**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 Т. 8 № 6 С. 873−884**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 531.38

Новая форма уравнений в моделировании движения тяжелого твердого тела

Г. В. Горр[1], Е. К. Щетинина[2,a]

[1] Институт прикладной математики и механики,
Украина, 83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, д. 74
[2] Киевский национальный торгово-экономический университет,
Украина, 02156, г. Киев, ул. Киото, д. 19

E-mail: [a] elena-0607@bk.ru

Получено 09.10.2016, после доработки — 05.11.2016.
Принято к публикации 09.11.2016.

В динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой известны различные типы редуцированных уравнений. Поскольку уравнения Эйлера–Пуассона допускают три первых интеграла, то в первом подходе получение новых форм уравнений, как правило, основано на этих интегралах. С их помощью можно систему шести скалярных уравнений преобразовать к системе третьего порядка. Однако редуцированная система при указанном подходе будет иметь особенность в виде радикальных выражений относительно компонент вектора угловой скорости. Это обстоятельство препятствует эффективному применению численных и асимптотических методов исследования решения. Во втором подходе используют различные виды переменных задачи: углы Эйлера, переменные Гамильтона и другие. При таком подходе уравнения Эйлера–Пуассона редуцируются либо к системе дифференциальных уравнений второго порядка, либо к системе, для которой эффективны специальные методы. В статье применен метод нахождения приведенной системы, основанный на введении вспомогательной переменной. Эта переменная характеризует смешанное произведение вектора момента количества движения, вектора вертикали и единичного вектора барицентрической оси тела. Получена система четырех дифференциальных уравнений, два из которых являются линейными дифференциальными уравнениями. Данная система не имеет аналога и не содержит особенностей, что позволяет применять к ней аналитические и численные методы исследования. Указанная форма уравнений применена для анализа специального класса решений в случае, когда центр масс тела принадлежит барицентрической оси. Рассмотрен вариант, при котором сумма квадратов двух компонент вектора кинематического момента относительно небарицентрических осей постоянна. Доказано, что этот вариант имеет место только в решении В. А. Стеклова. Найденная форма уравнений Эйлера–Пуассона может быть применена к исследованию условий существования других классов решений. Определенная перспектива полученных уравнений состоит в записи всех решений, для которых центр масс лежит на барицентрической оси, в переменных данной статьи. Это позволяет провести классификацию решений уравнений Эйлера–Пуассона в зависимости от порядка инвариантных соотношений. Поскольку указанная в статье система уравнений не имеет особенностей, то она может рассматриваться при компьютерном моделировании с помощью численных методов.

Ключевые слова: уравнения Эйлера−Пуассона, редукция, новая форма уравнений

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2016 VOL. 8 NO. 6 P. 873–884

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 531.38

A new form of differential equations in modeling of the motion of a heavy solid

G. V. Gorr[1], **E. K. Shchetinina**[2, a]

[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
7 R. Luxembourg st., Donetsk, 83114, Ukraine
[2] Kyiv National University of Trade and Economics,
19 Kyoto st., Kyiv, 02156, Ukraine

E-mail: [a] elena-0607@bk.ru

Received 09.10.2016, after completion — 05.11.2016.
Accepted for publication 09.11.2016.

The different types of the reduced equations are known in the dynamics a heavy rigid body with a fixed point. Since the Euler–Poisson's equations admit the three first integrals, then for the first approach the obtaining new forms of equations are usually based on these integrals. The system of six scalar equations can be transformed to a third-order system with them. However, in indicated approach the reduced system will have a feature as in the form of radical expressions a relatively the components of the angular velocity vector. This fact prevents the effective the effective application of numerical and asymptotic methods of solutions research. In the second approach the different types of variables in a problem are used: Euler's angles, Hamilton's variables and other variables. In this approach the Euler–Poisson's equations are reduced to either the system of second-order differential equations, or the system for which the special methods are effective. In the article the method of finding the reduced system based on the introduction of an auxiliary variable is applied. This variable characterizes the mixed product of the angular momentum vector, the vector of vertical and the unit vector barycentric axis of the body. The system of four differential equations, two of which are linear differential equations was obtained. This system has no analog and does not contain the features that allows to apply to it the analytical and numerical methods. Received form of equations is applied for the analysis of a special class of solutions in the case when the center of mass of the body belongs to the barycentric axis. The variant in which the sum of the squares of the two components of the angular momentum vector with respect to not barycentric axes is constant. It is proved that this variant exists only in the Steklov's solution. The obtained form of Euler–Poisson's equations can be used to the investigation of the conditions of existence of other classes of solutions. Certain perspectives obtained equations consists a record of all solutions for which the center of mass is on barycentric axis in the variables of this article. It allows to carry out a classification solutions of Euler–Poisson's equations depending on the order of invariant relations. Since the equations system specified in the article has no singularities, it can be considered in computer modeling using numerical methods.

Keywords: Euler–Poisson's equations, reduction, new form of the equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 873–884 (Russian).

