимо от выбора C , хотя осцилляции уменьшаются при $C < C_{ref1}$ и имеют амплитуду 1–2% от $\max_x |u_0(x)|$. В целом можно сказать, что результаты расчетов подтверждают важность анализа спектра в окрестности разрывного решения. Полученные оценки для разрывных решений оказываются достаточно точными. Фактически это ставит вопрос о применимости оценок, сделанных в работах [Wang, Spiteri, 2007; Macdonald, Mohammad, Ruuth, 2011] для схемы WENO5.

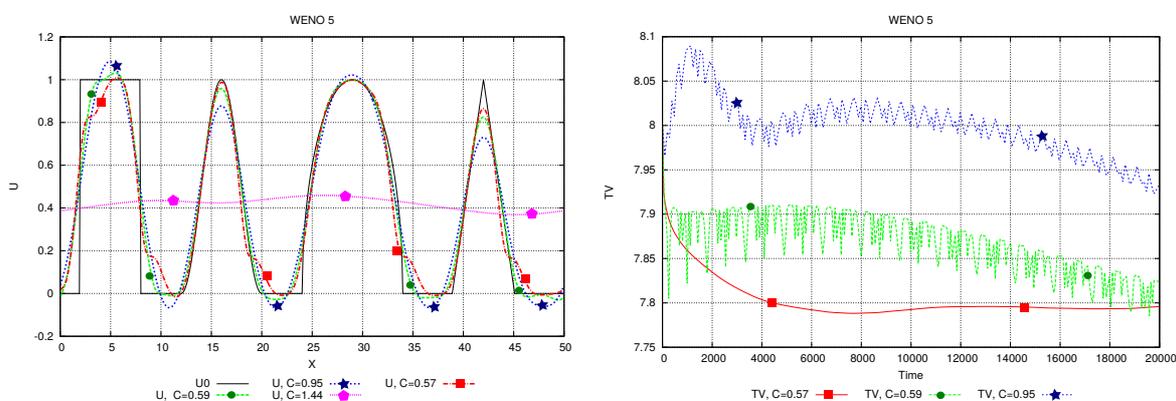


Рис. 2. Перенос начального распределения: тест Леонарда, 400 периодов, схема WENO5. Распределение $u(x)$ и эволюция полной вариации (TV) от времени для разных C , схема RK3

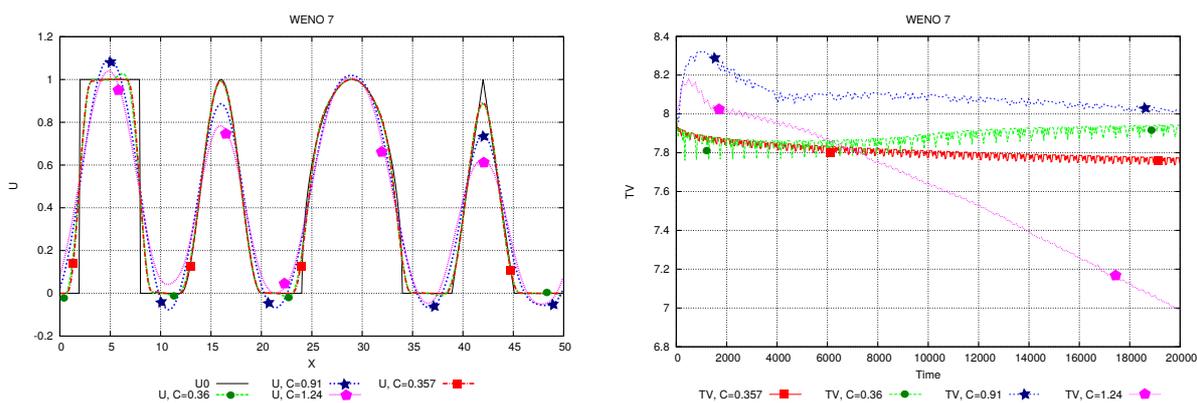


Рис. 3. Перенос начального распределения: тест Леонарда, 400 периодов, схема WENO7. Распределение $u(x)$ и эволюция полной вариации (TV) от времени для разных C , схема RK3

Одномерное уравнение Хопфа

Рассматривается задача Коши для уравнения (2, часть 1) с начальными условиями (две волны,двигающиеся по направлению к центру)

$$u_0(x) = \sin(x)^9, \quad x \in [0; 2\pi]. \quad (8)$$

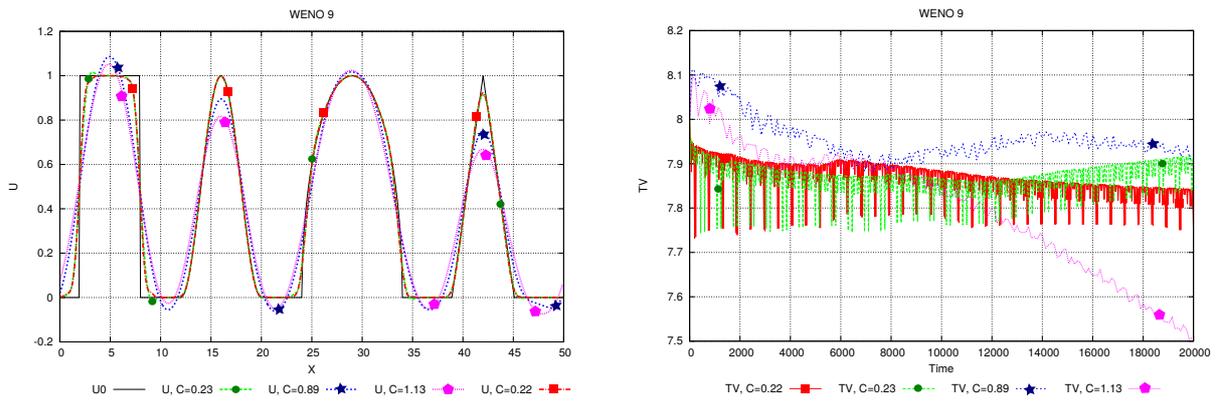


Рис. 4. Перенос начального распределения: тест Леонарда, 400 периодов, схема WENO9. Распределение $u(x)$ и эволюция полной вариации (TV) от времени для разных C , схема RK3

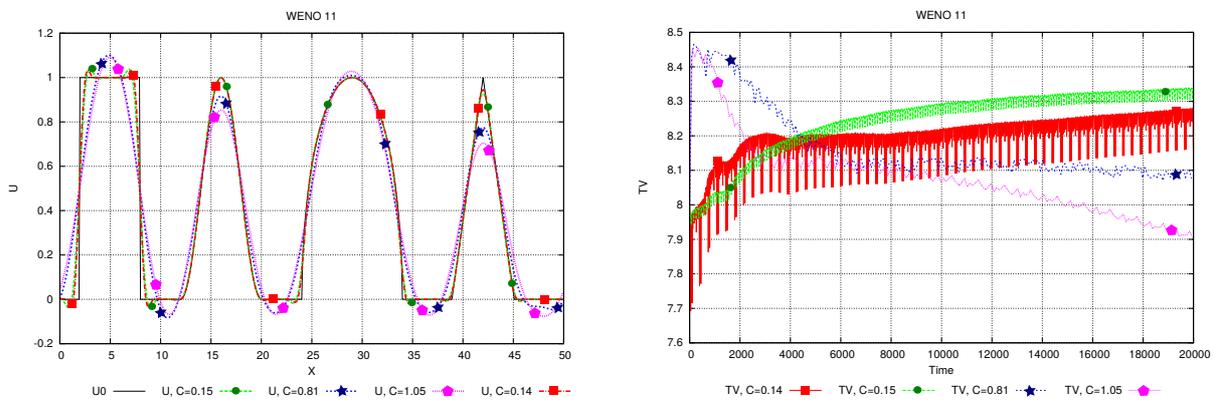


Рис. 5. Перенос начального распределения: тест Леонарда, 400 периодов, схема WENO11. Распределение $u(x)$ и эволюция полной вариации (TV) от времени для разных C , схема RK3

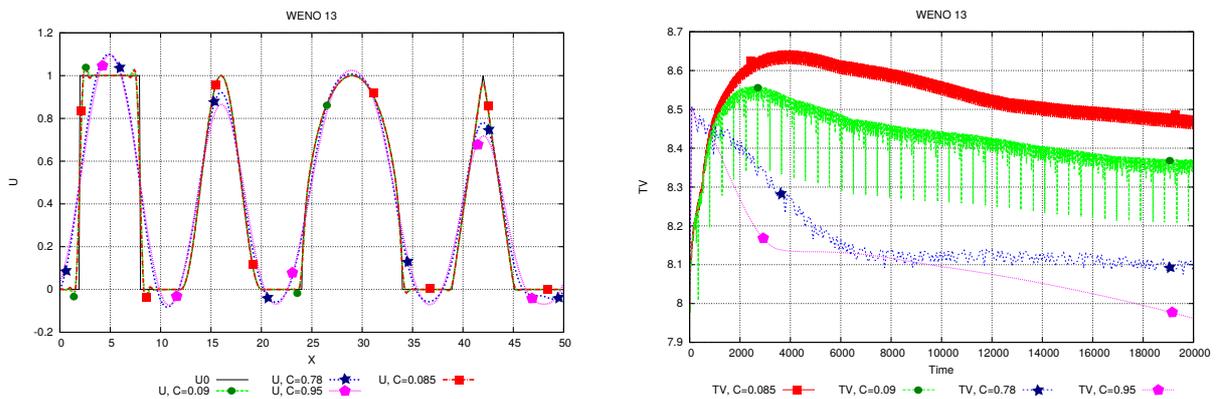


Рис. 6. Перенос начального распределения: тест Леонарда, 400 периодов, схема WENO13. Распределение $u(x)$ и эволюция полной вариации (TV) от времени для разных C , схема RK3

Решение можно найти методом характеристик, в неявной форме (3, часть 1):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - u(x_0)t, \\ u(x(t), t) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Решение приведено на рис. 7, 8. В определенный момент времени t_* произойдет опрокидывание решения в точке x_* (пересечения характеристик на рисунке) с образованием решения вида двух

ударных волн. Для проверки решения на гладком участке и на разрывном участке решений необходимо определить t_* пересечения первых характеристик. Найдем его из условия $u(t, x_*)_x \rightarrow \infty, t \rightarrow t_*$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_0(x + u_0(x_0)t)) = (u_0)' \left(1 - t \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(u_0)'}{1 + t(u_0)'}$. Следовательно, $t_* = -1/(u_0(x - ut)')$. Поскольку образование ударной волны возможно при $u_0(x)' < 0$, то

$$t_* = \min_x \left(-\frac{1}{u_0(x)'} \mid u_0(x)' < 0 \right). \quad (10)$$

Для начальных условий (8) можно найти t_* как $u_0(x)' = 9 \cos(x) \sin(x)^8 = 9 \cos(x)(1 - \cos(x)^2)^4 = 9y(1 - y^2)^4$. Отрицательная производная достигается, например, на участке $x \in (\pi/2; \pi)$. Тогда решаем задачу:

$$t_* = \max_y \left(\frac{1}{9y(1 - y^2)^4} \right), y \in (-1; 0). \quad (11)$$

Откуда $y = -\frac{1}{3}$, и

$$t_* = -\frac{1}{9(1 - (-1/3)^2)^4(-1/3)} = \frac{2187}{4096} \sim 0.53393546875. \quad (12)$$

При $t \leq t_*$ на экстремумах функций реализуется условие **случай 2** [Евстигнеев, 2016, с. 742], рассмотренного выше. Это позволяет проверить условия устойчивости и для $t \leq t_*$ сравнить решение с аналитическим. Для данного теста применяется норма $A := L_\infty$, время расчета $t = 0.533935$. При большом шаге по времени определяющей будет являться точность интегрирования по времени, поэтому ожидается получение порядков не выше 3-го или 4-го при устойчивом решении. В случае развития неустойчивости в норме L_∞ порядок схемы будет значительно понижаться. Результаты приведены в таблицах 2, 3.

