КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 Т. 8 № 6 С. 833−860

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.85

Прямые мультипликативные методы для разреженных матриц. Несимметричные линейные системы

А. Б. Свириденко

ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет», филиал в г. Новороссийске,
Россия, 353922, г. Новороссийск, ул. Героев Десантников, д. 87

E-mail: roshechka@gmail.com

Получено 08.04.2016, после доработки — 28.10.2016.
Принято к публикации 09.11.2016.

Малая практическая ценность многих численных методов решения несимметричных систем линейных уравнений с плохо обусловленными матрицами объясняется тем, что эти методы в реальных условиях ведут себя совсем иначе, чем в случае точных вычислений. Исторически вопросам устойчивости не отводилось достаточного внимания, как в численной алгебре «средних размеров», а делался акцент на решении задач максимального порядка при данных возможностях вычислительной машины, в том числе за счет некоторой потери точности результатов. Поэтому главными объектами исследования были: наиболее целесообразное хранение информации, заключенной в разреженной матрице; поддержание наибольшей степени ее разреженности на всех этапах вычислительного процесса. Таким образом, разработка эффективных численных методов решения неустойчивых систем относится к актуальным проблемам вычислительной математики.

В данной работе рассмотрен подход к построению численно устойчивых прямых мультипликативных методов решения систем линейных уравнений, учитывающих разреженность матриц, представленных в упакованном виде. Преимущество подхода состоит в возможности минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов, причем изменения в позиции очередной обрабатываемой строки матрицы не вносятся, что позволяет использовать статические форматы хранения данных. Рассмотрен формат хранения разреженных матриц, преимущество которого состоит в возможности параллельного выполнения любых матричных операций без распаковывания, что значительно сокращает время выполнения операций и объем занимаемой памяти.

Прямые мультипликативные методы решения систем линейных уравнений являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ: разреженные матрицы системы позволяют получать мультипликаторы, главные строки которых также разрежены, а операция умножения вектора-строки на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора.

В качестве прямого продолжения данной работы в основу построения прямого мультипликативного алгоритма линейного программирования предлагается положить модификацию прямого мультипликативного алгоритма решения систем линейных уравнений, основанного на интеграции техники метода линейного программирования для выбора ведущего элемента. Прямые мультипликативные методы линейного программирования являются наиболее приспособленными и для построения прямого мультипликативного алгоритма задания направления спуска в ньютоновских методах безусловной оптимизации путем интеграции одной из существующих техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных.

Ключевые слова: численно устойчивые прямые мультипликативные методы, несимметричные линейные системы, формат хранения разреженных матриц, параллельное выполнение матричных операций без распаковывания, минимизация заполнения главных строк мультипликаторов, разреженные матрицы

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2016 VOL. 8 NO. 6 P. 833−860

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.85

Direct multiplicative methods for sparse matrices. Unbalanced linear systems.

A. B. Sviridenko

FSEI of HPE 'Kuban State University' branch in Novorossiysk,
87 Geroev Desantnikov st., Novorossiysk, 353922, Russia

E-mail: roshechka@gmail.com

Received 08.04.2016, after completion — 28.10.2016.
Accepted for publication 09.11.2016.

Small practical value of many numerical methods for solving single-ended systems of linear equations with ill-conditioned matrices due to the fact that these methods in the practice behave quite differently than in the case of precise calculations. Historically, sustainability is not enough attention was given, unlike in numerical algebra 'medium-sized', and emphasis is given to solving the problems of maximal order in data capabilities of the computer, including the expense of some loss of accuracy. Therefore, the main objects of study is the most appropriate storage of information contained in the sparse matrix; maintaining the highest degree of rarefaction at all stages of the computational process. Thus, the development of efficient numerical methods for solving unstable systems refers to the actual problems of computational mathematics.

In this paper, the approach to the construction of numerically stable direct multiplier methods for solving systems of linear equations, taking into account sparseness of matrices, presented in packaged form. The advantage of the approach consists in minimization of filling the main lines of the multipliers without compromising accuracy of the results and changes in the position of the next processed row of the matrix are made that allows you to use static data storage formats. The storage format of sparse matrices has been studied and the advantage of this format consists in possibility of parallel execution any matrix operations without unboxing, which significantly reduces the execution time and memory footprint.

Direct multiplier methods for solving systems of linear equations are best suited for solving problems of large size on a computer — sparse matrix systems allow you to get multipliers, the main row of which is also sparse, and the operation of multiplication of a vector-row of the multiplier according to the complexity proportional to the number of nonzero elements of this multiplier.

As a direct continuation of this work is proposed in the basis for constructing a direct multiplier algorithm of linear programming to put a modification of the direct multiplier algorithm for solving systems of linear equations based on integration of technique of linear programming for methods to select the host item. Direct multiplicative methods of linear programming are best suited for the construction of a direct multiplicative algorithm set the direction of descent Newton methods in unconstrained optimization by integrating one of the existing design techniques significantly positive definite matrix of the second derivatives.

Keywords: numerically stable direct multiplicative methods, asymmetric linear systems, sparse matrix storage format, parallel execution of matrix operations without unpacking, minimization of fill the main rows of multipliers, sparse matrices

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 833–860 (Russian).

Общая постановка проблемы

Стренг [Стренг, 1980] подчеркивает: «Линейная алгебра, в отличие от анализа, связана с решением только уравнений и не имеет дело с неравенствами. Это всегда казалось очевидным, но в конце концов я понял, что линейное программирование представляет собой контрпример: оно связано с неравенствами, но, безусловно, является частью линейной алгебры».

То же самое справедливо и в отношении ньютоновских методов. Это означает, что появление, например, более эффективных стратегий выбора ведущей строки и ведущего столбца в процедуре задания направления спуска в ньютоновских методах приводит и к увеличению эффективности основного алгоритма численной линейной алгебры — исключению с частичным или полным выбором ведущего элемента и наоборот. Поэтому в [Свириденко, 2015] стратегии выбора ведущего элемента исследовались средствами линейной алгебры на примере решения системы

$$Ax = a\,, \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A \in R^{n \times n}$, $a \in R^n$, R^n обозначает n-мерное евклидово пространство. А применение полученных результатов на данном этапе развития подхода Гилла и Мюррея к построению ньютоновских методов безусловной оптимизации, основанных на разложении Холесского, ограничивалось только степенью усложнения вычислительной схемы расчета факторов модифицированного разложения Холесского, обсуждаемой в [Зеленков и др., 2013].

Системы вида (1) с плохо обусловленными матрицами принято называть неустойчивыми или плохо обусловленными [Воеводин, 1977; Воеводин и др., 1984; Ортега и др., 1986; Самарский и др., 1969; Фаддеев и др., 1963; Форсайт и др., 1969]. В целом они характеризуются тем, что незначительное изменение условий счета может привести к недопустимо большим ошибкам в решении.

Матрица Гильберта (2) — классический пример плохо обусловленной матрицы; с увеличением n эти матрицы становятся все более плохо обусловленными. Насколько плоха обусловленность этих матриц, можно проиллюстрировать следующим примером. При $n = 6$: $\|A\| = 1{,}62$, $\|A^{-1}\| = 924000$, число обусловленности $\mu(A) = 14968800$ [Ортега и др., 1986; Форсайт и др., 1969]. Здесь $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A.

В [Отаров и др., 2010] приведен один из случаев, в которых матрицы Гильберта появляются на практике. Там же отмечено, что отличительной чертой неустойчивых систем являются недопустимо большие ошибки в решении, появляющиеся из-за влияния ошибок округления, возникающих в процессе вычислений, или из-за влияния ошибок входных данных. Поэтому сложность построения методов решения неустойчивых систем заключается в том, что при их построении приходится учитывать много различных факторов. При этом особое значение приобретает исследование поведения метода в условиях влияния ошибок округления и возмущения входных данных.

Малая практическая ценность многих численных методов решения систем вида (1) с плохо обусловленными матрицами объясняется тем, что эти методы в реальных условиях ведут себя совсем иначе, чем в случае точных вычислений. Вопросам устойчивости не отводилась столь первостепенная роль, как в численной алгебре «средних размеров», а основное внимание уделялось решению задачи максимального порядка при данных возможностях вычислительной машины, быть может, за счет некоторой потери точности результатов. Поэтому главными объектами исследования были: наиболее целесообразное хранение информации, заключенной в разреженной матрице; поддержание наибольшей степени ее разреженности на всех этапах вычислительного процесса. Таким образом, разработка эффективных численных методов решения неустойчивых систем относится к актуальным проблемам вычислительной математики [Воеводин, 1977; Воеводин и др., 1984; Ортега и др., 1986; Самарский и др., 1969].