1. Введение

При исследовании и моделировании движений объектов современной техники (роботов, манипуляторов, спутниковых систем) большое значение имеет модель абсолютно твердого тела. Например, задача о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой является базовой задачей изучения свойств спутников на эллиптической орбите. Математическая модель движения твердого тела с неподвижной точкой описывается системой шести дифференциальных уравнений нелинейной структуры. Для эффективного исследования этих уравнений с помощью аналитических и численных методов многие авторы выполняют редукцию уравнений Эйлера–Пуассона к системе меньшего порядка. В работе [Hess, 1890] на основе первых интегралов получена система трех дифференциальных уравнений относительно компонент угловой скорости. Недостатком этих уравнений является иррациональная структура правых частей, что приводит к дополнительному исследованию решения задачи Коши. Использование численных методов интегрирования уравнений Гесса также затруднительно. Поэтому, как отмечено в книге [Горр, Кудряшова, Степанова, 1978], данные уравнения не нашли применения в динамике твердого тела. Аналогичными свойствами обладают и уравнения, полученные в работе [Билимович, 1911]. Уравнения Ковалевского [Kowalevski, 1908] показали свою эффективность в аналитическом аспекте, так как с помощью этих уравнений не только было получено новое решение уравнений Эйлера–Пуассона, но и выполнено их обобщение на случай движения гиростата [Харламов, 1965]. Уравнения, выведенные Докшевичем [Докшевич, 1992], так же как и уравнения Ковалевского [Kowalevski, 1908], оказались эффективными лишь для частного случая распределения масс твердого тела. В книге [Харламов, 1965] предложен общий метод редукции уравнений Эйлера–Пуассона, на основании которого получены два вида редуцированных уравнений. Анализ решений этих уравнений выполнялся для случая, когда центр масс твердого тела принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции. В монографиях [Горр, Кудряшова, Степанова, 1978; Гашененко, Горр, Ковалев, 2013; Борисов, Мамаев, 2001] приведен обзор и других форм уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Таким образом, проблема понижения порядка уравнений Эйлера–Пуассона является актуальной для аналитического изучения свойств движения тела. При получении новых форм приведенных уравнений динамики твердого тела необходимо учитывать и возможность численного интегрирования этих уравнений. То есть редуцированная форма уравнений Эйлера–Пуассона не должна иметь особенностей, которые бы препятствовали применению компьютерного анализа свойств решений данных уравнений.

В статье для общего случая распределения масс тяжелого твердого тела получена новая форма в моделировании движения тела с неподвижной точкой. Метод редукции уравнений Эйлера–Пуассона основан на введении новой переменной, которая характеризует смешанное произведение векторов вертикали, момента количества движения и единичного вектора барицентрической оси. Редуцированная система состоит из четырех дифференциальных уравнений, которые не имеют особенностей для использования компьютерного и аналитического исследования решений.

Применение данной системы рассмотрено для случая, когда центр масс принадлежит барицентрической оси. Доказано, в частности, что сумма квадратов двух компонент кинетического момента относительно небарицентрических осей постоянна только в решении В. А. Стеклова.

2. Векторная форма уравнений

Рассмотрим уравнения Эйлера−Пуассона в обозначениях [Горр, Ковалев, 2013]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times a\mathbf{x} + s(\mathbf{e} \times \mathbf{v}), \qquad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times a\mathbf{x}. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — момент количества движения тела; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — единичный вектор, направленный из неподвижной точки в центр тяжести тела; $a = (a_{ij})$ — гирационный тензор; s — произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки до центра тяжести; точка над $\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1) имеют первые интегралы

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=1, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}=k, \quad \mathbf{x}\cdot a\mathbf{x}-2s(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})=2E. \tag{2}$$

Введем новую переменную

$$u=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{x}). \tag{3}$$

В дальнейшем считаем, что $u\not\equiv 0$, так как при $u\equiv 0$ из первого уравнения системы (1) следует, что $\mathbf{x}^2=\mathrm{const}$. Этот случай полностью изучен в [Горр, Илюхин, 1974]. В силу $u\not\equiv 0$ первыми интегралами (2) можно заменить уравнение Пуассона из (1) [Горр, Илюхин, Харламова, 1974]. То есть в качестве уравнений движения тяжелого твердого тела возьмем первое векторное уравнение из (1) и интегралы (2). Эти уравнения при $u\not\equiv 0$ не допускают особых решений [Горр, Илюхин, Харламова, 1974].