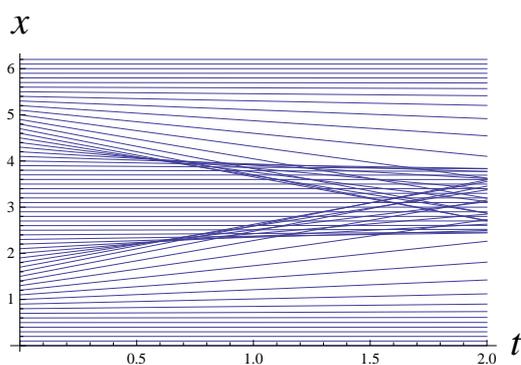


Рис. 7. Аналитическое решение задачи двойной волны, характеристики

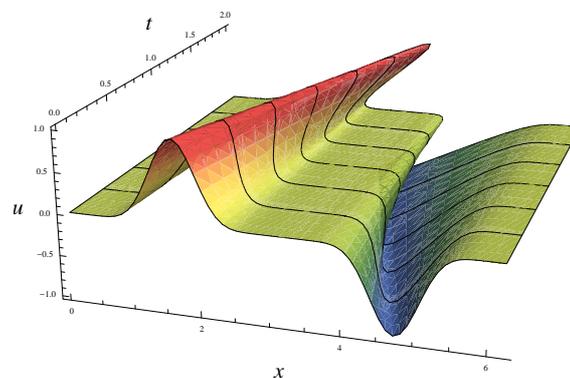


Рис. 8. Аналитическое решение задачи двойной волны, u в пространстве (x, t)

Как видим из полученных результатов, на гладком гребне волны необходимо применять устойчивость из таблицы 4 (см. часть 1), для чисто мнимого спектра решения. Для схем с выраженным эффектом Гиббса наблюдается значительное падение порядка аппроксимации. Визуально на гребне волны при большем значении C наблюдается завышение амплитуды с образованием остроконечного возмущения. На рис. 9, 10 показаны численное решение задачи для $t = 3.5$ и полная вариация. По графику полной вариации видно влияние выбора константы C для схемы на разных временах.

Таблица 2. Порядок всей схемы WENO–RK3 при различных значениях C в области критического времени пересечений характеристик для уравнения Хопфа. Норма L_∞

N	WENO5		WENO7		WENO9		WENO11		WENO13	
	$C = 0.94$	$C = 1.4$	$C = 0.9$	$C = 1.2$	$C = 0.87$	$C = 1.12$	$C = 0.85$	$C = 1.0$	$C = 0.83$	$C = 0.93$
50	3.08	2.02	3.05	2.01	3.01	2.12	3.00	0.94	3.00	0.84
80	3.06	2.00	3.05	1.91	3.04	1.31	3.01	1.03	3.00	0.58
100	3.04	2.02	3.04	1.9	3.04	1.57	3.01	1.10	3.00	0.57
150	3.02	1.99	3.03	1.8	3.02	1.74	3.02	1.30	3.00	0.30
200	3.01	2.01	3.02	2.01	3.01	1.92	3.01	0.98	2.99	0.35

Таблица 3. Порядок всей схемы WENO–RK4 при различных значениях C в области критического времени пересечений характеристик для уравнения Хопфа. Норма L_∞

N	WENO5		WENO7		WENO9		WENO11		WENO13	
	$C = 1.5$	$C = 1.7$	$C = 1.45$	$C = 1.66$	$C = 1.42$	$C = 1.57$	$C = 1.4$	$C = 1.51$	$C = 1.36$	$C = 1.46$
50	4.21	1.98	4.10	2.20	4.15	2.3	4.01	2.01	4.00	1.97
80	4.14	1.83	4.05	2.10	4.1	1.98	4.03	1.99	3.99	2.00
100	4.09	2.06	4.02	2.01	4.06	2.01	3.99	1.99	3.99	1.99
150	4.02	1.98	4.03	1.91	4.02	2.02	4.02	1.83	4.01	2.00
200	4.03	2.01	4.03	2.01	4.01	1.99	4.00	0.92	4.00	1.98

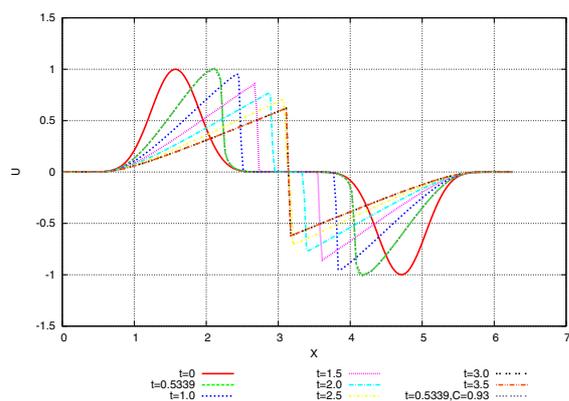


Рис. 9. Численное решение задачи двойной волны, схема WENO13–RK3

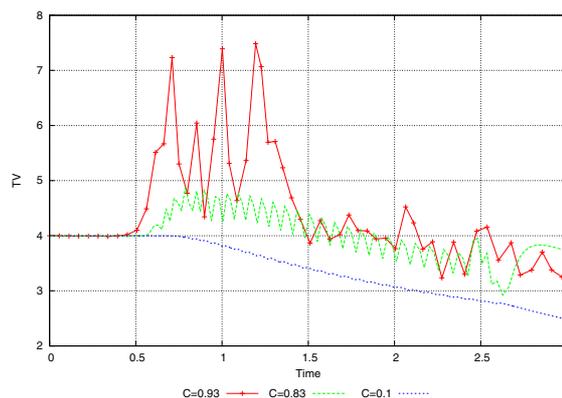


Рис. 10. Полная вариация решения задачи двойной волны от времени, схема WENO13–RK3

Одномерное уравнение Бюргера, разрешение энергетического спектра пульсаций

Для применения схем WENO как составных частей при прямом численном моделировании турбулентности (DNS) или при применении методов крупных вихрей (LES, iLES, DES) необходимо выяснить экспериментально, как передается и затухает энергия пульсаций в зависимости от волнового числа. Другими словами, показать влияние схемной вязкости на спектр энергии пульсаций при недостаточном разрешении всех пространственных масштабов. Такие исследования были предложены в работах [Pirozzoli, 2006; Fausonnier, Dick, 2013] на основе уравнения Бюргера. Достаточно подробный анализ для схемы WENO5 был сделан в работе [Глотов, 2014].

Рассматривается параболическое уравнение Бюргера с начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2/2 \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13)$$

$$x \in \mathbb{T}^1 := [0, 2\pi], u(x, 0) = u_0(x).$$

Здесь начальное условие u_0 задается в виде ряда Фурье с выделенной доминирующей гармоникой и случайным распределением фазы:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{(ikx + \varphi_k)}, \quad (14)$$

где φ_k — случайная фаза, нормально распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$. Коэффициенты ряда A_k определяются следующим образом:

$$A_k = Ak^\alpha e^{\left(-\frac{\alpha}{2} \frac{k^2}{k_0^2}\right)}. \quad (15)$$

Постоянные берутся из работы [Глотов, 2014, с. 45], где они выбраны так, чтобы энергия вносилась на низкочастотной гармонике: $\alpha = 4$, $k_0 = 15$, A — масштабирующий коэффициент, для приведения максимальной амплитуды к 1.

Для одномерного случая скорость диссипации энергии пульсаций ε может быть представлена [Fauconnier, Dick, 2013] как скорость диссипации максимальной вариации u :

$$\varepsilon = \frac{d}{dt} \left(\max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^1} (|u(x_1) - u(x_2)|) \right). \quad (16)$$

Как и для случая гидродинамической модели, можно определить масштаб А. Н. Колмогорова (l_K) из теории размерности:

$$l_K = \varepsilon^{-1/3} \mu^{2/3}. \quad (17)$$

Зададим начальную вариацию функции u как $\text{var}(u_0)$, длину отрезка определим как L , характерный масштаб времени определяется как $T = L/\text{var}(u_0)$. Тогда скорость диссипации определяется как

$$\varepsilon = \text{var}(u_0)/L; \quad (18)$$

тогда коэффициент вязкости μ определяется как

$$\mu = \text{var}(u_0) \frac{(l_K)^{3/2}}{\sqrt{L}}. \quad (19)$$

Энергетический спектр пульсаций в заданный момент времени T в общем случае вычисляется как интеграл по сферической оболочке для каждого значения модуля волнового числа k :

$$E(k) = \frac{1}{2} \oint_{|\mathbf{k}|=k} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, T) \hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, T) d\mathbf{k}. \quad (20)$$

Для одномерного случая (20) упрощается до выражения $E(k) = \hat{u}(k)\hat{u}(-k)/2$. Здесь \hat{u} — коэффициенты разложения решения u в ряд Фурье по тригонометрическим полиномам. В отличие от работ [Pirozzoli, 2006; Fauconnier, Dick, 2013; Глотов, 2014], для получения эталонного спектра будем использовать спектральный метод. Для этого уравнение (13) переписывается как

$$d\hat{u}_k/dt + ik \sum_{q=1}^{N/2+1} \hat{u}_q \hat{u}_{k-q} = -k^2 \hat{u}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 + 1. \quad (21)$$

Здесь половина спектра взята из-за условия на действительность функции u : $\hat{u}_{-k} = (\hat{u}_k)^*$, аналогичное условие применяется при вычислении $E(k)$; метод интегрирования по времени — Дормана–Приса 8-го порядка.

Для вычисления спектра предполагаем, что масштаб Колмогорова достигается на четырех сеточных расстояниях (аналогично работе [Глотов, 2014]), всего для полного спектра берется $N = 2048$ гармоник. Тогда $l_K = 2\pi/512$, максимальную вариацию функции в начальный момент примем $var(u_0) = 0.2$, тогда вязкость по (19) составит $\mu \sim 0.0001084688$. При $l_K = 2\pi/1024$, т.е. масштаб Колмогорова достигается на двух сеточных расстояниях (более жесткое требование, чем в [Глотов, 2014]), $\mu \sim 3.8349519697 \cdot 10^{-5}$. Для 100 случайных реализаций начальных условий по выражению (21) для времени $T = 50$ посчитан спектр энергии пульсаций, представленный на рис. 11 и 12 синей кривой. Зеленой кривой показан спектр начальных условий. Видно, что основная часть энергии сосредоточена в низких частотах (в гармонике с номером 15). Далее, за счет нелинейности происходит перераспределение энергии к синей кривой. Для 1D-уравнения Бюргера известно, что наклон кривой в инерциальной области на логарифмической плоскости составляет -2 . Данная асимптотика показана прямой сверху на рисунках. Для проверки затухания спектра пульсаций проводится моделирование каждой из схем WENO и, для сравнения, схемой TVD с ограничителем MC. Для дискретизации диффузионной части, без внесения ошибок аппроксимации, используется псевдоспектральный метод с применением библиотеки FFTW для реализации быстрого преобразования Фурье.