Икрамов в предисловии к [Писсанецки, 1988] отметил по меньшей мере два момента, которые усложняют построение вычислительных схем метода Гаусса по сравнению с системами симметричными и знакоопределенными: различие схем хранения и проблема роста элементов. Для знакоопределенных систем наиболее подходящую (в смысле сохранения разреженности) последовательность исключения можно определить, не зная числовых значений элементов матрицы и оперируя только с ее графом. Найдя эту последовательность, выяснив, где появятся новые ненулевые элементы (так называемое заполнение), и зарезервировав для них место, реальное исключение можно проводить при статичной форме хранения. В несимметричном случае для достижения численной устойчивости приходится накладывать ограничения на относительную величину главных элементов. В результате априорный выбор порядка исключения становится невозможным, что заставляет обращаться к динамическим структурам. Качество вычисляемого решения может пострадать, если в процессе исключения некоторые элементы матрицы сильно возрастают по сравнению с уровнем элементов исходной системы. Для положительно-определенной матрицы роста элементов не происходит, какова бы ни была последовательность исключения. В несимметричном случае (и в особенности для разреженных матриц, где требования к величине главного не так строги) контроль роста необходим. Таким образом, разработка эффективных численных методов решения несимметричных систем относится к актуальным проблемам вычислительной математики.

Целью данной работы является развитие работы [Свириденко, 2015] — разработка численно устойчивых прямых мультипликативных алгоритмов решения несимметричных линейных систем, учитывающих разреженность матриц, представленных в упакованном виде, а также рассмотрение формата хранения разреженных матриц, допускающего возможность параллельного выполнения любых матричных или матрично-векторных операций без распаковывания.

В данной работе среди множества определений разреженной матрицы принято то, которое утверждает, что приписывание матрице свойства разреженности эквивалентно утверждению о существовании алгоритма, который, используя ее разреженность, приводит к сокращению временной и емкостной сложности реализации по сравнению со стандартными алгоритмами [Писсанецки, 1988; Григорьева и др., 2011; Дмитриева, 2014].

Подход к реализации поставленной цели состоит в следующем.

- Два варианта алгоритма решения линейных систем, предложенные в [Свириденко, 2015], могут быть применены и для решения систем с плохо обусловленными матрицами коэффициентов. Варианты определяются стратегией выбора ведущего элемента: частичного (здесь и далее — *счв*) и полного (здесь и далее — *спв*). В основе *счв* лежит интеграция техники линейного программирования (здесь и далее — ЛП) для выбора ведущей строки, а в основе *спв* — интеграция техники ЛП для выбора ведущей строки и ведущего столбца. Последнее предполагает, что решение системы определяется решением задачи оптимизации, причем в рамках одной процедуры производится и выбор ведущего элемента, и исключение элементов по правилам алгоритма ЛП [Хакимова и др., 2010; Свириденко, 2015]. Следует отметить, что *счв*, как аппроксимация *спв*, дает возможность не только использовать перестановки строк и столбцов, но и существенно упростить построение вычислительной схемы алгоритма решения линейных систем, быть может за счет некоторой потери точности результатов.
- Прямые мультипликативные методы решения систем линейных уравнений являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ: разреженные матрицы системы позволяют получать мультипликаторы, главные строки которых также разрежены, а операция умножения вектора-строки на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора.

1. Феноменология подхода

В [Свириденко, 2015] предложен метод решения линейных систем, который может быть применен и для решения систем с плохо обусловленными матрицами коэффициентов, причем выбор варианта алгоритма определяется стратегией выбора ведущего элемента. Стратегия полного выбора ведущего элемента (*спв*) на примере плохо обусловленной системы (1) обсуждается ниже.

Опишем феноменологию прямого мультипликативного метода на примере решения системы вида (1). Такой подход к построению вычислительных схем применяли, например, Парлетт [Парлетт, 1983], Стренг [Стренг, 1980], Гилл и Мюррей [Гилл и др., 1985], Отаров [Отаров и др., 2010], Черноруцкий [Черноруцкий, 2011; Черноруцкий, 2012; Черноруцкий, 2013], Вержбицкий [Вержбицкий, 2005], Цыганков [Цыганков, 2001].

Пример 1.1. Решить систему [Вержбицкий, 2005]:

$$a = \begin{pmatrix} -10 \\ -26 \\ -16 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 2 & 9 & 2 & & \\ & 4 & 17 & -4 & \\ & & 4 & 15 & -8 \\ & & & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Вариант алгоритма определим следующим правилом выбора ведущего элемента: $i = j = k$, где i, j — номера ведущей строки и ведущего столбца на k-ом шаге исключения переменных. Такой вариант лежит в основе построения вычислительных схем прямых мультипликативных методов с перестановками строк и столбцов.

Шаг 1 (инициализация). Положить $i = j = 1$, вычислить главную строку $e^1_{1_1\bullet}$ мультипликатора $E^1_{1_1}$ для исключения x_1:

$$e^1_{1_1\bullet} = \left(e^1_{1_1 2} \quad e^1_{1_1 3} \quad e^1_{1_1 4} \quad e^1_{1_1 5}\right), \; e^1_{1\,j} = -a_{1\,j}/a_{1\,1}\,(j = 2, 3, 4, 5),$$

$$E^1_{1_1} = \begin{pmatrix} e^1_{1_1 2} & e^1_{1_1 3} & e^1_{1_1 4} & e^1_{1_1 5} \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи $-a_1 + a_{1\bullet}x = 0$:

$$x_1 = x^1_1 + e^1_{1_1\bullet}\left(x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5\right)^T, \; x^1_1 = a_1/a_{1\,1},$$

$$x_1 = -5 - 1/2\,x_2.$$

Шаг 2 (исключение). Положить $i = j = 2$, сформировать уравнение связи $-a_2 + a_{2\bullet}x = 0$:

$$a^2_2 + \left(a^2_{2\,2} \quad a^2_{2\,3} \quad a^2_{2\,4} \quad a^2_{2\,5}\right)\left(x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5\right)^T = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2_2 = -a_2 + a_{2\,1}x^1_1, \; \left(a^2_{2\,2} \quad a^2_{2\,3} \quad a^2_{2\,4} \quad a^2_{2\,5}\right) = a_{2\bullet}E^1_{1_1} \;\Rightarrow\; 16 + 8x_2 + 2x_3 = 0;$$

вычислить главную строку $e^2_{1_2\bullet}$ мультипликатора $E^2_{1_2}$ для исключения x_2:

$$e^2_{1_2\bullet} = \left(e^2_{1_2 3} \quad e^2_{1_2 4} \quad e^2_{1_2 5}\right), \; e^2_{1_2\,j} = -a^2_{2\,j}/a^2_{2\,2}\,(j = 3,4,5),$$

$$E_{1_2}^2=\begin{pmatrix} e_{1_2 3}^2 & e_{1_2 4}^2 & e_{1_2 5}^2 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/4 & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_2=x_2^2+e_{1_2\bullet}^2(x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T,\ x_2^2=-a_2^2\big/a_{2\,2}^2 \ \Rightarrow\ x_2=-2-1/4\,x_3 .$$

Шаг 3 (исключение). Положить $i=j=3$, сформировать уравнение связи $-a_3+a_{3\bullet}x=0$:

$$a_3^3+\left(a_{3\,3}^3 \quad a_{3\,4}^3 \quad a_{3\,5}^3\right)(x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_3^3=-a_3+a_{3\,1}x_1^1+a_{3\,2}x_2^2,\ \left(a_{3\,3}^3 \quad a_{3\,4}^3 \quad a_{3\,5}^3\right)=a_{3\bullet}E_{1_1}^1E_{1_2}^2\ \Rightarrow\ 8+16x_3-4x_4=0;$$

вычислить главную строку $e_{1_3\bullet}^3$ мультипликатора $E_{1_3}^3$ для исключения x_3:

$$e_{1_3\bullet}^3=\left(e_{1_3 4}^3 \quad e_{1_3 5}^3\right),\ e_{1_3\,j}^3=-a_{3\,j}^3\big/a_{3\,3}^3\ (j=4{,}5),$$
$$E_{1_3}^3=\begin{pmatrix} e_{1_3 4}^3 & e_{1_3 5}^3 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_3=x_3^3+e_{1_3\bullet}^3(x_4 \quad x_5)^T,\ x_3^3=-a_3^3\big/a_{3\,3}^3\ \Rightarrow\ x_3=-1/2+1/4\,x_4 .$$