Рассмотрим второе и третье соотношения из (2) и выражение (3) относительно вектора $\mathbf{v}$. В векторной форме имеем

$$\mathbf{v}=\frac{1}{\upsilon-\rho^2}\left[(\mu\upsilon-k\rho)\mathbf{e}+(k-\mu\rho)\mathbf{x}+u(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\right], \tag{4}$$

где ρ, υ, μ — инварианты Гесса:

$$\rho=\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}, \qquad \upsilon=\mathbf{x}^2, \qquad \mu=\frac{1}{2s}(\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x}-2E). \tag{5}$$

Подставим вектор $\mathbf{v}$ из (4) в первое уравнение системы (1):

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{x}\times a\mathbf{x}+\frac{s}{\upsilon-\rho^2}\left[(k-\mu\rho)(\mathbf{e}\times\mathbf{x})+u(\rho\mathbf{e}-\mathbf{x})\right]. \tag{6}$$

Для замыкания уравнения (6) найдем производную от функции (3) в силу уравнений (1):

$$\dot{u}=\frac{1}{\upsilon-\rho^2}\left\{(\mu\upsilon-k\rho)\left[a\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-\rho(\mathbf{e}\cdot a\mathbf{x})-s(1-\mu^2)(\upsilon-\rho^2)\right]-u\rho\left[a\mathbf{x}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{x})\right]\right\}. \tag{7}$$

Таким образом, уравнения Эйлера−Пуассона редуцированы к системе (6), (7), которая в скалярной форме имеет четвертый порядок. Эти уравнения допускают первый интеграл

$$u^2+(k-\mu\rho)^2-(1-\mu^2)(\upsilon-\rho^2)=0. \tag{8}$$

Интеграл (8) содержит две произвольные постоянные k, E и получен подстановкой вектора (4) в геометрический интеграл из (2).

Уравнения (6), (7) содержат единственную особенность, которая определена равенством $\upsilon-\rho^2=(\mathbf{e}\times\mathbf{x})^2=0$. Поэтому начальные значения вектора $\mathbf{x}$ должны удовлетворять условию $\mathbf{e}\times\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Характерным свойством уравнений (6), (7) является линейность по переменной u правых частей. Уравнения Гесса [Hess, 1890] можно получить подстановкой в (6) переменной u, найденной из (8). Но в этом случае появляется особенность в виде радикалов от основных переменных задачи и поэтому нарушаются условия существования и единственности решения задачи Коши. В отличие от уравнения Гесса уравнения (6), (7) не имеют такой особенности при $\mathbf{e}\times\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

3. Случай, когда центр тяжести тела принадлежит главной оси эллипсоида инерции

Пусть в уравнениях (1) $\mathbf{e}=(1, 0, 0)$, $a=\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Тогда динамическое уравнение из (1) и интегралы (2) в скалярной форме примут вид

$$\dot{x}_1=(a_3-a_2)x_2x_3, \quad \dot{x}_2=(a_1-a_3)x_1x_3-s\nu_3, \quad \dot{x}_3=(a_2-a_1)x_1x_2+s\nu_2, \tag{9}$$

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1, \qquad x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3=k,$$
$$\nu_1=\frac{1}{2s}\left(a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2-2E\right). \tag{10}$$

В силу принятых условий из (3) получим

$$u=x_2\nu_3-x_3\nu_2. \tag{11}$$

Перейдем во втором и третьем уравнениях (9) к дифференцированию по новой вспомогательной переменной x_1:

$$\frac{1}{2}\left(x_2^2\right)'=\frac{a_1-a_3}{a_3-a_2}x_1-\frac{s\nu_3}{(a_3-a_2)x_3},$$
$$\frac{1}{2}\left(x_3^2\right)'=\frac{a_2-a_1}{a_3-a_2}x_1+\frac{s\nu_2}{(a_3-a_2)x_2}, \tag{12}$$

где штрихом обозначена производная по x_1. Зависимость $x_1(t)$ устанавливаем из уравнения

$$\dot{x}_1=(a_3-a_2)x_2(x_1)x_3(x_1). \tag{13}$$

В (12), (13) полагаем $a_3-a_2\neq 0$.

Найдем функции $\nu_1(x_1),\ \nu_2(x_1),\ \nu_3(x_1)$, используя второе, третье уравнения из (10) и соотношение (11):

$$\nu_1(x_1)=\frac{1}{2s}\left[a_1x_1^2+a_2x_2^2(x_1)+a_3x_3^2(x_1)-2E\right], \tag{14}$$

$$\nu_2(x_1)=\frac{1}{x_2^2(x_1)+x_3^2(x_1)}\left[kx_2(x_1)-\nu_1x_1x_2(x_1)-x_3(x_1)u(x_1)\right], \tag{15}$$

$$\nu_3(x_1)=\frac{1}{x_2^2(x_1)+x_3^2(x_1)}\left[kx_3(x_1)-\nu_1x_1x_3(x_1)+x_2(x_1)u(x_1)\right]. \tag{16}$$

Для простоты записи формул (15), (16) в них не подставлено выражение (14).

Вместо функций $x_2(x_1),\ x_3(x_1)$ введем новые $R(x_1),\ y(x_1)$:

$$x_2^2(x_1)=R(x_1)\big(1-y(x_1)\big), \qquad x_3^2(x_1)=R(x_1)\,y(x_1). \tag{17}$$

В дальнейшем зависимость функций $R(x_1),\ y(x_1),\ \nu_i(x_1)$ от x_1 опустим, то есть будем писать $R,\ y,\ \nu_i$.