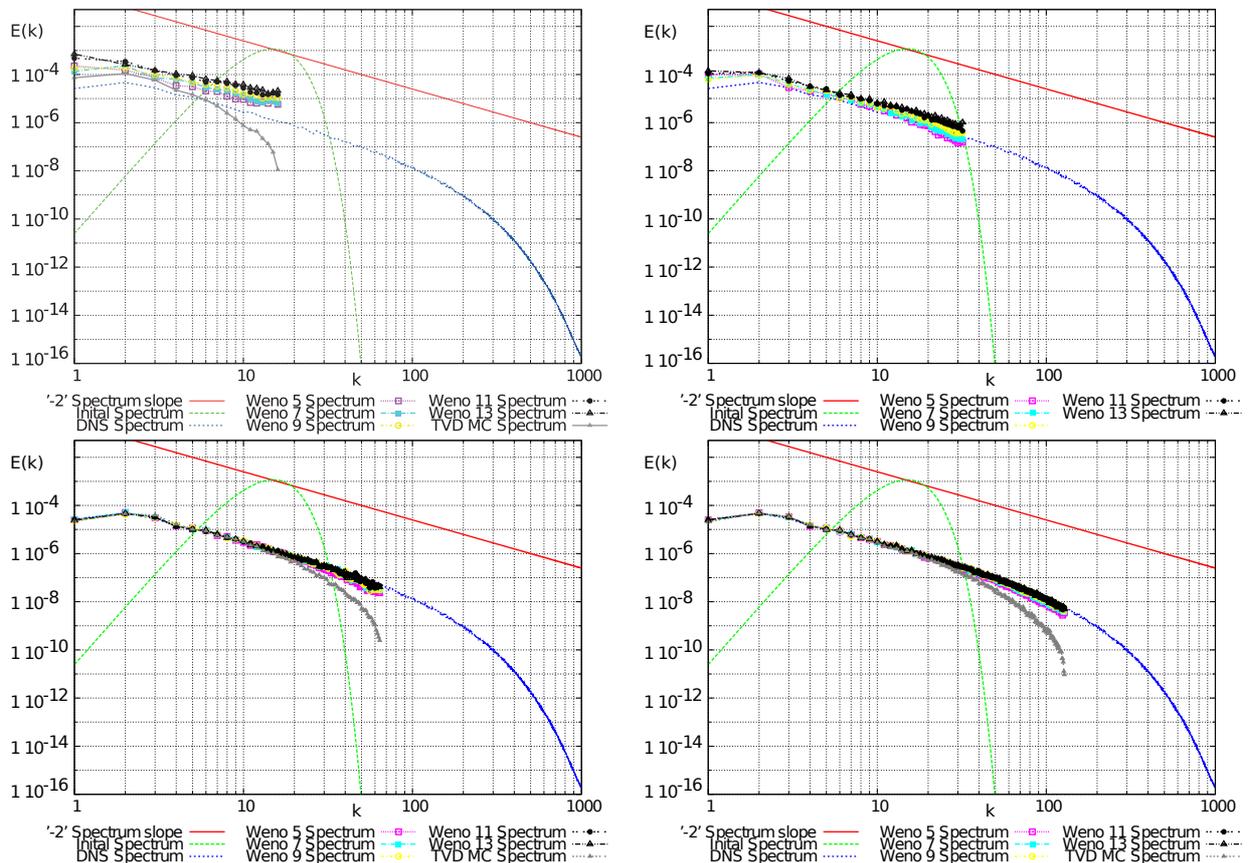


Рис. 11. Энергетические спектры пульсаций для уравнений Бюргера на различных сетках, осредненные по 100 реализациям, $T = 50$, $l_K = 2\pi/512$. Размеры сеток слева направо, сверху вниз: 32, 64, 128, 256. Ось абсцисс — волновое число k , ось ординат — энергия $E(k)$

Полученные результаты, представленные на рис. 11 и 12, говорят о следующем. При слишком грубой сетке (32 ячейки) спектр схем WENO завывает начальное волновое число, поскольку отсутствует естественная для данной задачи диссипация. Аналогично наблюдалось повышение полной вариации в 1D-уравнении Хопфа в начальный момент. Для сетки в 64 элемента

уже наблюдается правильное поведение спектра энергии, кроме как для схемы WENO13. На больших сетках (128 и 256 элементов) видно, что все схемы хорошо воспроизводят промежуточный инерциальный масштаб, при этом небольшое занижение энергии наблюдается только для схемы WENO5. Для сравнения показаны результаты TVD-схемы, где видно проявление схемной вязкости. При более жестком требовании на масштаб Колмогорова (рис. 12), схемы ведут себя практически аналогично, наблюдается незначительное увеличение диссипации для схем WENO5 и WENO7. На грубых сетках (32 и 64 элемента) поведение сеток не значительно отличается от показанного на рис. 11, поэтому не приводится. Полученные результаты показывают возможность применения схем WENO как для DNS-, так и для LES-моделирования. Полученные результаты для схемы WENO5 в работе [Глотов, 2014] имели более диссипативный вид, что, вероятно, связано с применением стандартных вестов WENO5 вместо улучшенных (51, часть 1) и использованием числа CFL ближе к 1, где сильнее проявляются диссипативные свойства нелинейных схем. В результате можно утверждать, что схемы WENO подходят для DNS и LES разрешением 2 ячейки на масштаб Колмогорова. Данные результаты подтверждают выводы по модифицированному волновому анализу.

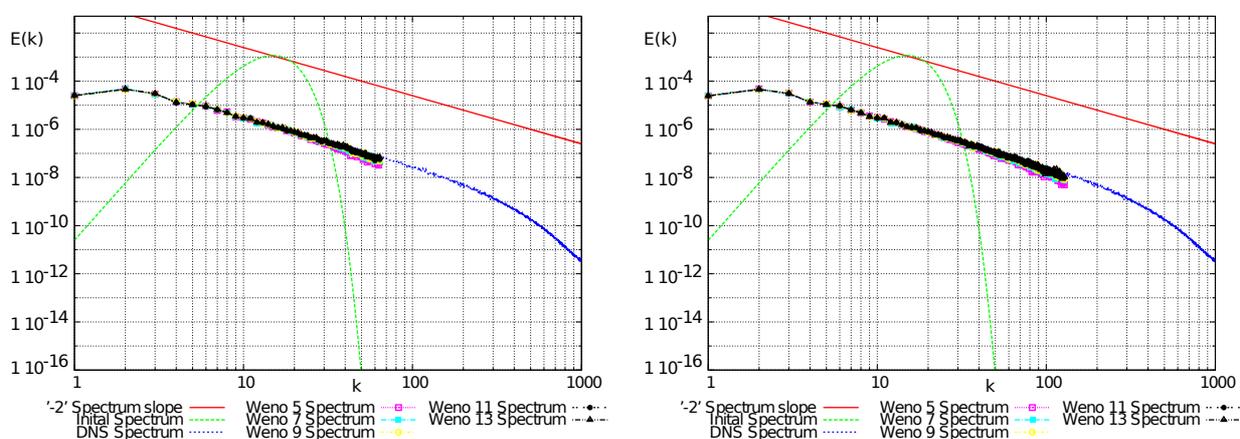


Рис. 12. Энергетические спектры пульсаций для уравнений Бюргера на различных сетках, осредненные по 100 реализациям, $T = 50$, $l_K = 2\pi/1024$. Размеры сеток слева направо: 128, 256. Ось абсцисс — волновое число k , ось ординат — энергия $E(k)$

Двухмерное уравнение переноса

Для расчета двухмерных задач применяется метод расщепления по направлениям, поскольку сетка является ортогональной. Условие устойчивости C выбирается аналогично одномерным случаям. Рассматривается начально-краевая задача (с периодическими граничными условиями) для уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}, F) &= 0, \\ F(0, \mathbf{x}) &= F_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} &= [0; 1] \times [0; 1]. \end{aligned} \quad (22)$$

Одной из наиболее показательных задач является тест Залесака [Zalesak, 1979]. Суть теста заключается во вращении начального распределения с особенностями (диск с щелью по центру) так, чтобы перенос был не выровнен по сетке. Векторы скорости задаются как $\mathbf{u}_0 = (\pi(50 - 100j_x/N_y)/314; (j_y 100/N_x - 50)/314)^T$, аналогично работе [Zalesak, 1979], что формирует вращающееся векторное поле. Здесь j_x — индекс сетки по направлению x , N_x — количество элементов по направлению x , аналогично y . Начальное условие F_0 показано на рис. 13. Обычно берется

одно полное вращение, т. е. перенос начального распределения на 2π . Время одного вращения T можно определить как $T = 2\pi N_x$. Для данного теста будем сравнивать поле F после проведения 50 вращений, т. е. $T = 100\pi N_x$. Все вычисления выполнены с C , рекомендованными для разрывных решений.

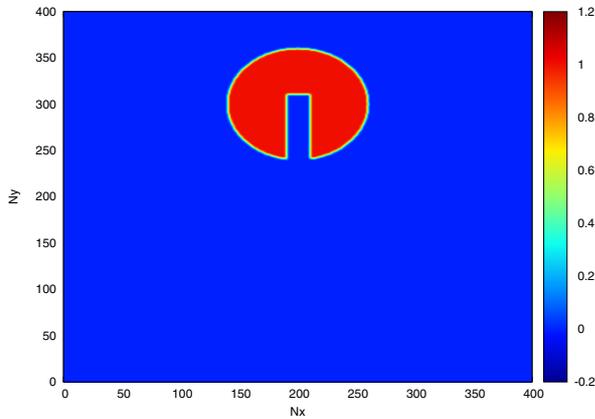


Рис. 13. Начальные условия F_0 теста Залесака. Сетка 400×400

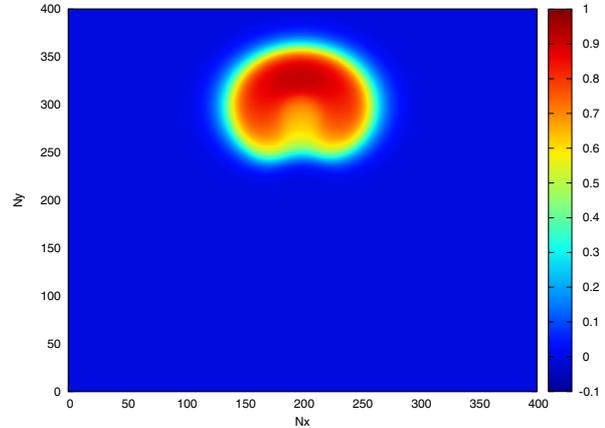


Рис. 14. Решение F при $T = 50$ методом TVD с ограничителем *SuberBee* на сетке 400×400

Из рисунков видно, что наиболее приемлемый результат получен при использовании схем WENO7 и WENO9. Схема WENO5 является излишне диссипативной, схема WENO11 имеет незначительный эффект Гиббса (видно на сетке 100×100 , рис. 18). Схема WENO13 выдает излишне зашумленный результат. В целом можно сказать, что применение схем WENO значительно улучшает результат по сравнению с TVD-схемами (для сравнения см. рис. 14, расчет выполнен на сетке 400×400).