Шаг 4 (исключение). Положить $i=j=4$, сформировать уравнение связи $-a_4+a_{4\bullet}x=0$:

$$a_4^4+\left(a_{4\,4}^4 \quad a_{4\,5}^4\right)(x_4 \quad x_5)^T=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_4^4=-a_4+a_{4\,1}x_1^1+a_{4\,2}x_2^2+a_{4\,3}x_3^3,\ \left(a_{4\,4}^4 \quad a_{4\,5}^4\right)=a_{4\bullet}E_{1_1}^1E_{1_2}^2E_{1_3}^3\ \Rightarrow\ 16x_4-8x_5=0;$$

вычислить главную строку $e_{1_4\bullet}^4$ мультипликатора $E_{1_4}^4$ для исключения x_4:

$$e_{1_4\bullet}^4=e_{1_4 5}^4=-a_{4\,5}^4\big/a_{4\,4}^4,$$
$$E_{1_4}^4=\begin{pmatrix} e_{1_4 5}^4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_4=x_4^4+e_{1_4 5}^4x_5,\ x_4^4=-a_4^4\big/a_{4\,4}^4\ \Rightarrow\ x_4=1/2\,x_5 .$$

Шаг 5 (исключение). Положить $i=j=5$, сформировать уравнение связи $-a_5+a_{5\bullet}x=0$:

$$a_5^5+a_{5\,5}^5x_5=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_5^5=-a_5+a_{5\,1}x_1^1+a_{5\,2}x_2^2+a_{5\,3}x_3^3+a_{5\,4}x_4^4,\ a_{5\,5}^5=a_{5\bullet}E_{1_1}^1E_{1_2}^2E_{1_3}^3E_{1_4}^4\ \Rightarrow\ -16+4x_5=0;$$

вычислить решение:

$$x^*=(-4 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4)^T.$$

Для трехдиагональных ленточных матриц вида (1.1) главные строки мультипликаторов содержат один ненулевой элемент, поэтому на итерации k не требуется выполнения этапа минимизации заполнения — исключения ненулевого элемента из всех главных строк мультипликаторов, полученных на предыдущих итерациях.

Решение системы уравнений прямым мультипликативным алгоритмом — это, как и решение с помощью LU-разложения, просто другая схема реализации метода исключения Гаусса, причем изменения в позиции очередной обрабатываемой строки матрицы не вносятся, что позволяет использовать статические форматы хранения данных.

Минимизация заполнения главных строк мультипликаторов остается основной задачей, так как возможность такой минимизации заложена в самой структуре прямых методов. Каждый из них допускает выбор ведущей строки и ведущего столбца. Каждому такому выбору соответствует свое значение последующего заполнения, быть может за счет некоторой потери точности результатов. Поэтому такие подходы к минимизации заполнения в данной работе не рассматриваются, так как возможность минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов заложена в самой структуре прямых мультипликативных методов. Опишем феноменологию минимизации заполнения главных строк мультипликаторов на примере решения системы вида (1).

Пример 1.2. Решить систему [Вержбицкий, 2005]:

$$a=\begin{pmatrix}-8\\7\\6\\-3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}16&-8&-4&\\-8&13&-4&-3\\-4&-4&9&\\&-3&&3\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Вариант алгоритма определим правилом выбора ведущего элемента: $i=j=k$.

Шаг 1 (инициализация). Положить $i=j=1$, вычислить главную строку $e^1_{1_1\bullet}$ мультипликатора $E^1_{1_1}$ для исключения x_1:

$$e^1_{1_1\bullet}=\left(e^1_{1_1\,2}\quad e^1_{1_1\,3}\quad e^1_{1_1\,4}\right),\ e^1_{1\,j}=-a_{1\,j}/a_{1\,1}\,(j=2{,}3{,}4),$$

$$E^1_{1_1}=\begin{pmatrix}e^1_{1_1\,2}&e^1_{1_1\,3}&e^1_{1_1\,4}\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/4&\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи $-a_1+a_{1\bullet}x=0$:

$$x_1=x_1^1+e^1_{1_1\bullet}\left(x_2\quad x_3\quad x_4\right)^T,\ x_1^1=a_1/a_{1\,1}\ \Rightarrow\ x_1=-1/2+1/2\,x_2+1/4\,x_3.$$

Шаг 2 (исключение). Положить $i=j=2$, сформировать уравнение связи $-a_2+a_{2\bullet}x=0$:

$$a_2^2+\left(a^2_{2\,2}\quad a^2_{2\,3}\quad a^2_{2\,4}\right)\left(x_2\quad x_3\quad x_4\right)^T=0,\ a_2^2=-a_2+a_{2\,1}x_1^1,\ \left(a^2_{2\,2}\quad a^2_{2\,3}\quad a^2_{2\,4}\right)=a_{2\bullet}E^1_{1_1}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -3+9x_2-6x_3-3x_4=0;$$

вычислить главную строку $e^2_{1_2\bullet}$ мультипликатора $E^2_{1_2}$ для исключения x_2:

$$e^2_{1_2\bullet}=\left(e^2_{1_2\,3}\quad e^2_{1_2\,4}\right),\ e^2_{1_2\,j}=-a^2_{2\,j}/a^2_{2\,2}\,(j=3{,}4),$$

$$E^2_{1_2} = \begin{pmatrix} e^2_{1_2\,3} & e^2_{1_2\,4} \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_2 = x_2^2 + e^2_{1_2\bullet}\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T,\ x_2^2 = -a_2^2 \big/ a_{2\,2}^2 \ \Rightarrow\ x_2 = -1/3 + 2/3\,x_3 + 1/3\,x_4;$$

исключить x_2 из уравнения связи, пересчитанного на предыдущем шаге (минимизация заполнения главной строки мультипликатора $E^1_{1_1}$):

$$x_1 = x_1^2 + e^1_{1_2\bullet}\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T,\ x_1^2 = x_1^1 + x_2^2 e^1_{1_1\,2},\ e^1_{1_2\bullet} = e^1_{1_1\bullet} E^2_{1_2} \ \Rightarrow\ x_1 = -1/3 + 7/12 x_3 + 1/6\,x_4,$$

$$E^1_{1_2} = \begin{pmatrix} & 7/12 & 1/6 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3 (исключение). Положить $i = j = 3$, сформировать уравнение связи $-a_3 + a_{3\bullet} x = 0$:

$$a_3^3 + \begin{pmatrix} a_{3\,3}^3 & a_{3\,4}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_3^3 = -a_3 + a_{3\,1} x_1^1 + a_{3\,2} x_2^2,\ \begin{pmatrix} a_{3\,3}^3 & a_{3\,4}^3 \end{pmatrix} = a_{3\bullet} E^1_{1_2} E^2_{1_2} \ \Rightarrow -6 + 4x_3 - 2x_4 = 0;$$

вычислить главную строку мультипликатора $E^3_{1_3}$ для исключения x_3:

$$e^3_{1_3\bullet} = e^3_{1_3\,4} = -a_{3\,4}^3 \big/ a_{3\,3}^3,$$

$$E^3_{1_3} = \begin{pmatrix} e^3_{1_3\,4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_3 = x_3^3 + e^3_{1_3\,4} x_4,\ x_3^3 = -a_3^3 \big/ a_{3\,3}^3 \ \Rightarrow\ x_3 = 3/2 + 1/2\,x_4;$$

исключить x_3 из уравнений связи, пересчитанных на предыдущих шагах (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов $E^1_{1_2}$, $E^2_{1_2}$):

$$x_1 = x_1^3 + e^1_{1_3\,4} x_4,\ x_1^3 = x_1^2 + x_3^3 e^1_{1_2\,3},\ e^1_{1_3\,4} = e^1_{1_2\bullet} E^3_{1_3} \ \Rightarrow\ x_1 = 13/24 + 11/24 x_4,$$

$$x_2 = x_2^3 + e^2_{1_3\,4} x_4,\ x_2^3 = x_2^2 + x_3^3 e^2_{1_2\,3},\ e^2_{1_3\,4} = e^2_{1_2\bullet} E^3_{1_3} \ \Rightarrow\ x_2 = 4/3 + 2/3\,x_4,$$

$$E^1_{1_3} = \begin{pmatrix} & & 11/24 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},\ E^2_{1_3} = \begin{pmatrix} & 2/3 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4 (исключение). Положить $i = j = 4$, сформировать уравнение связи $-a_4 + a_{4\bullet} x = 0$:

$$a_4^4 + a_{4\,4}^4 x_4 = 0,\ a_4^4 = -a_4 + a_{1\,1} x_1^1 + a_{4\,2} x_2^2 + a_{4\,3} x_3^3,\ a_{4\,4}^4 = a_{4\bullet} E^1_{1_3} E^2_{1_3} E^3_{1_3} \ \Rightarrow\ -1 + x_4 = 0;$$

вычислить решение:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Замечания к разделу 1. Разреженные матрицы встречаются при решении многих важных практических задач: структурного анализа, в теории графов, теории электрических сетей и энергосистем распределения энергии [Тьюарсон, 1977], при численном решении дифференциальных уравнений, математической физики, строительной механики, механики конструкций летательных и иных аппаратов; при прогнозировании метеорологических и гидрогеологических процессов [Брумштейн, 2004]; при обеспечении работы графических процессоров [Dehnavi et al., 2010], а также при изучении статического равновесия физических, технических, биологических, производственно-экономических и других типов систем [Солнцева и др., 2013].