Запишем соотношения (14)–(16) в новых обозначениях:

$$\nu_1=\frac{1}{2s}\left[a_1x_1^2-2E+R\big((a_3-a_2)y+a_2\big)\right],$$
$$\nu_2=\frac{1}{\sqrt{R}}\left[(k-x_1\nu_1)\sqrt{1-y}-u\sqrt{y}\right], \tag{18}$$
$$\nu_3=\frac{1}{\sqrt{R}}\left[(k-x_1\nu_1)\sqrt{y}+u\sqrt{1-y}\right].$$

Из уравнений (12) в силу (17), (18) следует

$$y'(x_1)=\frac{1}{(a_3-a_2)R^2(x_1)}\left\{x_1R(x_1)\left[(a_3-a_2)y+a_2-2a_1\right]+2ks-x_1\left(a_1x_1^2-2E\right)\right\}, \tag{19}$$

$$R'(x_1) = -2x_1 - \frac{2su(x_1)}{(a_3 - a_2)R(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}}. \tag{20}$$

Составим уравнение на функцию $u(x_1)$. Дифференцируя левую и правую части равенства (11) по переменной x_1, воспользуемся соотношениями (17), (18). Тогда получим

$$\begin{aligned} u'(x_1) = \frac{1}{4s(a_3 - a_2)R(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}} \Big\{ & 3R^2(x_1)\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big]^2 + \\ & +2R(x_1)\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big]\big[x_1^2\big((a_3 - a_2)y(x_1) + 2a_1 + a_2\big) - 2E\big] - \\ & -4ksx_1\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big] + a_1x_1^4\big[2(a_3 - a_2)y(x_1) + a_1 + 2a_2\big] - \\ & -4Ex_1^2\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_1 + a_2\big] + 4\big(E^2 - s^2\big) - \\ & -4s(a_3 - a_2)x_1u(x_1)\sqrt{y(x_1)(1 - y(x_1))}\Big\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Принимая во внимание обозначения (5), замену переменных (17), формулы (18), (20), равенство (8) представим так

$$\begin{aligned} & (a_3 - a_2)^2 R^2(x_1)y(x_1)\big(1 - y(x_1)\big)\big(R'(x_1) + 2x_1\big)^2 + \\ & + R^3(x_1)\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big]^2 + \\ & + R^2(x_1)\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big]\big[x_1^2\big((a_3 - a_2)y(x_1) + 2a_1 + a_2\big) - 4E\big] + \\ & + R(x_1)\big\{a_1x_1^4\big[2(a_3 - a_2)y(x_1) + a_1 + 2a_2\big] - 4Ex_1^2\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_1 + a_2\big] + \\ & + 4\big(E^2 - s^2\big) - 4skx_1\big[(a_3 - a_2)y(x_1) + a_2\big]\big\} + a_1^2x_1^6 - 4a_1Ex_1^4 - 4a_1ksx_1^3 + \\ & + 4E^2x_1^2 + 8ksEx_1 + 4k^2s^2 = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, уравнения Эйлера−Пуассона редуцированы к трем дифференциальным уравнениям — (19)−(21). Особенность этих уравнений состоит в том, что уравнение (19) не содержит функцию $u(x_1)$ и является линейным уравнением относительно функции $y(x_1)$, правые части уравнений (20), (21) содержат функцию $u(x_1)$ в первой степени.

Если рассматривать уравнения (19), (22) совместно, то получим систему двух дифференциальных уравнений относительно функций $y(x_1)$, $R(x_1)$. Она представляет собой некоторый аналог уравнений П. В. Харламова [Харламов, 1965], но в отличие от уравнений [Харламов, 1965] одно уравнение (см. (19)) является линейным относительно функции $y(x_1)$.

4. Преобразование уравнений (19)−(21)

По-видимому, недостатком уравнений (20), (21) является наличие в правых частях радикалов от функции $y(x_1)$. В силу этого введем новые переменные $z(x_1)$, $W(x_1)$:

$$z(x_1) = (a_3 - a_2)y(x_1) + a_2, \qquad W(x_1) = \frac{u(x_1)}{\sqrt{(a_3 - z(x_1))(z(x_1) - a_2)}}. \tag{23}$$