Одномерные уравнения невязкого газа

Исследуемые в данной работе схемы WENO были применены к решению начально-краевых задач для уравнений динамики невязкого газа (уравнения Эйлера). Исходные уравнения для одномерного течения $n = 1$ записываются в консервативной форме (1, часть 1), для них $\mathbf{u} = (\rho; \rho u; E)^T$, $\mathbf{f} = (\rho u; \rho u^2 + p; (E + p)u)^T$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Здесь $E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$ — полная энергия газа, e — внутренняя энергия газа, $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2)$ — давление газа, γ — показатель адиабаты газа, для воздуха — 1.4. Ставится начально-краевая задача, для которой задаются начальный вектор \mathbf{u}_0 и граничные условия. В случае постановки выходных/входных краевых условий используются характеристические условия, более детально см. [Toro, 1999] (в рамках данной статьи вопрос постановки граничных условий не обсуждается). Данное уравнение при $\rho > 0, E > 0$ является гиперболическим. В связи с тем, что консервативные переменные (вектор переменных \mathbf{u}) являются зависимыми, применяется характеристическое расщепление системы, для того чтобы избавиться от паразитных осцилляций при реконструкциях, более подробно см. [Scandaliato, Liou, 2010] (левые и правые собственные векторы можно выписать из [Куликовский, Погорелов, Семенов, 2001, с. 150]). Вначале система уравнений переводится в характеристические переменные, в них проводится реконструкция схемой WENO, после чего результат возвращается в консервативные переменные. Для решения задачи распада разрыва на гранях конечных объемов применяется схема Годунова, которая решается методом Ньютона. Рассматриваются несколько тестовых задач.

Первая задача — перенос плотности, т. е. гладкое решение с периодическими граничными условиями на отрезке $I = [0, 2]$, которое позволяет проверить поведение схем при характери-

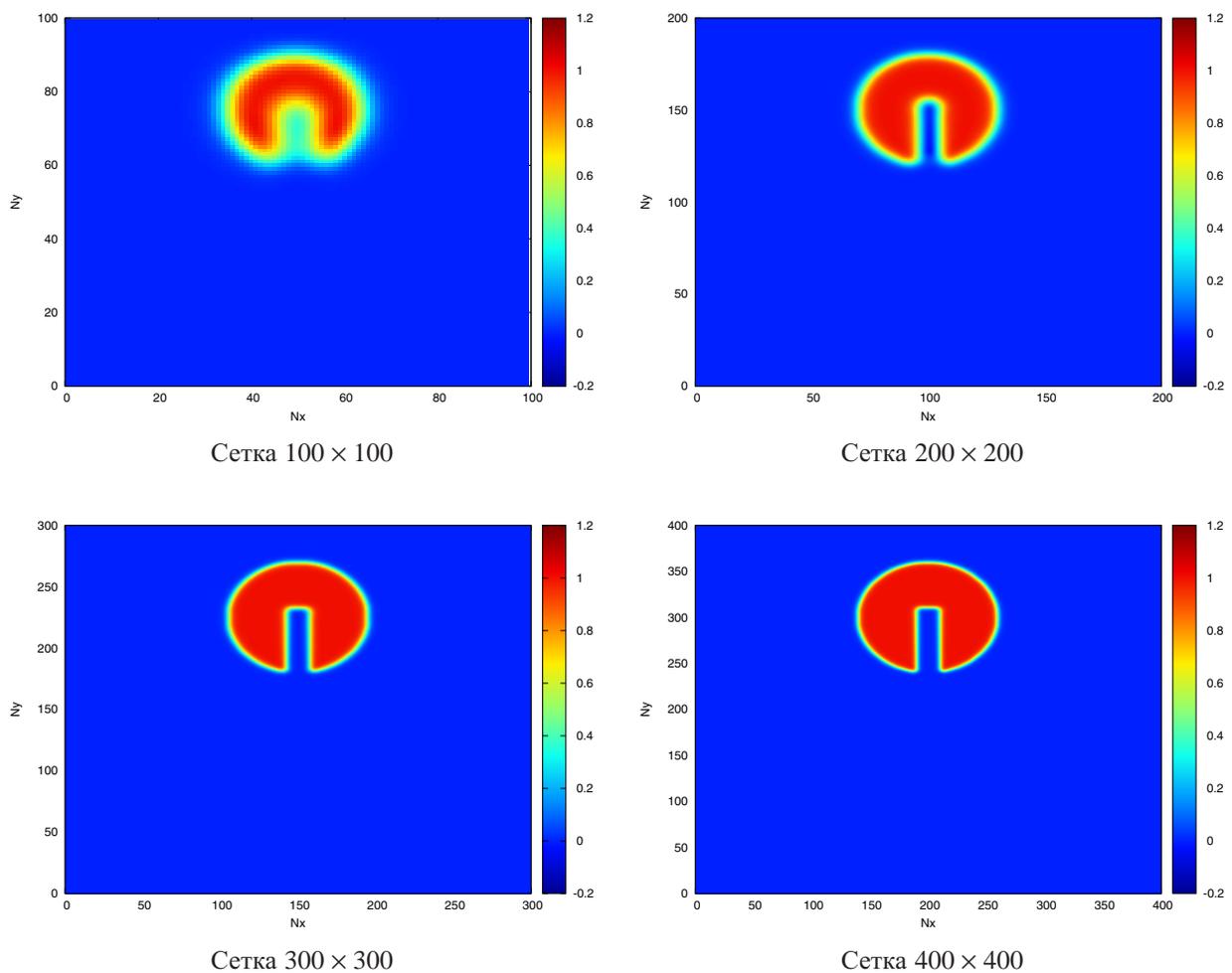


Рис. 15. Решение теста Залесака, 50 полных вращений, WENO5, различные сетки

ческом расщеплении и достижимость порядка аппроксимации. Начальные условия ставятся как

$$\begin{aligned}\rho(x, 0) &= 1 + 0.2 \sin(\pi x), \\ u(x, 0) &= 1, \\ p(x, 0) &= 1.\end{aligned}\tag{23}$$

Аналитическое решение для плотности определяется как

$$\rho(x, t) = 1 + 0.2 \sin(\pi(x - t)).\tag{24}$$

Результаты экспериментального определения порядка приведены в таблице 4 для переноса на 50 периодов. Как видно из таблицы, все схемы достигают теоретического порядка аппроксимации и при этом применение характеристического расщепления не влияет на порядок схемы. Для схем WENO9–WENO13 падение порядка в последних строках связано с достижением вычислительной машинной точности.

Вторая задача — классическая задача Сода [Sod, 1978], для которой есть точное решение, получаемое итерационным методом. Рассматривается отрезок $I = [0, 1]$, время расчета $t = 0.2$. Краевые условия — условия свободного истечения газа из области. Вектор начальных условий

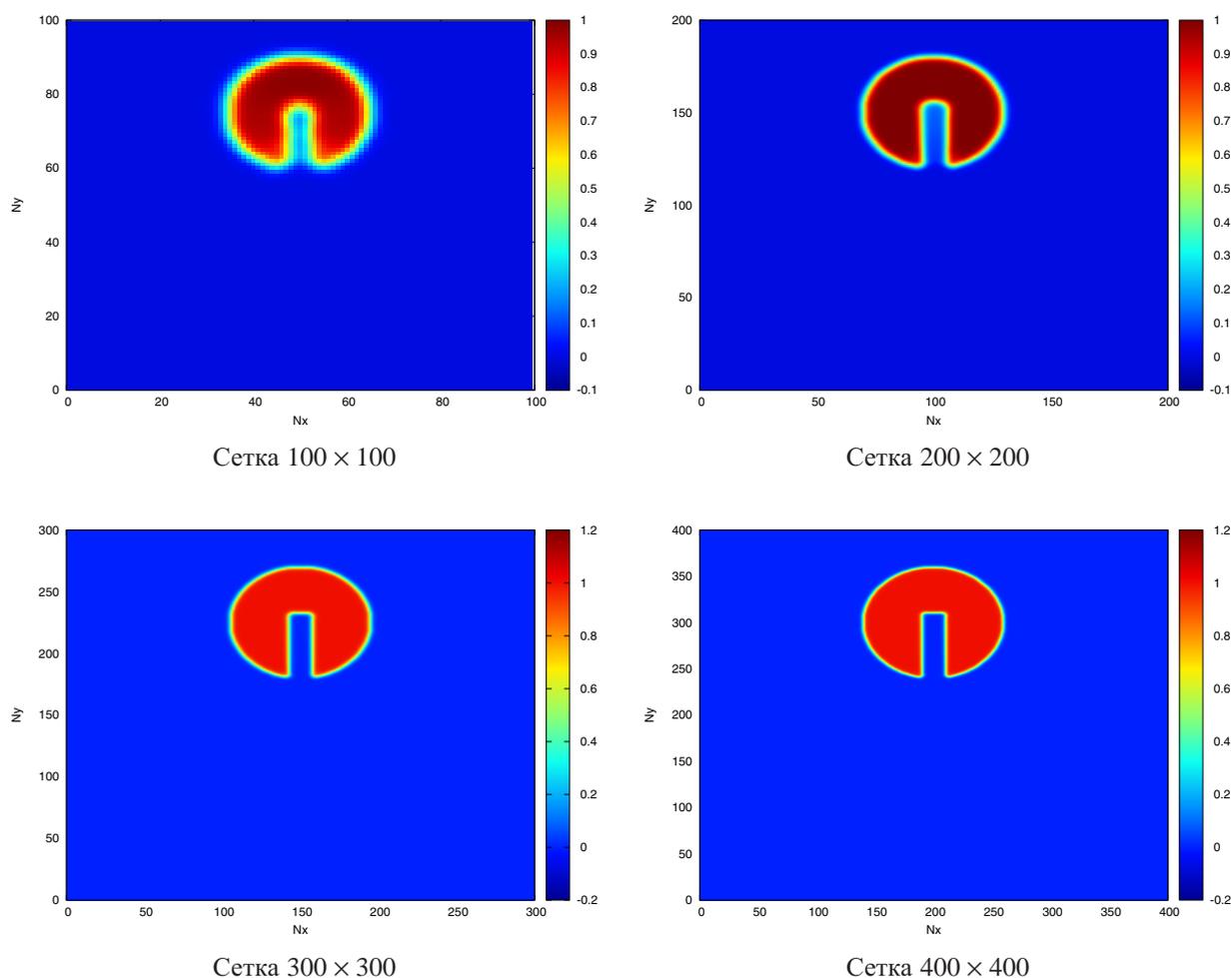


Рис. 16. Решение теста Залесака, 50 полных вращений, WENO7, различные сетки

Таблица 4. Экспериментальное определение порядка схем WENO на гладком решении для уравнения Эйлера

N	WENO5		WENO7		WENO9		WENO11		WENO13	
	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord	L_2	Ord
10	$1.03 \cdot 10^{-2}$		$1.86 \cdot 10^{-4}$		$1.58 \cdot 10^{-4}$		$1.38 \cdot 10^{-6}$		$4.30 \cdot 10^{-6}$	
20	$5.48 \cdot 10^{-4}$	4.23	$1.58 \cdot 10^{-6}$	6.89	$4.37 \cdot 10^{-7}$	8.50	$7.43 \cdot 10^{-10}$	10.86	$3.02 \cdot 10^{-10}$	13.80
40	$1.75 \cdot 10^{-5}$	4.97	$1.26 \cdot 10^{-8}$	6.97	$8.25 \cdot 10^{-10}$	9.05	$3.56 \cdot 10^{-13}$	11.03	$3.61 \cdot 10^{-14}$	13.03
60	$2.27 \cdot 10^{-6}$	5.03	$7.38 \cdot 10^{-10}$	6.99	$1.76 \cdot 10^{-11}$	9.49	$4.09 \cdot 10^{-15}$	11.01	$3.24 \cdot 10^{-15}$	5.94
80	$5.35 \cdot 10^{-7}$	5.03	$9.86 \cdot 10^{-11}$	7.00	$1.26 \cdot 10^{-12}$	9.17	$2.78 \cdot 10^{-15}$	1.34		
120	$6.96 \cdot 10^{-8}$	5.03	$5.77 \cdot 10^{-12}$	7.01	$3.17 \cdot 10^{-14}$	9.07				
160	$1.64 \cdot 10^{-8}$	5.03	$7.73 \cdot 10^{-13}$	7.00	$3.21 \cdot 10^{-15}$	7.96				