Вопросами, связанными с разреженными матрицами произвольной структуры, занимаются главным образом математики прикладных дисциплин, а также специалисты других областей численного анализа, например области математического программирования, линейного и нелинейного. Так как многие задачи для разреженных матриц естественным образом формулируются на языке теории графов, то исследованиями занимаются и специалисты в этой области.

Можно отметить следующие особенности полученных до настоящего времени результатов, обуславливающие актуальность данной работы:

- не делалось серьезных попыток создать прямые мультипликативные алгоритмы решения системы линейных уравнений и задач ЛП, рассчитанные именно на разреженные матрицы;
- не делалось серьезных попыток создать прямые мультипликативные алгоритмы решения системы линейных уравнений для построения ньютоновских методов оптимизации с разреженными матрицами вторых производных [Черноруцкий, 2011; Черноруцкий, 2013];
- до сих пор считается, что вполне достаточно найти разумную модификацию существующих прямых методов решения линейных систем, большинство которых основано на приведении матрицы системы к одной из более простых форм — диагональной, треугольной и так далее; каждая из этих форм характеризуется наличием большого количества нулей, расположенных в заранее определенных позициях; прямой метод представляет собой последовательность шагов, на каждом из которых получают нули в нужных позициях очередного обрабатываемого столбца матрицы; при этом сохраняются нули, полученные ранее в предыдущих столбцах; однако операция по получению нулей, вообще говоря, приводит к появлению новых ненулевых элементов в еще не приведенной части матрицы, к ее заполнению; поэтому минимизация этого заполнения остается основной задачей, так как возможность такой минимизации заложена в самой структуре прямых методов [Тьюарсон, 1977]; каждый из них допускает выбор для проведения очередного шага любого из еще не обработанных строк и (или) любого из оставшихся столбцов; каждому такому выбору соответствует свое значение последующего заполнения.

2. Методы решения разреженных систем линейных уравнений

Большинство методов решения систем уравнений можно разделить на два класса:

- итерационные методы, позволяющие найти приближенное решение системы с заданной точностью;
- прямые методы, вычисляющие решение за конечное число арифметических операций.

Преимущество итерационных методов заключается в минимальных затратах по использованию памяти. Основной недостаток состоит в том, что число итераций существенно зависит от числа обусловленности исходной матрицы.

Среди итерационных методов можно выделить [Кундас, 2010]:

- метод последовательных приближений;
- метод простой итерации — метод Якоби;
- одношаговый циклический процесс — метод Зейделя;
- метод Гаусса–Зейделя;
- метод последовательной релаксации;

- метод минимальных невязок;
- метод сопряженных градиентов и другие.

Существуют различные подходы к построению итерационных методов, большинство из них — это проекционные методы, а также методы, основанные на подпространстве Крылова (например, GMRES, CG, BCG). Кроме того, значимым направлением в развитии итерационных методов является техника построения предобусловливающих матриц, например методы ILU и Multigrid. Следует отметить, что метод Multigrid был предложен Федоренко и Бахваловым и под названием «многосеточный метод» [Bakhvalov, 1996; Fedorenko, 1962]. Наиболее полный обзор итерационных методов приведен в работах [Saad et al., 2000; Saad, 2003].

Прямые методы, в отличие от итерационных, дают решение с заранее известным числом арифметических операций и эффективны для решения системы уравнений со многими правыми частями. Указанные методы основаны на разложении (факторизации) матрицы на множители (чаще всего LU-разложение). Однако они более требовательны к памяти и к временны́м ресурсам, так как в процессе факторизации теряется свойство разреженности, а факторы L и U содержат на несколько порядков больше ненулевых элементов, чем исходная матрица. К примеру [Соловьев, 2014], для двумерной задачи дискретизации методами конечных разностей элементов на сетке размером $n \times n$ с общим числом неизвестных $N = O(n^2)$ число ненулевых элементов в матрице равно $O(n)$, а в соответствующих ей множителях $L(U)$ уже $O(n^{3/2})$. Для трехмерных задач на сетке $n \times n \times n$ с общим числом неизвестных $N = O(n^3)$ число ненулевых элементов составляет соответственно $O(n)$ и $O(n^{5/3})$, а число операций — $O(n^{7/3})$. Эффективность прямых методов может быть повышена путем применения алгоритмов параллельных и вложенных сечений, уменьшающих это заполнение [George et al., 1984; Karypis et al., 1998]. В результате для двумерной задачи заполняемость $L(U)$-факторов уменьшается до $O(N \log_2 N)$, а число арифметических операций — до $O(n^{3/2})$. Для трехмерных задач имеем соответственно $O(n^{4/3})$ и $O(n^2)$, что непозволительно много для практических задач.

Для дальнейшего повышения эффективности прямых методов в последнее время развивается техника аппроксимации обратной матрицы, а также факторов L и U блочно-малоранговой структурой [Соловьев, 2014]. Пионерами в области построения блочно-малоранговых аппроксимаций являются российские ученые, в частности Тыртышников [Goreinov et al., 1997; Tyrtyshnikov, 1996]. Для хранения аппроксимированных матриц Хакбушем была предложена HSS-структура, а также HSS-арифметика для работы с ними [Hackbusch, 1999; Bebendorf et al., 2003]. Кроме того, для ряда задач доказано, что множители L и U имеют блочную структуру со свойствами малого ранга для внедиагональных блоков [Chandrasekaran et al., 2010]. После применения указанной техники малоранговой/HSS аппроксимации для двумерных задач размер памяти для хранения $L(U)$-факторов равен $O(n)$, число операций для построения множителей также равно $O(n)$. Для трехмерных задач размер памяти, число операций — $O(n^{4/3})$ [Xia, 2013]. Применение указанной техники в прямых методах широко используется в последнее время [Borne et al., 2007; Xia, 2012; Xia, London, 2012].

Решение на основе метода Гаусса. Наиболее известная форма гауссова исключения та, в которой система (1.1) приводится к верхнетреугольному виду путем вычитания одних уравнений, умноженных на подходящие числа, из других уравнений; полученная треугольная система решается с помощью обратной подстановки. Математически это эквивалентно тому, что сначала строится разложение $A = LU$ (этап LU-факторизации), где L — нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали (L-фактор), а U — верхнетреугольная матрица (U-фактор). Затем треугольные системы $Ly = a$ и $Ux = y$ решаются прямой и обратной подстановками (второй этап). Следует отметить, что построение разложения LU требует $O(n^3)$ арифметических операций, что значительно больше по сравнению со вторым этапом: $O(n^2)$ операций.

Если A — симметричная знаконеопределенная матрица, то часто используемой альтернативой гауссову исключению является $A = LDL^T$-разложение, где L — нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а D — диагональная матрица. Чтобы завершить решение линейной системы $Ax = a$, надо выполнить прямую и обратную подстановки, а также решить систему с диагональной матрицей D: $Lz = a$, $Dy = z$, $L^T x = y$.

Кроме того, следует отметить распространенный случай, когда A — симметричная положительно-определенная матрица. Тогда применяется разложение Холесского $A = LL^T$ с нижнетреугольной матрицей L. Прямая и обратная подстановки будут иметь вид $Ly = a$, $L^T x = y$.

Следует отметить, что для решения знаконеопределенных систем принцип работы алгоритма остается прежним, а в реализации добавляется техника выбора ведущего элемента [Соловьев, 2014].