На основании (23) соотношения (17) и уравнения (13), (19)−(22) запишем в виде

$$x_2^2(x_1) = \frac{R(x_1)(a_3 - z(x_1))}{a_3 - a_2}, \qquad x_3^2(x_1) = \frac{R(x_1)(z(x_1) - a_2)}{a_3 - a_2}, \tag{24}$$

$$\dot{x}_1 = R(x_1)\sqrt{(a_3 - z(x_1))(z(x_1) - a_2)}, \tag{25}$$

$$z'(x_1)=\frac{1}{R^2(x_1)}\left[x_1R(x_1)(z(x_1)-2a_1)+2ks+x_1\left(2E-a_1x_1^2\right)\right], \tag{26}$$

$$R'(x_1)=-2\left(x_1+\frac{sW(x_1)}{R(x_1)}\right), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}W'(x_1)=&\frac{1}{4R(x_1)(a_3-z(x_1))(z(x_1)-a_2)}\left\{3R^3(x_1)z^2(x_1)+\right.\\&+2R^2(x_1)z(x_1)\left[x_1^2(z(x_1)+2a_1)-4E\right]+R(x_1)\left[a_1x_1^4(2z(x_1)+a_1)-\right.\\&\left.-4ksx_1z(x_1)-4Ex_1^2(z(x_1)+a_1)+4\left(E^2-s^2\right)\right]+\\&+2sW(x_1)\left[x_1R(x_1)\left(4z^2(x_1)-z(x_1)(4a_1+3a_2+3a_3)+\right.\right.\\&\left.\left.\left.+2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\right)+(2z(x_1)-a_2-a_3)\left(2ks-a_1x_1^3+2Ex_1\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&R^2(x_1)(a_3-z(x_1))(z(x_1)-a_2)(R'(x_1)+2x_1)^2+R^3(x_1)z^2(x_1)+\\&+R^2(x_1)z(x_1)\left[x_1^2(z(x_1)+2a_1)-4E\right]+R(x_1)\left[a_1x_1^4(2z(x_1)+a_1)-\right.\\&\left.-4Ex_1^2(z(x_1)+a_1)+4\left(E^2-s^2\right)-4ksx_1z(x_1)\right]+\\&+a_1^2x_1^6-4a_1Ex_1^4-4a_1ksx_1^3+4E^2x_1^2+8ksEx_1+4k^2s^2=0.\end{aligned} \tag{29}$$

Систему уравнений (26)−(29) можно рассматривать в двух вариантах. В первом варианте целесообразно изучать систему трех уравнений (26)−(28) относительно трех функций $z(x_1)$, $R(x_1)$, $W(x_1)$. При этом функция $W(x_1)$ в правую часть уравнения (26) не входит, а в правых частях уравнений (27), (28) она содержится в первой степени. Во втором варианте следует интегрировать два уравнения — (27), (29). После нахождения решений в указанных вариантах зависимость $x_1(t)$ определяется из уравнения (25). Основные переменные уравнений Эйлера−Пуассона можно получить из формул (24), (23), (18).

5. Геометрический и аналитический смысл переменных $R(x_1)$, $y(x_1)$, $u(x_1)$

Рассмотрим свойства переменных, относительно которых получены уравнения (19)−(21). В плоскости, ортогональной барицентрической оси, проекцию вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ обозначим через $\mathbf{c}$. То есть $\mathbf{c}=(x_2,x_3)$, где x_2, x_3 — проекции кинематического момента на вторую и третью координатные оси. В силу соотношений (17) переменная $R(x_1)=|\mathbf{c}|^2=x_2^2(x_1)+x_3^2(x_1)$, а переменная $y(x_1)$ имеет значение

$$y(x_1)=\frac{x_3^2(x_1)}{x_2^2(x_1)+x_3^2(x_1)}=\sin^2\psi(x_1), \tag{30}$$

где $\psi(x_1)$ — угол между второй координатной осью и вектором $\mathbf{c}=(x_2,x_3)$. Аналитическое свойство функции $u(x_1)$ следует из равенства (8):

$$u^2(x_1)=R(x_1)\left(1-\mu^2(x_1)\right)-(k-x_1\mu(x_1))^2. \tag{31}$$

В (31) функция $\mu(x_1)$ такова:

$$\mu(x_1)=\frac{1}{2s}\left\{a_1x_1^2-2E+R(x_1)\left[(a_3-a_2)\sin^2\psi(x_1)+a_2\right]\right\}. \tag{32}$$

Из (30) следует, что $y(x_1)\in(0,1)$.

Отметим, что переменная $R(x_1)$ удовлетворяет неравенству

$$R(x_1) = x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1) > 0, \qquad (33)$$

при выполнении которого получены уравнения (19)−(21).

Если построение решения основано на уравнениях (19), (22), то функцию $u(x_1)$ получим из уравнения (20)

$$u(x_1) = -\frac{1}{4s}\left[(a_3 - a_2)(R(x_1) + x_1)' \sin 2\psi(x_1)\right]. \qquad (34)$$

Уравнения (19), (22) можно определить из уравнений П. В. Харламова [Харламов, 1965] с помощью переменных (30), (33).

В этом случае соотношения (31), (32), (34) носят вспомогательный характер.

6. Структура функций $R(x_1)$, $y(x_1)$ в решениях В. А. Стеклова, Н. Ковалевского и Д. Н. Горячева

Представляет интерес структура функций $R(x_1)$, $y(x_1)$ в полиномиальных решениях уравнений Эйлера−Пуассона [Харламов, 1965].