задается как

$$(\rho, u, p)^T = \begin{cases} (1, 0, 1)^T, & x \leq 1/2, \\ (0.125, 0, 0.1)^T, & x > 1/2. \end{cases} \quad (25)$$

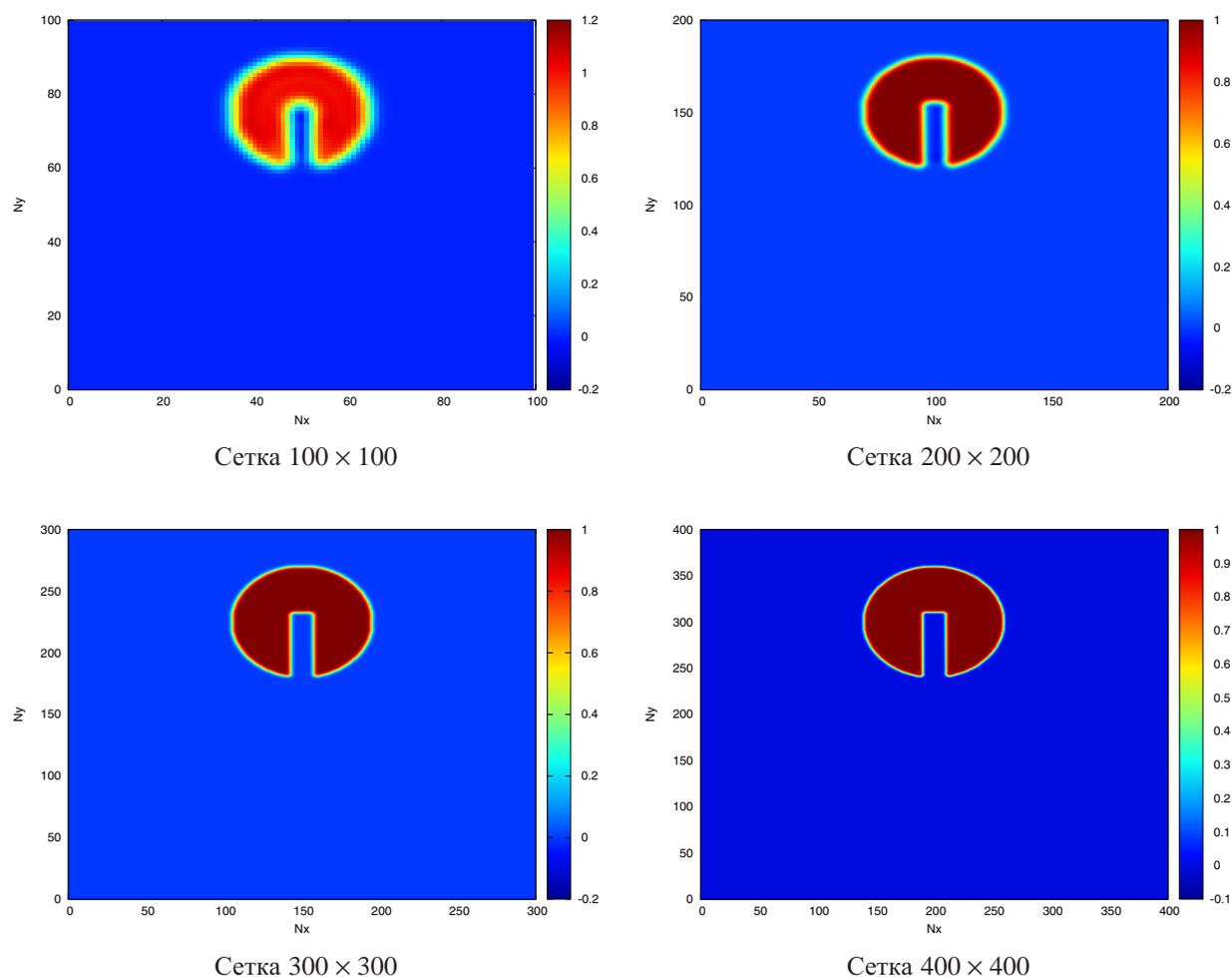


Рис. 17. Решение теста Залесака, 50 полных вращений, WENO9, различные сетки

В результате развития распада разрыва образуются ударная волна, контактный разрыв ($x > 0.5$) и волна разрежения ($x < 0.5$). Сопоставление результатов показано на рис. 20 для достаточно грубой сетки — 100 элементов. Как и ожидалось, наблюдается эффект Гиббса для схем WENO11 и WENO13. Ширина контактного разрыва для схем WENO5–WENO11 приблизительно совпадает с оценкой, выполненной из условия замены разрыва на гладкую функцию (93, часть 1) (см. рис. 4, часть 1). В целом решение данной задачи можно считать удовлетворительным.

Третья задача — взаимодействие ударной волны с числом Маха 3 с осциллирующим решением [Shu, Sher, 1989] (по терминологии авторов — «турбулентностью»). Краевые условия — условия свободного истечения газа из области $I = [-5, 5]$. Начальные условия задаются как

$$(\rho, u, p)^T = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10\frac{1}{3})^T, & -5 \leq x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1)^T, & -4 \leq x < 5. \end{cases} \quad (26)$$

Время расчета $t = 1.8$. Данная задача не имеет аналитического решения, в качестве референтного решения принимается решение, полученное на схеме WENO9 на сетке 3200 элементов. Суть задачи — взаимодействие ударной волны с осциллирующим решением с образованием за ударной волной вторичного осциллирующего решения (увеличенной амплитуды). Результаты решения задачи на разных сетках приведены на рис. 21. Видно, что схемы WENO9–WENO13 уже на грубой

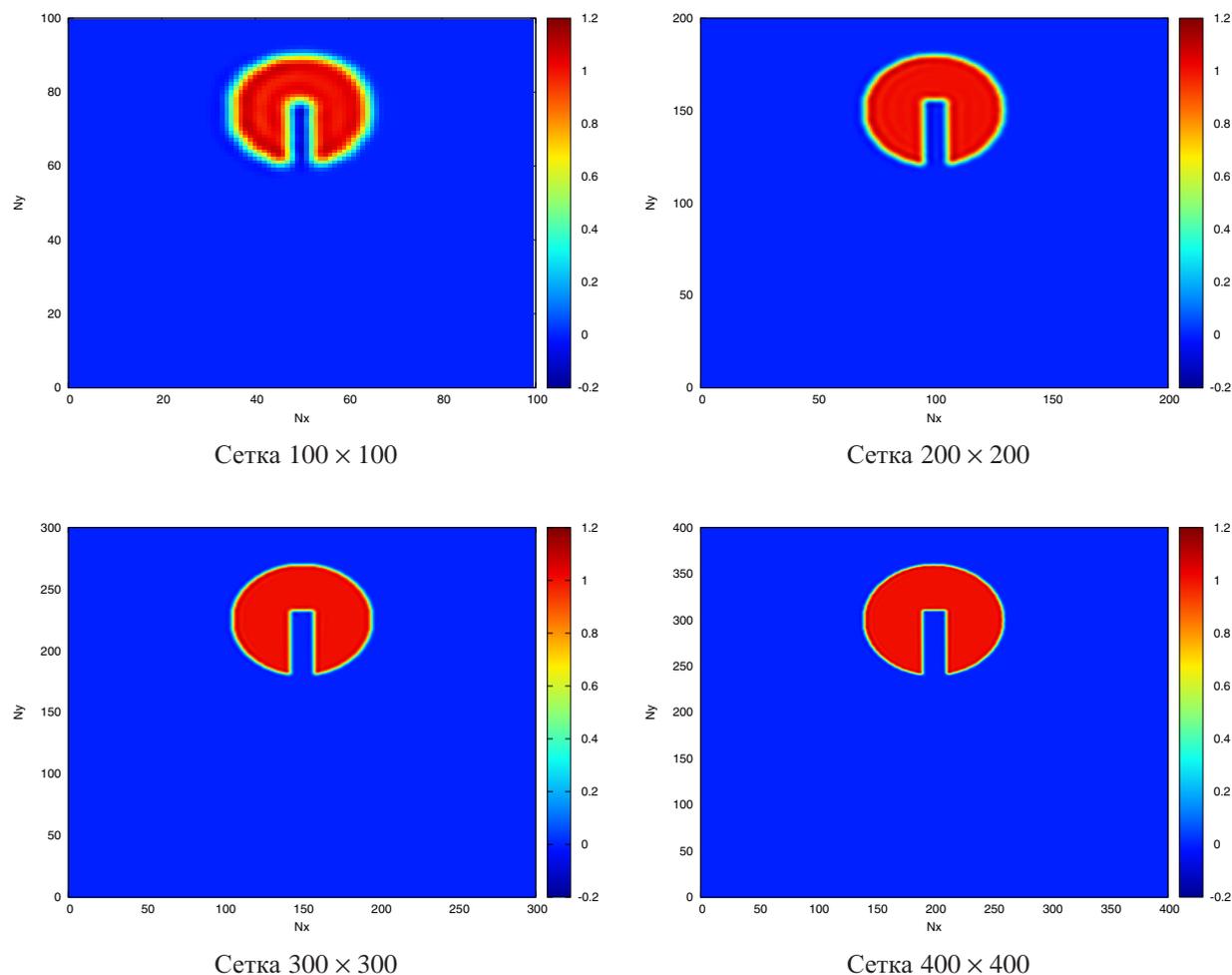


Рис. 19. Решение теста Залесака, 50 полных вращений, WENO13, различные сетки

ных в газах с неоднородной плотностью, находящихся в гравитационном поле. Данная задача имеет гладкое решение и характеризует качество схем на сложных гладких решениях. Условия задачи взяты из работы [Liska, Wendroff, 2003, с. 1008]. Область расчета $I = [0, 1/6] \times [0, 1]$, краевые условия ставятся как условия отражения на всех границах, в уравнения сохранения количества движения вводится ускорение $\mathbf{g} = (0, 0, -0.1, 0)^T$. Начальные условия:

$$(\rho, u_x, u_y, p)^T = \begin{cases} (2, 0, 0, 2g_y h)^T; & h < 1/2 + 1/100 \cos(6\pi x), \\ (1, 0, 0, 1g_y(h - 1/2) + 2g_y/2)^T; & h \geq 1/2 + 1/100 \cos(6\pi x). \end{cases} \quad (27)$$

Здесь h — координата по оси y , имеющая направление $-y$. В соответствии с условиями в работе [Liska, Wendroff, 2003], контакт газа с разной плотностью сглажен. Степень сглаживания в указанной работе не приведена и подбиралась экспериментально. Похожие результаты сглаживания получены при применении уравнения диффузии по неявной схеме для плотности с коэффициентом диффузии 0.1, время расчета — 0.25. Решение задачи проводится как и в указанной работе на сетке 100×400 , время расчета $t = 8.5$. Полученные результаты приведены на рис. 22, где показано зеркально отраженное распределение плотности и шпирен, который характеризует область раздела между двумя газами. В качестве сравнения взято решение с применением схемы TVD с ограничителем MC (монотонизованные центральные разности), см. [Van Leer,