Рассмотрим пути увеличения эффективности гауссова исключения, предложенные Соловьевым [Соловьев, 2014], для решения двух- и трехмерных задач математической физики. Матрицы, получаемые в результате дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных как для двух-, так и для трехмерных задач, содержат большое количество нулевых элементов. Поэтому имеет смысл рассмотреть структуру матрицы, то есть информацию о том, в каких позициях матрицы хранятся ненулевые элементы.

В качестве ключевого момента в понимании особенностей таких матриц является решение двумерных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка на примере уравнения Гельмгольца (в частности, Лапласа). Рассматривается прямоугольная расчетная область с пятиточечной разностной аппроксимацией на прямоугольной сетке, образованной семействами линий, параллельных границам исходной области (n_1 вертикальных и n_2 горизонтальных). Известно, что структура матрицы двумерной разностной задачи в значительной степени зависит от того, какая выбирается упорядоченность узлов сетки. Соответственно определяются векторы неизвестных и правых частей. Наиболее простой является построчная нумерация, в которой нумеруются поочередно все узлы из 1-й строки, затем из 2-й и так далее до последней. Отсюда следует, что матрица A является пятидиагональной и ее представление наиболее наглядно в блочном трехдиагональном виде, где каждый блок, расположенный на главной диагонали, — это квадратная трехдиагональная матрица порядка n_1, а два других блока, расположенные на соседних диагоналях, — квадратные диагональные, тоже порядка n_1. Каждая блочная строка матрицы A соответствует уравнениям одной линии сетки, а блочный порядок матрицы равен n_2.

В трехмерном случае рассматривается семиточечная разностная схема на параллелепипедальной сетке, образованной вертикальными (n_1, n_2) и горизонтальными координатными плоскостями (n_3). Матрица такой системы имеет порядок $n_1 n_2 n_3$ и может быть представлена в блочно-трехдиагональной форме аналогично двумерному случаю. Узлы нумеруются по горизонтальным плоскостям: сначала все узлы из первой плоскости (порядок нумерации аналогичен двумерному случаю), затем из второй и так далее до n_3. Не вдаваясь в подробности построения всей матрицы, следует отметить, что структура блоков, расположенных на главной диагонали, аналогична структуре всей матрицы для двумерного случая и имеет порядок $n_1 n_2$. Блоки, расположенные на соседних диагоналях, — квадратные диагональные порядка $n_1 n_2$. Каждая блочная строка матрицы A соответствует уравнениям одной плоскости сетки, а блочный порядок матрицы равен n_3.

Для оценки трудоемкости метода Гаусса, а также затрат по памяти для хранения данных считается, что число расчетных узлов по каждому направлению одинаково: $n = n_1 = n_2 = n_3$. Если же учесть свойство симметричности рассмотренных матриц, то в двумерном случае достаточно хранить одну главную диагональ и две кодиагонали ($3n^2 - 2n$ ненулевых элементов). В трехмерном — одну главную диагональ и три кодиагонали ($4n^3 - 3n^2$ ненулевых элементов).

Несмотря на такой экономный способ хранения, после применения алгоритма факторизации Холесского получаются ленточные заполненные матрицы с шириной ленты n в двумерном и n^2 в трехмерном случаях. Исходя из того, что число арифметических операций для LL^T-разложения ленточной матрицы порядка m и шириной ленты k равно $O(k^2m)$, а число ненулевых элементов равно $O(km)$, получается, что число арифметических операций Q_1 и объем оперативной памяти P_1 в двумерном случае приблизительно равны $O(n^4)$ и $O(n^3)$, но в трехмерном — $O(n^7)$ и $O(n^5)$ соответственно. Это непозволительно много, особенно для трехмерных задач, так как для расчетной сетки 100^3 необходимо порядка 80 GB для хранения матрицы L с удвоенной точностью.

Одним из путей повышения эффективности алгоритма гауссова исключения и уменьшения затрат по памяти является использование алгоритмов переупорядочивания элементов исходной матрицы. Переупорядочивание эквивалентно умножению исходной матрицы A слева и справа на соответствующую матрицу перестановок P.

Один из наиболее эффективных алгоритмов переупорядочивания основывается на методе вложенных сечений (Nested Dissection method), позволяющем на порядок увеличить эффективность алгоритма гауссова исключения [Lipton et al., 1979; George, 1973].

Применение алгоритма вложенных сечений позволяет повысить эффективность гауссова исключения на порядок [Соловьев, 2014]. Если n — общее число неизвестных, то для двумерного случая объем оперативной памяти P_1 и число арифметических операций Q_1 приблизительно равны $O(N\log(N))$ и $O(n^{3/2})$, а в трехмерном — $O(n^{4/3})$ и $O(n^2)$ соответственно [George, 1973]. Таким образом, в двумерном случае прямой метод на основе LU-разложения является конкурентоспособным с итерационными. Для трехмерных задач это до сих пор открытый вопрос, и дальнейшее повышение эффективности алгоритма гауссова исключения связано с возможностью использования техники аппроксимации матрицами малого ранга, а также HSS-формата применительно к плотным внедиагональным и диагональным блокам в L-множителях.

Решение на основе метода Холесского. Для симметричных положительно-определенных матриц факторизация выполняется методом Холесского. Для этого в большинстве случаев используется двухфазный подход [Лебедев и др., 2015]: вначале находится структура (портрет) фактора, т. е. расположение ненулевых элементов (символьное разложение), затем полученная структура заполняется значениями (численное разложение). Необходимо отметить, что символьная фаза выполняется гораздо быстрее численной, поэтому множество усилий исследователей направлено на оптимизацию и распараллеливание численной фазы.

Существует несколько методов выполнения численной фазы разложения Холесского. Среди них можно выделить три наиболее широко используемых на практике: ориентированный влево (left-looking), ориентированный вправо (right-looking) [Davis, 2006] и мультифронтальный (multifrontal) [Liu, 1992]. Основное отличие между ними заключается в способе формирования результирующего треугольного фактора, а также в способе хранения и размещения в памяти промежуточных результатов. Перечисленные методы показывают схожую производительность на различных тестовых наборах матриц, но, с точки зрения многих исследователей, мультифронтальный метод является наиболее перспективным для распараллеливания [Kalinkin et al., 2013; George et al., 2011].

Итерационное уточнение. Многочисленные исследования алгоритмов показывают, что для итерационных методов продолжительность решения задачи возрастает с увеличением размерности значительно медленнее, чем для прямых методов. Отсюда следует, что, начиная с некоторой размерности задачи, итерационный метод становится более быстрым, чем прямой [Кундас, 2010]. Указанная закономерность носит общий характер [Перельмутер, 2002]. Однако надо отметить, что возможны случаи, когда итерационные методы не могут дать удовлетворительное решение в связи с плохой обусловленностью матрицы [Перельмутер, 2002], а прямые методы при этом могут выполнить расчет за вполне приемлемое время. Из этого следует, что рекомендуется применение как прямых, так и итерационных методов [Кундас, 2010]. Например, алгоритм итерационного уточнения является универсальным способом уменьшения погрешности вычислений [Соловьев, 2014; Отаров и др., 2010].

Рассмотрение интеграции с одним из итерационных методов не является целью данной работы и находится в стадии исследования итерационных методов.

Недостатки схем реализации метода Гаусса. В [Берчун и др., 2015] отмечено, что при программной реализации прямых методов, дающих в теории точный результат, сказываются ограничения средств вычислительной техники. Прямые методы не учитывают фактора высокой степени разреженности исходных матриц, в процессе решения могут быть получены практически полностью заполненные матрицы. Как следствие, для хранения структур данных требуется объем оперативной памяти, который в общем случае пропорционален квадрату размерности системы уравнений. Для того чтобы этого избежать, применяют перестановку строк и столбцов матрицы до запуска самого метода решения. Например, для симметричных матриц существует алгоритм Катхилла–Макки (Cuthill–McKee), который позволяет привести исходную матрицу к ленточному виду с минимальной шириной этой ленты. Применение подобных перестановок сокращает не только требуемый объем памяти, но и процессорное время, необходимое для работы прямого метода решения системы уравнений. Таким образом, рассмотренные перестановки, в сочетании с увеличением доступных объемов оперативной памяти на современных компьютерах, расширяют возможности применения прямых методов с точки зрения размерности задач. Однако это не исключает проблемы округлений при вычислениях в условиях ограниченной разрядной сетки процессора. Округления неизбежны при любых вычислениях на компьютере, но их влияние напрямую зависит не просто от общего числа арифметических операций, которое определяют при оценке вычислительной сложности алгоритма, а от числа арифметических действий, которые производятся с одним и тем же элементом данных. Особенно следует выделить операции сложения-вычитания, в ходе которых возможно получение большого количества неверных знаков мантиссы результата, например при вычитании двух близких чисел. Для прямых методов решения системы уравнений характерным является вычисление очередных элементов матриц на основе ранее вычисленных. Например, если вычислительную сложность метода Гаусса оценивают как $O(n^3)$, то это значит, что при вычислении правого нижнего элемента матрицы в процессе прямого хода приходится учитывать $O(n^3)$ ошибок округления. Для снижения влияния ошибок округления в ходе машинных вычислений прямые методы решения системы уравнений несколько модифицируются за счет выбора главного элемента. Однако для плохо обусловленных систем это не является гарантией корректности решения. Кроме того, выбор главного элемента предполагает перестановку строк и столбцов матрицы, что может вступить в противоречие с логикой сокращения числа ненулевых элементов, которая обсуждалась выше.