Решение В. А. Стеклова [Харламов, 1965] имеет вид

$$x_2^2 = g_0 + g_2 x_1^2, \qquad x_3^2 = h_0 + h_2 x_1^2. \qquad (35)$$

В силу принятых обозначений

$$R = x_2^2 + x_3^2 = Q_0 + Q_1 x_1^2, \qquad (36)$$

где $Q_0 = h_0 + g_0$, $Q_1 = h_2 + g_2$. Тогда из (30), в силу (35), (36), следует

$$y = \frac{h_0 + h_2 x_1^2}{Q_0 + Q_1 x_1^2}. \qquad (37)$$

В (37) $y(x_1)$ — дробно-линейная функция относительно переменной x_1^2.

Рассмотрим решение Н. Ковалевского [Kowalevski, 1908] в обозначениях монографии [Харламов, 1965]:

$$x_2^2 = g_0 + g_1 x_1 + g_2 x_1^2, \qquad x_3^2 = h_0 + h_1 x_1 + h_2 x_1^2 + h_3 x_1^3. \qquad (38)$$

Из (38) получим

$$R = H_0 + H_1 x_1 + H_2 x_1^2 + h_3 x_1^3, \qquad (39)$$

где $H_0 = h_0 + g_0$, $H_1 = h_1 + g_1$, $H_2 = h_2 + g_2$. На основании (30), (39) имеем

$$y = \frac{h_0 + h_1 x_1 + h_2 x_1^2 + h_3 x_1^3}{H_0 + H_1 x_1 + H_2 x_1^2 + h_3 x_1^3}. \qquad (40)$$

Запишем решение Д. Н. Горячева [Харламов, 1965]

$$x_2^2 = g_0 + g_2 x_1^2, \qquad x_3^2 = h_0 + h_2 x_1^2 + h_4 x_1^4. \qquad (41)$$

Используя равенства (17), (30), (41), получим

$$R = R_0 + R_2 x_1^2 + h_4 x_1^4, \qquad y = \frac{h_0 + h_2 x_1^2 + h_4 x_1^4}{R_0 + R_2 x_1^2 + h_4 x_1^4}, \tag{42}$$

где $R_0 = h_0 + g_0$, $R_2 = h_2 + g_2$.

Таким образом, для полиномиальных решений В. А. Стеклова, Н. Ковалевского и Д. Н. Горячева [Харламов, 1965] функция $R(x_1)$ представляет собой многочлен по x_1, а функция $y(x_1)$ является рациональной функцией.

7. Пример интегрируемости редуцированных уравнений

Рассмотрим один пример интегрируемости уравнений (25)−(27), (29). Положим

$$R(x_1) = R_0 = \mathrm{const}, \quad z(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2. \tag{43}$$

Внесем выражения (43) в уравнения (26), (29) и потребуем, чтобы полученные уравнения были тождествами по x_1. Тогда имеем следующие условия

$$\alpha_0 = \frac{2}{R_0}(2a_1 R_0 - E), \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{a_1}{R_0}, \tag{44}$$

$$E = \frac{2R_0}{a_1}\left(4a_1^2 - a_2 a_3\right), \quad s^2 = 3E^2 - 6a_1 E R_0 + 4a_1 R_0^2, \quad k = 0, \tag{45}$$

$$a_1 = \frac{a_2 + a_3}{3}. \tag{46}$$

В силу (44) из (24) следует

$$x_2^2(x_1) = \frac{R_0}{a_3 - a_2}\left(a_3 - \alpha_0 - \alpha_2 x_1^2\right), \quad x_3^2(x_1) = \frac{R_0}{a_3 - a_2}\left(\alpha_2 x_1^2 + \alpha_0 - a_2\right). \tag{47}$$

Соотношение $R = R_0$ запишем в виде

$$x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1) = R_0. \tag{48}$$

Структура функций (47) совпадает со структурой соответствующих функций в решении В. А. Стеклова [Харламов, 1965]. Однако в общем случае решения В. А. Стеклова условие (46) может не выполняться. Инвариантное соотношение (48) также не характеризует общее решение В. А. Стеклова (см. формулы (35), (36)). Поэтому представляет интерес исследование задачи о действительности решения (47) при условиях (44)−(46) и тем самым ответить на вопрос о том, является ли решение (47) частным вариантом решения В. А. Стеклова.