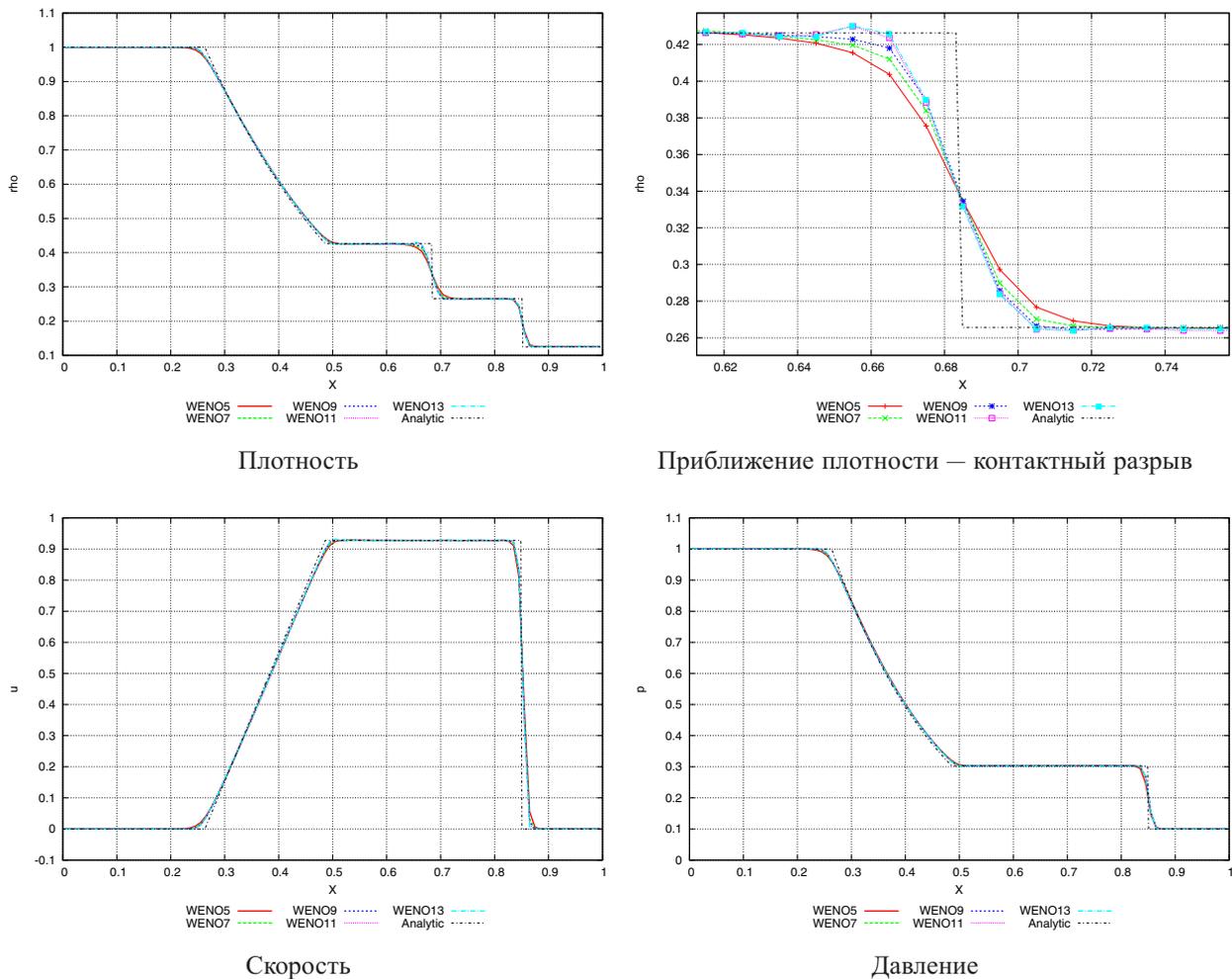


Рис. 20. Решение задачи Сода, сетка — 100 элементов

1977]. Видно, что схемы WENO обладают лучшей разрешающей способностью. Как сообщается в работе [Liska, Wendroff, 2003], область смешения теряет устойчивость достаточно быстро с образованием вторичных вихревых структур. Видно, что на TVD-схеме такие структуры не образуются.

В качестве демонстрации на рис. 23 показано решение на точной сетке 1000×3000 элементов с применением схемы WENO9. Видно, что в отсутствие вязкости в модели уравнений Эйлера вихревые структуры являются фактически бесконечно вложенными и глубина вложения определяется только схемной вязкостью.

Задача 2. Двойное маховское отражение. Задача является стандартным тестом на схемы высокого порядка для гиперболических систем уравнений. Впервые была предложена в работе [Woodward, Colella, 1984], ее постановка и анализ детально изложены в работе [Kemm, 2014]. Задача ставится как натекание ударной волны на клин, установленный под углом $\pi/6$. При таком взаимодействии образуется ударная конфигурация с двумя тройными точками. Более детально см. [Kemm, 2014, с. 2]. Область расчета $I = [0, 4] \times [0, 1]$, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Для удобства система координат выравнена по углу установки клина. В начальный момент ударная волна находится на клине в точке $x_0 = 1/6, y_0 = 0$ и понимается вверх под наклоном $\pi/3$. Начальные условия слева (L)

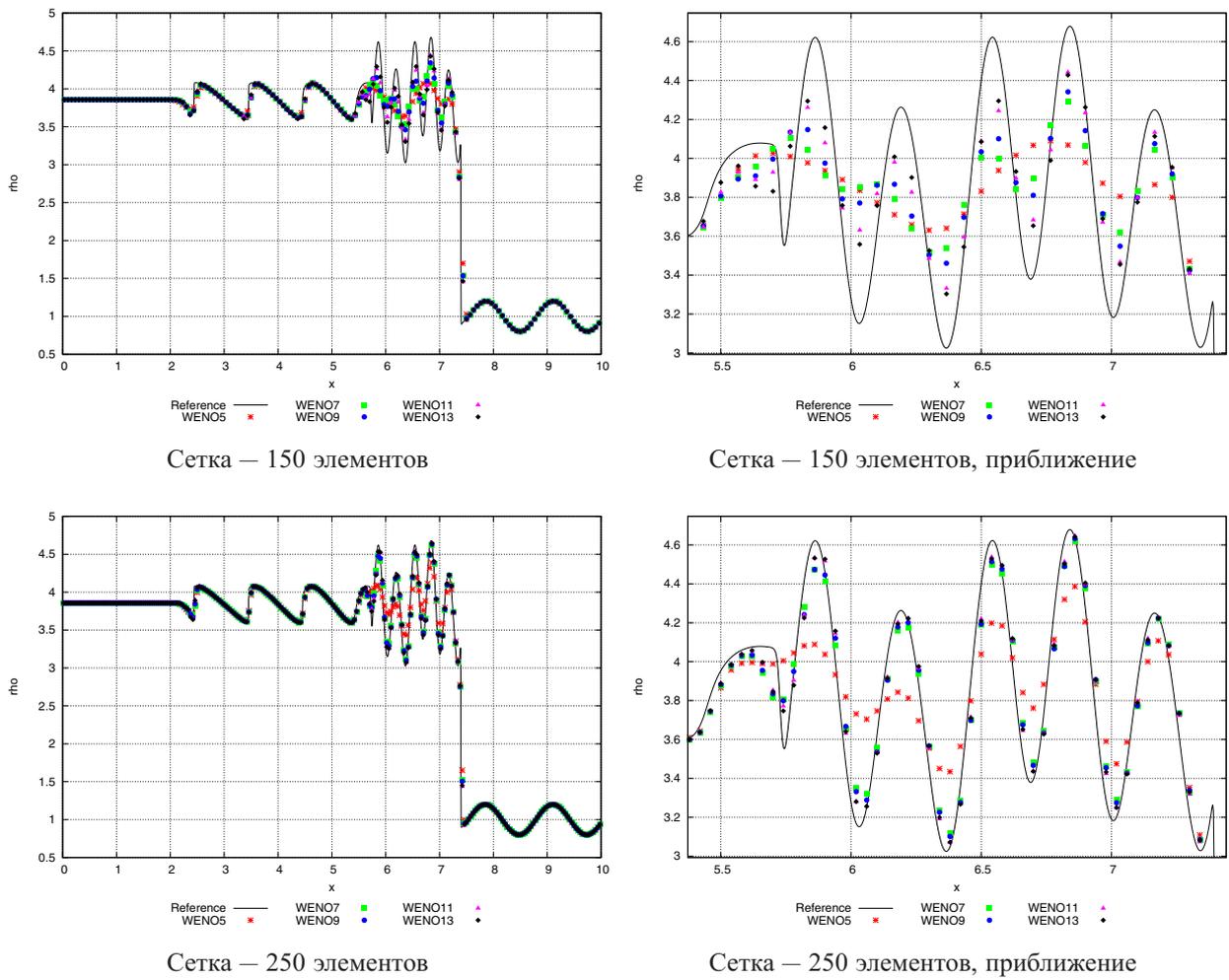


Рис. 21. Решение задачи (26). Функция плотности, $t = 1.8$

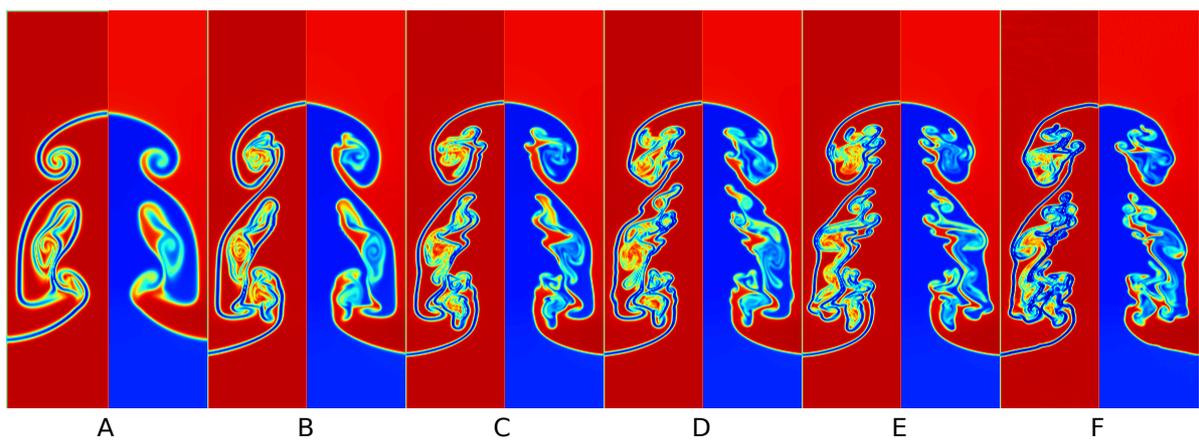


Рис. 22. Неустойчивость Рэля–Тейлора. Расчет на сетке 100×400 . Для каждой схемы шпирен слева, плотность справа. А) TVD MC, В) WENO5, С) WENO7, D) WENO9, Е) WENO11, F) WENO13. Время расчета $t = 8.5$ с