2.1. Решение на основе прямых мультипликативных методов

Ниже приводится детальное описание всех операций, выполняемых по ходу построения решения x^* системы (1) численно устойчивым прямым мультипликативным алгоритмом с перестановками.

Если в процессе вычислений элементы становятся меньше по абсолютной величине так называемого критического значения ε_0, то их предлагается приравнивать нулю.

Вычислительная схема 2.1.1 решения системы уравнений прямым мультипликативным алгоритмом с перестановками

Шаг 0 (инициализация). Положить

$$k = 1,\ x^0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T,\ c^0 = \begin{pmatrix} |a_{11}| & \cdots & |a_{nn}| \end{pmatrix}.$$

Шаг 1 (расчет элементов a_k^k, $a_{k\,j}^k$ уравнения связи). Вычислить номер r ведущей строки:

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^{k-1} \right| \left(i = k, \ldots, n \right)$$

и поменять местами элементы r-ой и k-ой строк матриц A, a.
Если $k = 1$, то вычислить:

$$a_k^k + \begin{pmatrix} a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_k^k = -a_k, \ \begin{pmatrix} a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k\,k} & \cdots & a_{k\,n} \end{pmatrix}$$

и перейти к шагу 2; иначе вычислить:

$$a_k^k + \begin{pmatrix} a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_k^k = -a_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{k\,j} x_j^j, \ \begin{pmatrix} a_{k\,k}^k & \cdots & a_{k\,n}^k \end{pmatrix} = a_{k\bullet} \prod_{i=1}^{k-1} E_{1_i}^i = a_{k\bullet} \begin{pmatrix} e_{1_{k-1}\,k}^1 & \cdots & e_{1_{k-1}\,n}^1 \\ & \vdots & \\ e_{1_{k-1}\,k}^{k-1} & \cdots & e_{1_{k-1}\,n}^{k-1} \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2 (анализ элементов a_k^k, $a_{k\,j}^k$ уравнения связи). Если

$$\left| a_k^k \right| > \varepsilon_0, \ \left| a_{k\,j}^k \right| \le \varepsilon_0 \left(j = 1, \ldots, n \right),$$

то остановиться (проверка несовместности); если

$$\left| a_k^k \right| \le \varepsilon_0, \ \left| a_{k\,j}^k \right| \le \varepsilon_0 \left(j = 1, \ldots, n \right),$$

то остановиться (проверка вырожденности).

Шаг 3 (расчет главной строки $e_{1_k\bullet}^k$ мультипликатора $E_{1_k}^k$). Вычислить номер q ведущего столбца:

$$\Theta_q = \min_j \left| c_j^{k-1} / a_{r\,j} \right| \left(j = k, \ldots, n \right).$$

Поменять местами элементы q-го и k-го столбцов матриц A, c^0, запомнить порядок неизвестных. Пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_k = x_k^k + e_{1_k\bullet}^k \begin{pmatrix} x_{k+1} & \cdots & x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_k^k = -a_k^k / a_{k\,k}^k, \ e_{1_k\bullet}^k = -\begin{pmatrix} a_{k\,k+1}^k & \ldots & a_{k\,n}^k \end{pmatrix} / a_{k\,k}^k,$$

$$E_{1_k}^k = \begin{pmatrix} e_{1_1\,k+1}^1 & \cdots & e_{1_1\,n}^1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4 (расчет элементов x^k, c^k, $e_{1_k\bullet}^i$). Пересчитать c^{k-1}:

$$c^k = \begin{pmatrix} c_{k+1}^k & \cdots & c_n^k \end{pmatrix} = c^{k-1} E_{1_k}^k.$$

Если $k=1$ то вычислить решение уравнения $a_{k\bullet}x=a_k$:

$$x^k=\begin{pmatrix}x_1^k & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$$

и перейти к шагу 5; иначе вычислить решение системы уравнений $a_{i\bullet}x=a_i\ (i=1,\ldots,k)$:

$$x_i=x_i^k+e_{1_k\bullet}^i\begin{pmatrix}x_{k+1} & \cdots & x_n\end{pmatrix}^T,\ x_i^k=x_i^i+x_k^k e_{1_{k-1}\,k}^i\quad (i=1,\ldots,k-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x^k=\begin{pmatrix}x_1^k & \cdots & x_k^k & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

пересчитать $e_{1_{k-1}\bullet}^i$ (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов):

$$e_{1_k\bullet}^i=e_{1_{k-1}\bullet}^i E_{1_k}^k\ (i=1,\ldots,k-1).$$

Шаг 5 (расчет x^*). Положить $k=k+1$. Если $k\neq n$, то перейти к шагу 1; иначе вычислить:

$$a_n^n+a_{n\,n}^n x_n=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_n^n=-a_n+a_{n\,1}x_1^1+\cdots+a_{n\,n-1}x_{n-1}^{n-1}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a_{n\,n}^n=a_{n\bullet}\prod_{i=1}^{n-1}E_{1_i}^i=a_{n\bullet}\begin{pmatrix}e_{1_{n-1}\,n}^1\\ \vdots\\ e_{1_{n-1}\,n}^{n-1}\\ 1\end{pmatrix},$$
$$x^n=\begin{pmatrix}x_1^{n-1}-e_{1_{n-1}\,n}^1\ a_n^n\big/a_{n\,n}^n & \cdots & x_{n-1}^{n-1}-e_{1_{n-1}\,n}^{n-1}\ a_n^n\big/a_{n\,n}^n & -a_n^n\big/a_{n\,n}^n\end{pmatrix}\Rightarrow\ x^*.$$

Опишем феноменологию интеграции техники ЛП для выбора ведущей строки и ведущего столбца на примере решения плохо обусловленной системы.

Пример 2.1.1. Решить систему [Отаров и др., 2010]

$$a=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/5\\ 2/7\\ 2/9\\ 2/11\\ 2/13\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6\\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7\\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8\\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9\\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10\\ 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 & 1/10 & 1/11\end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Плохо обусловленная система (2.1.1) была решена методом дифференциального спуска (∂c), который объединяет в себе основные достоинства как итерационных [Галанов, 1970], так и прямых методов решения систем уравнений, с сохранением десяти десятичных знаков после запятой [Отаров, 1987]:

$$x_1^{\partial c}=0{,}0839160838,\ x_2^{\partial c}=2{,}9370629405,\ x_3^{\partial c}=-7{,}8321678531,$$
$$x_4^{\partial c}=14{,}0979021488,\ x_5^{\partial c}=-12{,}5874126410,\ x_6^{\partial c}=4{,}3076923280.$$

Для полученного решения нормированная сумма модулей невязок:

$$\rho^{\partial c}=\left(\sum_{i=1}^{6}\left|-a_i+a_{i\bullet}x^{\partial c}\right|\right)\Big/6\approx 4\times10^{-12}.$$

Опишем феноменологию прямого мультипликативного метода на примере решения системы (2.1.1) с точностью до десяти значащих цифр после запятой, используя стратегию полного выбора ведущего элемента (*спв*).