Введем главные моменты инерции тела: $a_i = \dfrac{1}{A_i}$. Тогда условие (46) преобразуется так:

$$3A_2 A_3 - A_1\left(A_2 + A_3\right) = 0. \tag{49}$$

Запишем решение В. А. Стеклова с учетом условия (49). Воспользуемся формулами, указанными в [Харламов, 1965]. На основании (49) имеем

$$\begin{aligned} x_2^2(x_1) &= \frac{A_2 A_3}{A_1\left(A_3 - A_2\right)}\left(x_1^2 + \frac{A_1^2 H}{A_1 - A_3}\right), \\ x_3^2(x_1) &= \frac{A_2 A_3}{A_1\left(A_3 - A_2\right)}\left(-x_1^2 - \frac{A_1^2 H}{A_1 - A_2}\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Для определения условий существования введем параметры

$$\alpha = \frac{A_2}{A_1}, \qquad \beta = \frac{A_3}{A_1}, \tag{51}$$

где $\alpha > 0,\ \beta > 0$. В силу (49) и неравенств треугольника параметры (51) удовлетворяют условиям

$$\beta = \frac{\alpha}{3\alpha - 1}, \tag{52}$$

$$\beta < 1 + \alpha, \qquad \beta > 1 - \alpha, \qquad \beta > \alpha - 1. \tag{53}$$

Обозначим множество точек плоскости (α, β), координаты которых связаны уравнением (52), через γ, а множество точек этой плоскости, координаты которых подчинены неравенствам (53), — через $g(\alpha, \beta)$ (рис. 1).

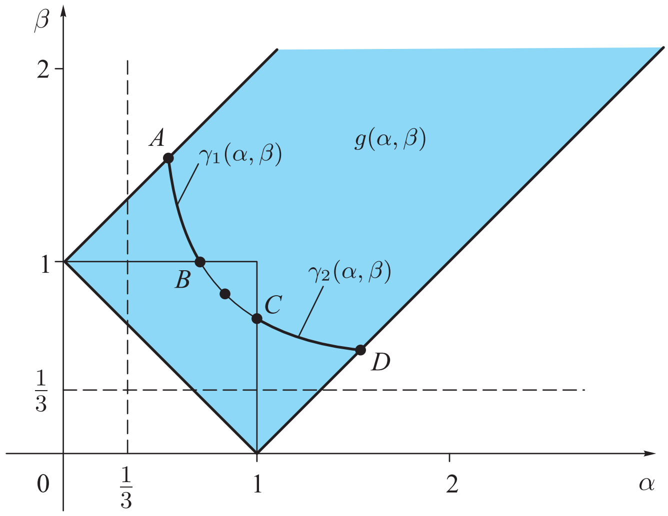

Рис. 1. Область выполнения неравенств треугольника и действительности решения

Положим для определенности $A_3 - A_2 > 0$, то есть в параметрах $\alpha,\ \beta$ имеем неравенство

$$\beta > \alpha. \tag{54}$$

Из (50) следует, что переменная x_1^2 должна удовлетворять условиям

$$-\frac{A_1^2 H}{A_1 - A_3} < x_1^2 < -\frac{A_1^2 H}{A_1 - A_2}. \tag{55}$$

Пусть $H = -s\ (s > 0)$. На основании (51) из (55) получим

$$\frac{A_1 s}{1 - \beta} < x_1^2 < \frac{A_1 s}{1 - \alpha}. \tag{56}$$

С учетом (54) неравенства (56) выполняются при наличии следующих условий

$$\beta > 1, \qquad \alpha < 1. \tag{57}$$

Множество точек кривой γ на плоскости (α, β), координаты которых удовлетворяют неравенствам (54), (57), на рис. 1 обозначено через $\gamma_2(\alpha, \beta)$ (точки A, B исключаются из рассмотрения).

Можно показать, что и для точек кривой $\gamma_2(\alpha,\beta)$, заключенной между точками C и D кривой $\gamma(\alpha,\beta)$, решение (50) действительно $(A_3 - A_2 < 0)$.

Таким образом, показано, что решение (43) имеет место только в решении В. А. Стеклова [6].

Из (27) следует, что $W(x_1) = -\dfrac{R_0 x_1}{s}$. На основании второй формулы найдем значение функции $u(x_1)$:

$$u(x_1) = -\frac{R_0 x_1}{s}\sqrt{(a_3 - z)(z - a_2)}\ . \qquad (58)$$

Зависимость $x_1(t)$ определяется из уравнения (13). С учетом (24) имеем

$$\dot{x}_1 = R_0\sqrt{(a_3 - z(x_1))(z(x_1) - a_2)}\ , \qquad (59)$$

где, в силу (43), $z(x_1) = \alpha_0 + \alpha_2 x_1^2$. Из (58), (55) следует, что при граничных значениях $z_1 = a_2$, $z_2 = a_3$ функция $u(x_1)$ принимает нулевые значения, на основании (3) при этих значениях векторы $\mathbf{e}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ компланарны.