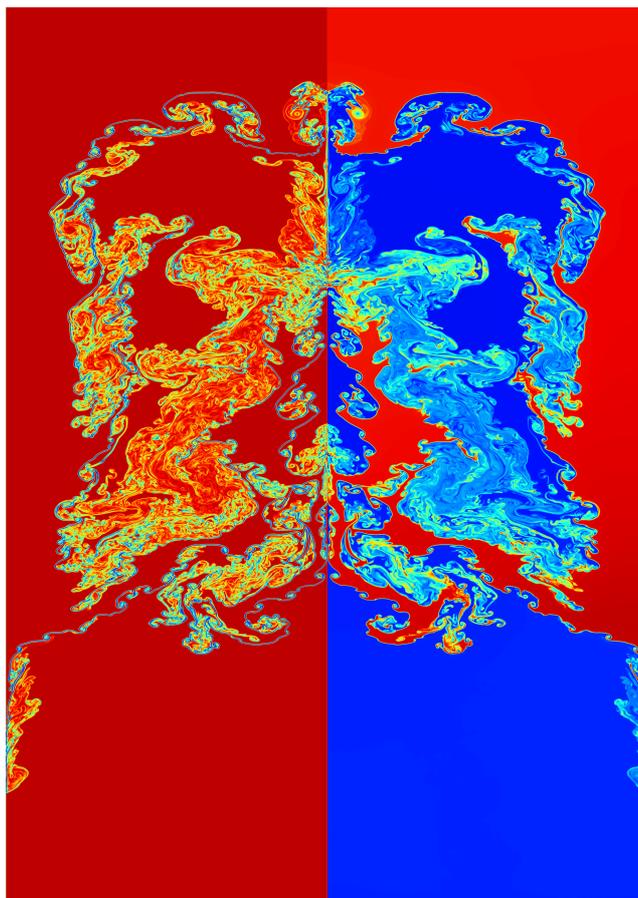


Рис. 23. Неустойчивость Рэля–Тейлора. Шлирен слева и плотность справа. Сетка 1000×3000 , схема WENO9. Время расчета $t = 8.5$ с

и справа (R) от ударной волны задаются как

$$\begin{aligned} (\rho, \rho u_x, \rho u_y, E)_L^T &= (8.0, 57.1597, -33.0012, 563.544)^T; \\ (\rho, \rho u_x, \rho u_y, E)_R^T &= (1.4, 0, 0, 2.5)^T. \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия — входные характеристические условия слева от ударной волны, выходные — справа. Для удобства постановки граничных условий область расчета продлена до $I = [0, 4] \times [0, 6.64]$ так, чтобы на верхней линии ставилось только условие входа. На нижней линии — условие отражения. Время расчета $t = 0.2$. Решение ищется на сетке 800×1330 , анализ результатов проводится в области $I = [0, 3] \times [0, 1]$.

Важным результатом является четкое детектирование двух тройных точек, а для схем высокого порядка — неустойчивость контактных разрывов. Результаты для схемы первого порядка, TVD и схем WENO приведены на рис. 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24. Из рисунков видно, что в схеме первого порядка полностью отсутствует одна из тройных точек. В схеме TVD также слабо видно вторую линию второй тройной точки, расположенной ближе к точке начала координат. В схеме WENO5 уже просматривается правильная вторичная конфигурация и наблюдается образование начальной неустойчивости контактного разрыва. Схемы WENO7–WENO11 уже полностью корректно разрешают данную задачу с четким представлением развития неустойчивостей. Схема WENO13 является излишне зашумленной, что четко видно на рис. 30 по сравнению с любой другой схемой.

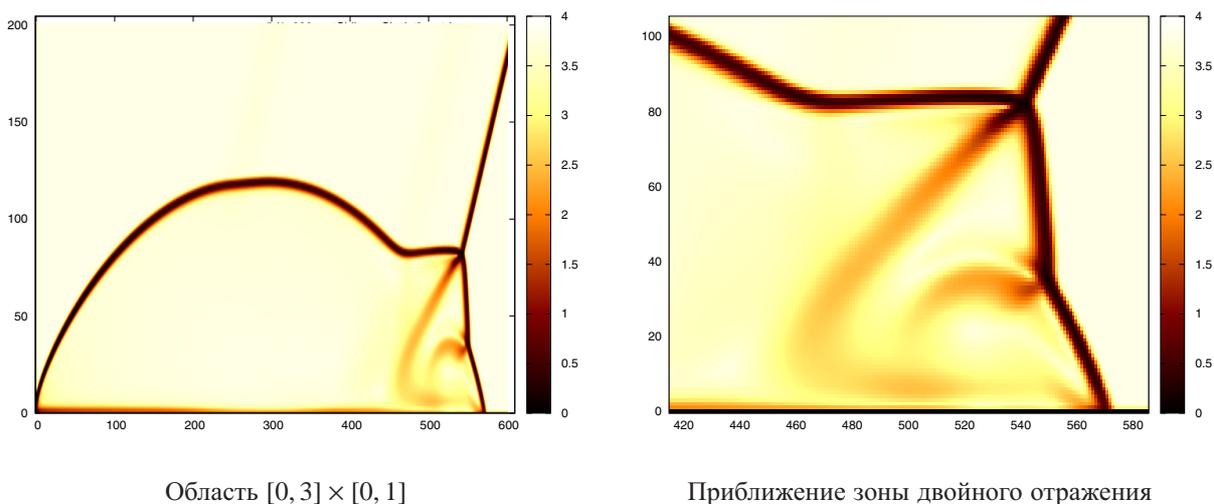


Рис. 24. Шлирен, картина двойного маховского отражения, первый порядок

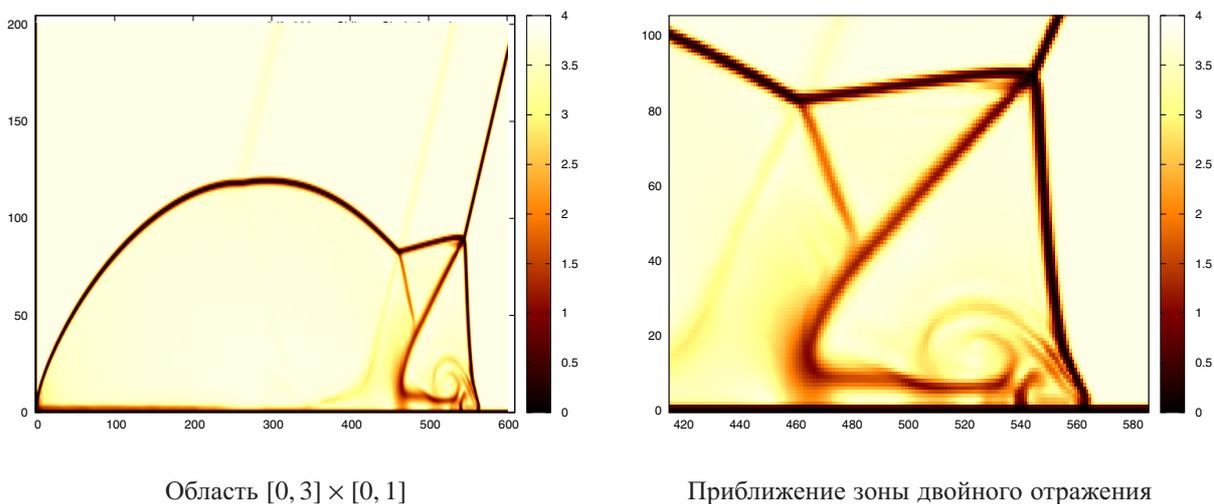


Рис. 25. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема TVD MC

Вывод

Полученные результаты говорят о следующем. Модифицированный волновой анализ и моделирование затухания случайного начального условия в периодической области для уравнения Бюргера показали возможность применимости схем WENO7–WENO13 для прямого численного моделирования и моделирования динамики больших вихрей. Схема WENO5 является более диссипативной и требует аккуратного анализа при применении в задачах такого класса. Подтверждены выводы, сделанные в первой части работы, касательно влияния нарушения условий устойчивости на нелинейный механизм схем, что отчетливо видно из результатов моделирования: рис. 2–6, 10, таблицы 2, 3. Результаты моделирования достаточно сложных задач с разрывным (встречные волны для уравнения Хопфа, тест Залесака), гладким (неустойчивость Рэлея–Тейлора) и комбинированным (взаимодействие ударной волны с осциллирующим решением, двойное маховское отражение) решениями показали широкий диапазон области применимости рассматриваемых схем.