Шаг 1 (инициализация). Положить

$$c^0 = (1 \quad 1/3 \quad 1/5 \quad 1/7 \quad 1/9 \quad 1/11), \quad x^0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T,$$

вычислить номер r ведущей строки по формуле

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^0 \right| (i = 1,2,3,4,5,6) = \left| -a_1 + a_{1\bullet} x^0 \right| = 0,6666666666,$$

вычислить номер q ведущего столбца по формуле:

$$\Theta_q = \min_j \left| c_j^0 / a_{1\,j} \right| \, (j = 1,2,3,4,5,6) = \left| c_6^0 / a_{1\,6} \right| = 0,5454545454.$$

Положить $i = 1$, $j = 6$ и вычислить главную строку мультипликатора $E_{6_1}^1$ для исключения x_6:

$$e_{6_1\bullet}^1 = \left(e_{6_1\,1}^1 \quad e_{6_1\,2}^1 \quad e_{6_1\,3}^1 \quad e_{6_1\,4}^1 \quad e_{6_1\,5}^1 \right), \; e_{6_1\,j}^1 = -a_{1\,j} / a_{1\,6} \, (j = 1,2,3,4,5),$$

$$E_{6_1}^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ e_{6_1\,1}^1 & e_{6_1\,2}^1 & e_{6_1\,3}^1 & e_{6_1\,4}^1 & e_{6_1\,5}^1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ -6 & -3 & -2 & -1,5 & -1,2 & \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи $-a_1 + a_{1\bullet} x = 0$:

$$x_6 = x_{6_1}^1 + e_{6_1\bullet}^1 (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T, \; x_{6_1}^1 = a_1 / a_{1\,6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_6 = 4 - 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 1,5x_4 - 1,2x_5;$$

положить

$$x^1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4)^T,$$
$$c^1 = c^0 E_{6_1}^1 = (0,4545454545 \quad 0,1818181818 \quad 0,0181818181 \quad 0,0064935064 \quad 0,002020202).$$

Шаг 2 (исключение x_6). Вычислить номер r ведущей строки:

$$\theta_r = \max_i \left| -a_i + a_{i\bullet} x^1 \right| (i = 2,3,4,5,6) = \left| -a_4 + a_{4\bullet} x^1 \right| = 0,2222222222;$$

сформировать уравнение связи $-a_4 + a_{4\bullet} x = 0$:

$$a_4^2 + \left(a_{4\,1}^2 \quad a_{4\,3}^2 \quad a_{4\,3}^2 \quad a_{4\,4}^2 \quad a_{4\,5}^2 \right) (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5)^T = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_4^2 = -a_4 + a_{4\,6} x_6^1, \; \left(a_{4\,1}^2 \quad a_{4\,3}^2 \quad a_{4\,3}^2 \quad a_{4\,4}^2 \quad a_{4\,5}^2 \right) = a_{4\bullet} E_{6_1}^1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0,2222222222 - 0,4166666666\, x_1 - 0,1333333333\, x_2 -$$
$$- 0,0555555555\, x_3 - 0,0238095238\, x_4 - 0,0083333333\, x_5 = 0;$$

вычислить номер q ведущего столбца:

$$\Theta_q = \min_j \left| c_j^1 / a_{4\,j}^2 \right| \, (j = 1,2,3,4,5) = \left| c_5^1 / a_{4\,5}^2 \right| = 0,2424242409.$$

Положить $i=4$, $j=5$ и вычислить главную строку мультипликатора $E_{5_2}^2$ для исключения x_5:

$$e_{5_2\bullet}^2=\left(e_{5_2\,1}^2 \quad e_{5_2\,2}^2 \quad e_{5_2\,3}^2 \quad e_{5_2\,4}^2\right),\; e_{5_2\,j}^2=-a_{4\,j}^2/a_{4\,5}^2\left(j=1,2,3,4\right),$$

$$E_{5_2}^2=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ e_{5_2\,1}^2 & e_{5_2\,2}^2 & e_{5_2\,3}^2 & e_{5_2\,4}^2 & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -50 & -16 & -6{,}6666666666 & -2{,}8571428571 & \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_5=x_5^2+e_{5_2\bullet}^2\left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\right)^T,\; x_5^2=-a_4^2/a_{4\,5}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_5=26{,}6666666666-50\,x_1-16\,x_2-6{,}6666666666\,x_3-2{,}8571428571\,x_4.$$

Исключить x_5 из уравнения связи, пересчитанного на предыдущем шаге (минимизация заполнения главной строки мультипликатора $E_{6_1}^1$):

$$x_6^2=x_6^1+x_5^2e_{6_1\,5}^1,\; e_{6_2\bullet}^1=e_{6_1\bullet}^1E_{5_2}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_6=-28+54\,x_1+16{,}2\,x_2+5{,}9999999999\,x_3+1{,}9285714285\,x_4,$$

$$E_{6_2}^1=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 54 & 16{,}2 & 5{,}9999999999 & 1{,}9285714285 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^2=\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 26{,}6666666666 \quad -28\right)^T,$$
$$c^2=c^1E_{5_2}^2=\left(0{,}3535353545 \quad 0{,}1494949498 \quad 0{,}0047138047 \quad 0{,}0007215006\right).$$

Шаг 3 (исключение x_5, x_6). Вычислить номер ведущей строки:

$$\theta_r=\max_i\left|-a_i+a_{i\bullet}x^2\right|\left(i=2,3,5,6\right)=\left|-a_2+a_{2\bullet}x^2\right|=0{,}0444444444,$$

сформировать уравнение связи $-a_2+a_{2\bullet}x=0$:

$$a_2^3+\left(a_{2\,1}^3 \quad a_{2\,2}^3 \quad a_{2\,3}^3 \quad a_{2\,4}^3\right)\left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\right)^T=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2^3=-a_2+a_{2\,5}x_5^2+a_{2\,6}x_6^2,\; \left(a_{2\,1}^3 \quad a_{2\,2}^3 \quad a_{2\,3}^3 \quad a_{2\,4}^3\right)=a_{2\bullet}E_{6_2}^1E_{5_2}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}0444444444-0{,}1190476190\,x_1-0{,}0190476190\,x_2-0{,}0039682539\,x_3-0{,}0006802721\,x_4=0,$$

вычислить номер q ведущего столбца:

$$\Theta_q=\min_j\left|c_j^2/a_{2\,j}^3\right|\left(j=1,2,3,4\right)=\left|c_4^2/a_{2\,4}^3\right|=1{,}0606058957.$$

Положить $i=2$, $j=4$ и вычислить главную строку мультипликатора $E_{4_3}^3$ для исключения x_4:

$$e_{4_3\bullet}^3=\left(e_{4_3\,1}^3 \quad e_{4_3\,2}^3 \quad e_{4_3\,3}^3\right),\; e_{4_3\,j}^3=-a_{2\,j}^3/a_{2\,4}^3\left(j=1,2,3\right),$$

$$E^3_{4_3} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ e^3_{4_3\,1} & e^3_{4_3\,2} & e^3_{4_3\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ -175{,}0000022750 & -28{,}0000002940 & -5{,}8333333088 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_4 = x_4^3 + e^3_{4_3\bullet}(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T, \ x_4^3 = -a_2^3 / a_{2\,4}^3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x_4 = 65{,}3333341173 - 175{,}0000022750\,x_1 - 28{,}0000002940\,x_2 - 5{,}8333333088\,x_3\,.$$

Исключить x_4 из уравнений связи, пересчитанных на предыдущих шагах (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов $E^1_{6_2}$, $E^2_{5_2}$):

$$x_6 = 98{,}0000015072 - 283{,}5000043750\,x_1 - 37{,}8000005650\,x_2 - 5{,}2499999523\,x_3\,,$$

$$E^1_{6_3} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ -283{,}5000043750 & -37{,}8000005650 & -5{,}2499999523 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_5 = -160{,}0000022371 + 450{,}0000064925\,x_1 + 64{,}0000008388\,x_2 + 9{,}9999999297\,x_3\,,$$

$$E^2_{5_3} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 450{,}0000064925 & 64{,}0000008388 & 9{,}9999999297 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^3 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 65{,}3333341173 \quad -160{,}0000022371 \quad 98{,}0000015072)^T,$$
$$c^3 = c^2 E^3_{4_3} = (0{,}2272728528 \quad 0{,}1292929495 \quad 0{,}0005050547).$$

Шаг 4 (исключение x_4, x_5, x_6). Вычислить номер ведущей строки:

$$\theta_r = \max_i \left|-a_i + a_{i\bullet}x^3\right| (i = 3,5,6) = \left|-a_6 + a_{6\bullet}x^3\right| = 0{,}0145040149;$$