Замечание. Решение уравнений (25), (26), (29), которое характеризуется только инвариантным соотношением $x_2^2(x_1) + x_3^2(x_1) = R_0$, сводится к исследованию соотношения

$$R_0^2\left(R_0 - 3x_1^2\right)z(x_1) + 2R_0\left[a_1 x_1^4 + R_0\left(a_1 + 2a_2 + 2a_3\right)x_1^2 - 2ksx_1 - 2ER_0\right] + a_1^2 x_1^6 + a_1\left(a_1 R_0 - 4E\right)x_1^4 -$$
$$-4a_1 ksx_1^3 + 4\left(E^2 - a_1 ER_0 - a_2 a_3 R_0^2\right)x_1^2 + 8ksEx_1 + 4\left(s^2\left(k^2 - R_0\right) + E^2 R_0\right) = 0,$$

где

$$z(x_1) = e^{\frac{x_1^2}{2R_0}}\left\{\frac{1}{R_0^2}\int x_1 e^{-\frac{x_1^2}{2R_0}}\left[2ks + 2\left(E - a_1 R_0\right)x_1 - a_1 x_1^3\right]dx_1 + c\right\}.$$

Здесь c — произвольная постоянная.

8. Заключение

В статье, на основе анализа публикаций, посвященных редукции уравнений Эйлера–Пуассона, показано, что полученные ранее формы этих уравнений имеют аналитические особенности, которые затрудняют применение численных и качественных методов исследования. С помощью введения новой переменной и первых интегралов исходная векторная система из двух уравнений сведена к одному векторному и одному скалярному уравнение. Отличительной особенностью приведенной системы является линейность по указанной переменной, что упрощает использование различных методов. В качестве примера интегрирования приведенной системы рассмотрен случай, когда центр масс тела лежит на барицентрической оси. Доказано, что сумма квадратов компонент вектора момента количества движения относительно небарицентрических осей может быть постоянна только в случае В. А. Стеклова. Указанная в статье система дифференциальных уравнений имеет определенное преимущество перед ранее полученными формами, так как новая переменная входит линейно в эти уравнения. Применение этой системы целесообразно при построении новых решений либо в замкнутой форме, либо численным методом в виде рядов по малому параметру.

Список литературы (References)

Билимович А. Д. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Сб. статей, посвященных Г. К. Суслову. — Киев, 1911. — С. 23–74.
Bilimovach A. D. Uravnenija dvizhenija tverdogo tela okolo nepodvizhnoj tochki [The motion equations heavy rigid body around a fixed point] // Sb. statej, posvjashchennyh G. K. Suslovu. — Kiev, 1911. — S. 23–74 (in Russian).

Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 384 с.
Borisov A. V., Mamaev I. C. Dinamika tverdogo tela [A rigid body dynamics]. — Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2001. — 384 s. (in Russian).

Гашененко И. Н., Горр Г. В., Ковалев А. М. Классические задачи динамики твердого тела. — Киев: Наукова думка, 2012. — 401 с.
Gashenenko I. N., Gorr G. V., Kovalev A. M. Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela [The classical problems of a rigid body dynamics]. — Kiev: Naukova dumka, 2012. — 401 s. (in Russian).

Горр Г. В., Илюхин А. А. Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. — 1974. — Вып. 6. — С. 9–15.
Gorr G. V., Iljukhin A. A. Sluchai postojanstva modulja momenta kolichestva dvizhenija girostata [The cases of constancy of motion moment module of gyrostat] // Mehanika tverdogo tela. — 1974. — Vyp. 6. — S. 9–15 (in Russian).

Горр Г. В., Илюхин А. А., Харламова Е. И. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. — 1974. — Вып. 6. — С. 3–9.
Gorr G. V., Iljukhin A. A., Kharlamova E. I. Ob osobyh reshenijah odnoj formy uravnenij dvizhenija tverdogo tela, imejushchego nepodvizhnuju tochku [About special solutions of one form of motion equations of rigid body with a fixed point] // Mehanika tverdogo tela. — 1974. — Vyp. 6. — S. 3–9 (in Russian).

Горр Г. В., Ковалев А. М. Движение гиростата. — Киев: Наукова думка, 2013. — 407 с.
Gorr G. V., Kovalev A. M. Dvizhenie girostata [The motion of gyrostat]. — Kiev: Naukova dumka, 2013. — 407 s. (in Russian).

Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. — Киев: Наукова думка, 1978. — 296 с.
Gorr G. V., Kudrjashova L. V., Stepanova L. A. Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela. Razvitie a sovremennoe sostojanie [The classical problems of a rigid body dynamics. The development and current state]. — Kiev: Naukova dumka, 1978. — 296 s. (in Russian).

Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера−Пуассона. — Киев: Наукова думка, 1992. — 168 с.
Dokshevich A. I. Reshenija v konechnom vide uravnenij Ejlera−Puassona [The solutions in a finite form of Euler−Poisson's equations]. — Kiev: Naukova dumka, 1992. — 168 s. (in Russian).

Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Ч. 1. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1965. — 221 с.
Kharlamov P. V. Lekcii po dinamike tverdogo tela. Ch. 1 [The lections of a rigid body dynamics. P. I]. — Novosibirsk: Izd-vo Novosibirskogo gos. un-ta, 1965. — 221 s. (in Russian).

Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. — 1890. — **37**, H. 2. — P. 153−181.

Kowalevski N. Eine neue particuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. — 1908. — **65**. — P. 528−537.