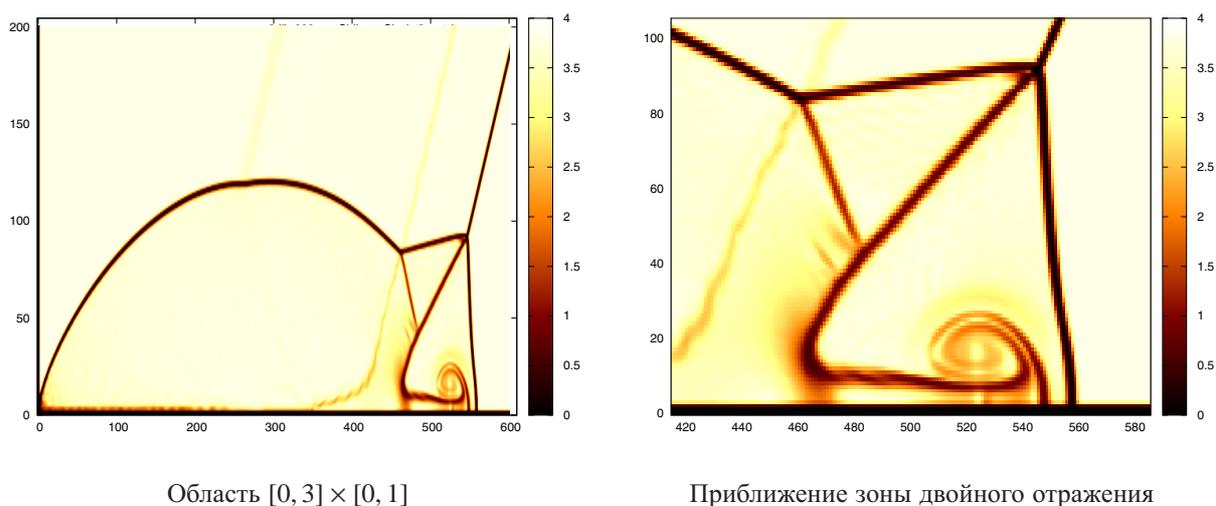


Рис. 26. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема WENO5

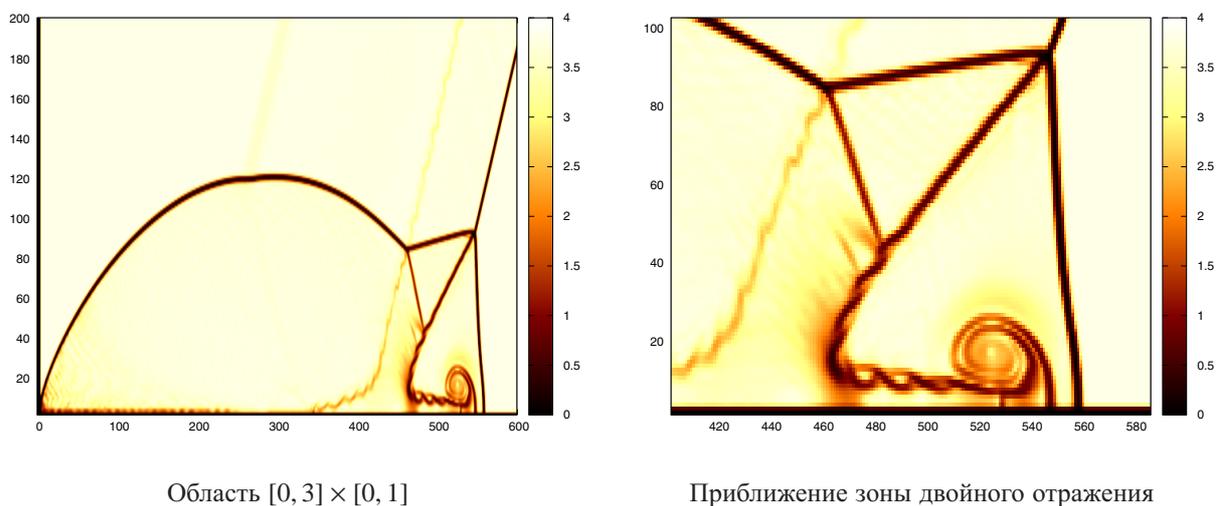
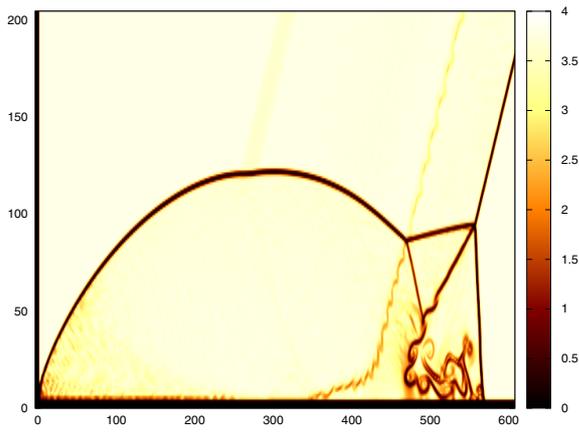
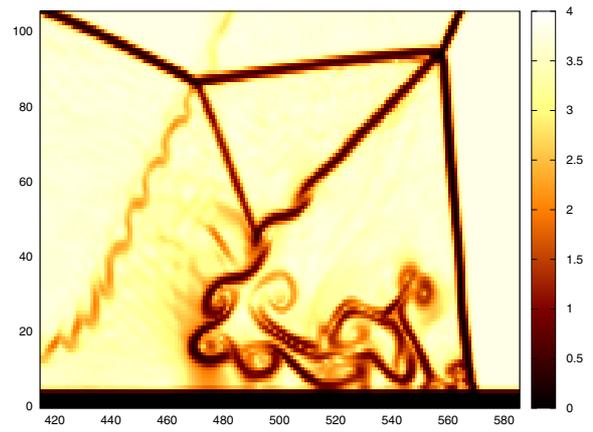


Рис. 27. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема WENO7

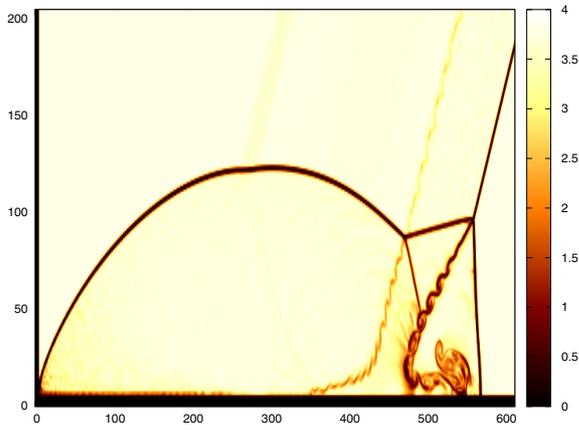
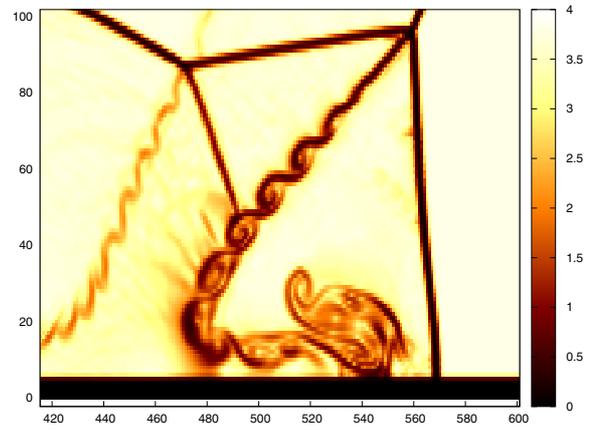
Заключение по первой и второй частям

В работе выполнен достаточно полный анализ устойчивости стандартных схем WENO вплоть до схем 13-го порядка. Приведена необходимая информация для построения схем. Из полученных условий устойчивости можно доказать сходимость схем к гладкому решению и сходимость в слабом в общем случае (с применением теоремы 6.1 из [Jiang, Shu, 1996, с. 211]). Показаны спектральные свойства схем как путем применения модифицированного волнового анализа, так и экспериментально, с помощью анализа спектра энергии пульсаций для 1D-уравнения Бюргера. Проведенный анализ подкреплен численными примерами, подтверждающими выводы по устойчивости и поведению схем. Также демонстрируется применение схем при решении задач для двухмерных уравнений невязкого газа. В целом автор рекомендует применять схемы WENO7, WENO9 для проведения прямого численного моделирования для задач газовой динамики и WENO11 при гладких решениях. В схеме WENO13 уже заметно проявляется эффект Гиббса

Область $[0, 3] \times [0, 1]$ 

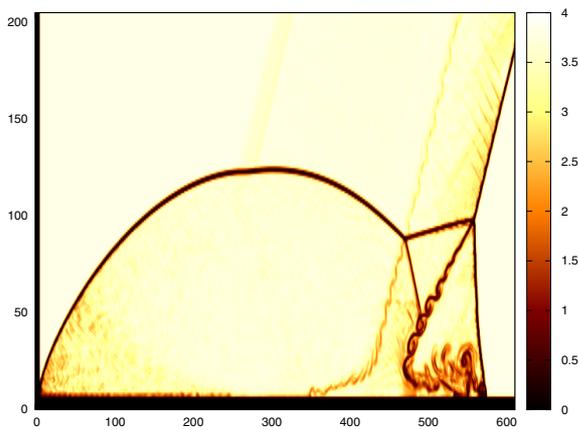
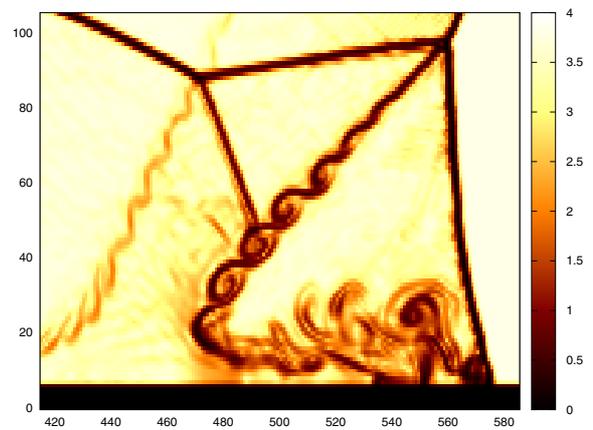
Приближение зоны двойного отражения

Рис. 28. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема WENO9

Область $[0, 3] \times [0, 1]$ 

Приближение зоны двойного отражения

Рис. 29. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема WENO11

Область $[0, 3] \times [0, 1]$ 

Приближение зоны двойного отражения

Рис. 30. Шлирен, картина двойного маховского отражения, схема WENO13

на больших градиентах решений. Также рекомендуется следовать оценкам по числам Куранта, указанным в выводе по части 1 настоящей статьи.

Автор выражает признательность Рябкову Олегу Игоревичу за ценные замечания и обсуждение работы.

Список литературы (References)

- Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Бином; Лаборатория знаний, 2003. — 636 с.
Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislennye metody [Numerical methods]. — М.: Binom; Laboratorija znaniy, 2003.
- Васильев Л. А.* Теневые методы. — М.: Наука, 1968.
Vasil'ev L. A. Tenevye metody [Shadow graph methods]. — М.: Nauka, 1968.
- Глотов В. Ю.* Математическая модель свободной турбулентности на основе принципа максимума: Дисс. к. ф.-м. н. — М.: ИБРАЭ РАН, 2014.
Glotov V. Ju. Matematicheskaja model' svobodnoj turbulentsnosti na osnove principa maksimuma: Diss. k. f.-m. n. [Mathematical model of free turbulence based on the maximum principle]. — М.: IBRAE RAN, 2014.
- Евстигнеев Н. М.* О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 1. Построение и устойчивость // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 5. — С. 721–753.
Evstigneev N. M. O postroenii i svojstvah WENO-skhem pyatogo, sed'mogo, devyatogo, odinnadcatogo i trinadcatogo poryadkov. Chast' 1. Postroenie i ustojchivost' [On the construction and properties of WENO schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen. Part 1. Construction and stability] // Computer research and modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 5. — P. 721–753 (in Russian).
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.
Kulikovskij A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Ju. Matematicheskie voprosy chislennogo reshenija giperbolicheskikh sistem uravnenij [Mathematical problems of numerical solutions for hyperbolic systems of equations]. — М.: Fizmatlit, 2001. — 608 s.
- Evstigneev N. M., Magnitskii N. A.* FSM Scenarios of Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Fluids. — Chapter 10 in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos — Theory and Applications. INTECH. — 2013. — P. 250–280.
- Fauconnier D., Dick E.* Spectral analysis of nonlinear finite difference discretizations // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2013. — No. 246. — P. 113–121.
- Jiang G. S. and Shu C. W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. — 1996. — No. 126 (1). — P. 202–228.
- Kemm F.* On the Proper Setup of the Double Mach Reflection as a Test Case for the Resolution of Gas Dynamics Codes // ArXiv e-prints 1404.6510, Physics — Computational Physics, 76J20, 76L05, 76M99, 2014.
- Leonard B. P.* The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1991. — No. 88. — P. 17–74.
- Liska R., Wendroff B.* Comparison Of Several Difference Schemes On 1d And 2d Test Problems For The Euler Equations // SIAM J. Sci. Comput. — 2003. — Vol. 25, No. 3. — P. 995–1017.
- Macdonald C. B., Mohammad M., Ruuth S. J.* On the Linear Stability of the Fifth-Order WENO Discretization // Journal of Scientific Computing. — 2011. — Vol. 47, Issue 2. — P. 127–149.
- Martin M. P., Taylor E. M., Wu M., Weirs V. G.* A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence // Journal of Computational Physics. — 2006. — No. 220. — P. 270–289.

- Pirozzoli S.* On the spectral properties of shock-capturing schemes // *Journal of Computational Physics*. — 2006. — No. 219. — P. 489–497.
- Quirk J. J., Karni S.* On the dynamics of a shock-bubble interaction // ICASE NASA Report No. 94-75 194978.
- Scandaliato A. L., Liou M.-S.* AUSM-Based High-Order Solution for Euler Equations // AIAA 2010-719. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. 4–7 January 2010, Orlando, Florida.
- Shu C. W., Sher S. O.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, part 2 // *Journal of Computational Physics*. — 1989. — No. 83. — P. 32–78.
- Sod G. A.* Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys.* — 1978. — No. 27. — P. 1–31.
- Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. — Springer-Verlag, 1999. — 686 p.
- Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow // *J. Comp. Phys.* — 1977. — No. 23 (3). — P. 263–275.
- Wang R. and Spiteri R. J.* Linear instability of the fifth-order WENO method // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2007. — No. 5 (5). — P. 1871–1901.
- Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comput. Phys.* — 1984. — No. 54. — P. 115–173.
- Zalesak S. T.* Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // *J. Comput. Phys.* — 1979. — No. 31. — P. 335–362.