сформировать уравнение связи $-a_6 + a_{6\bullet}x = 0$:

$$a_6^4 + \left(a^4_{6\,1} \quad a^4_{6\,2} \quad a^4_{6\,3}\right)(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_6^4 = -a_6 + a_{6\,4}x_4^3 + a_{6\,5}x_5^3 + a_{6\,6}x_6^3, \ \left(a^4_{6\,1} \quad a^4_{6\,2} \quad a^4_{6\,3}\right) = a_{6\bullet}E^1_{6_3}E^2_{5_3}E^3_{4_3} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 0{,}0145040149 - 0{,}0505050517\,x_1 - 0{,}0046176047\,x_2 - 0{,}0004208753\,x_3 = 0;$$

вычислить номер q ведущего столбца:

$$\Theta_q = \min_j \left|c_j^3 / a^4_{2\,j}\right| \ (j = 1,2,3) = \left|c_3^3 / a^4_{2\,3}\right| = 1{,}2000103118.$$

Положить $i=6$, $j=3$ и вычислить главную строку мультипликатора $E^4_{3_4}$ для исключения x_3:

$$e^4_{3_4\bullet}=\left(e^4_{3_4 1}\quad e^4_{3_4 2}\right),\ e^4_{3_4 j}=-a^4_{6\,j}\big/a^4_{6\,3}\left(j=1,2\right),$$

$$E^4_{3_4}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\\ e^4_{3_4 1} & e^4_{3_4 2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\\ -120{,}0000373032 & -10{,}9714319181\end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_3=x^4_3+e^4_{3_4\bullet}\left(x_1\quad x_2\right)^T,\ x^4_3=-a^4_6\big/a^4_{6\,3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_3=34{,}4615492997-120{,}0000373032\,x_1-10{,}9714319181\,x_2.$$

Исключить x_3 из уравнений связи, пересчитанных на предыдущих шагах (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов $E^1_{6_3}$, $E^2_{5_3}$, $E^3_{4_3}$):

$$x_6=-82{,}9231306724+346{,}5001857427\,x_1+19{,}8000164816\,x_2,$$

$$E^1_{6_4}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\\ 346{,}5001857427 & 19{,}8000164816 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$x_5=184{,}6154883372-750{,}0003581034\,x_1-45{,}7143175709\,x_2,$$

$$E^2_{5_4}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\\ -750{,}0003581034 & -45{,}7143175709 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$x_4=-135{,}6923692854+525{,}0002123829\,x_1+36{,}0000189590\,x_2,$$

$$E^3_{4_4}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\\ 525{,}0002123829 & 36{,}0000189590 & 0\end{pmatrix}.$$

Положить

$$x^4=\left(0\quad 0\quad 34{,}4615492997\quad -135{,}6923692854\quad 184{,}6154883372\quad -82{,}9231306724\right)^T,$$

$$c^4=c^3E^4_{3_4}=\left(0{,}1666662699\quad 0{,}1237517762\right).$$

Шаг 5 (исключение x_3, x_4, x_5, x_6). Вычислить номер ведущей строки:

$$\theta_r=\max_i\left|-a_i+a_{i\bullet}x^4\right|\left(i=3,5\right)=\left|-a_3+a_{3\bullet}x^4\right|=0{,}0005494496;$$

сформировать уравнение связи $-a_3+a_{3\bullet}x=0$:

$$a^5_3+\left(a^5_{3\,1}\quad a^5_{3\,2}\right)\left(x_1\quad x_2\right)^T=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_3^5 = -a_3 + a_{3\,3}x_3^4 + a_{3\,4}x_4^4 + a_{3\,5}x_5^4 + a_{3\,6}x_6^4,\ \begin{pmatrix} a_{3\,1}^5 & a_{3\,2}^5 \end{pmatrix} = a_{3\bullet}E_{6_4}^1 E_{5_4}^2 E_{4_4}^3 E_{3_4}^4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}0005494496 + 0{,}0029761871\,x_1 + 0{,}0001020402\,x_2 = 0;$$

вычислить номер q ведущего столбца:

$$\Theta_q = \min_j \left| c_j^4 \big/ a_{3\,j}^5 \right| \ (j = 1,2) = \left| c_1^4 \big/ a_{3\,1}^5 \right| = 55{,}9999302127.$$

Положить $i = 3$, $j = 1$ и вычислить главную строку мультипликатора $E_{1_5}^5$ для исключения x_1:

$$e_{1_5\bullet}^5 = e_{1_5\,1}^5 = -a_{3\,2}^5 \big/ a_{3\,1}^5,$$

$$E_{1_5}^5 = \begin{pmatrix} e_{1_5\,1}^5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0342855460 \\ 1 \end{pmatrix};$$

пересчитать элементы уравнения связи:

$$x_1 = x_1^5 + e_{1_5\,1}^5 x_2,\ x_1^5 = -a_3^5 \big/ a_{3\,1}^5\ \Rightarrow\ x_1 = 0{,}1846152750 - 0{,}0342855460 x_2.$$

Исключить x_1 из уравнений связи, пересчитанных на предыдущих шагах (минимизация заполнения главных строк мультипликаторов $E_{6_4}^1$, $E_{5_4}^2$, $E_{4_4}^3$, $E_{3_4}^4$):

$$x_6 = -18{,}9539035939 + 7{,}9200684243\,x_2,$$

$$E_{6_5}^1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 0 & 7{,}9200684243 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_5 = 46{,}1539659758 - 20{,}0001457931\,x_2,$$

$$E_{5_5}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & -20{,}0001457931 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_4 = -38{,}7693107012 + 18{,}0001000273\,x_2,$$

$$E_{4_5}^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & 18{,}0001000273 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = 12{,}3077094129 - 6{,}8571651191\,x_2,$$

$$E_{3_5}^4 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 0 & -6{,}8571651191 \end{pmatrix}.$$

Положить

$$x_1^5 = 0{,}1846152750,\ x_2^5 = 0,\ x_3^5 = 12{,}3077094129,$$
$$x_4^5 = -38{,}7693107012,\ x_5^5 = 46{,}1539659758,\ x_6^5 = -18{,}9539035939.$$

Шаг 6 (исключение x_1, x_3, x_4, x_5, x_6). Сформировать уравнение связи $-a_5 + a_{5\bullet}x = 0$:

$$a_5^6 + a_{5\,2}^6 x_2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow a_5^5 = -a_5 + a_{5\,1}x_1^5 + a_{5\,3}x_3^5 + a_{5\,4}x_4^5 + a_{5\,5}x_5^5 + a_{5\,6}x_6^5,\ a_{5\,2}^6 = a_{5\bullet}E_{6_5}^1 E_{5_5}^2 E_{4_5}^3 E_{3_5}^4 E_{1_5}^5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}0000133197 - 0{,}0000045351\ x_2 = 0.$$

Вычислить решение:

$$x_1^{спв} = 0{,}0839177849,\ x_2^{спв} = 2{,}9370245419,\ x_3^{спв} = -7{,}8319528297,$$
$$x_4^{спв} = 14{,}0974248356,\ x_5^{спв} = -12{,}5869530601,\ x_6^{спв} = 4{,}3075317417.$$

Для полученного решения нормированная сумма модулей невязок:

$$\rho^{спв} = \left(\sum_{i=1}^{6}\left|-a_i + a_{i\bullet}x^{спв}\right|\right)\Big/6 \approx 3\times10^{-10},\ \rho^{спв} \approx \rho^{дс} \approx 4\times10^{-12}.$$

2.2. Формат хранения разреженных матриц

Эффективность прямого мультипликативного метода решения линейных систем зависит от эффективной реализации матричных или матрично-векторных операций, отличительной особенностью которых является, как правило, большая размерность и разреженность. Дмитриевой [Дмитриева, 2014] предложен формат хранения разреженных матриц, преимущество которого состоит в возможности параллельного выполнения любых матричных операций без распаковывания, что значительно сокращает время выполнения операций и объем занимаемой памяти.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Строка 1 $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,8\}$

Строка 2 $\{2,3\}$

Строка 3 $\{3,6\}, \{1,8\}$

Рис. 2.2.1. Представление матрицы в формате Дмитриевой

Формат Дмитриевой, схема хранения данных в котором изображена на рис. 2.2.1, — альтернатива известному и наиболее часто используемому формату хранения разреженных матриц RR(C)O (row — wise representation complete and ordered) [Писсанецки, 1988; Davis, 2006].

Все ненулевые элементы исходной разреженной матрицы сохраняются в одном массиве. Каждый элемент массива представляет, в свою очередь, двухэлементный вектор, первый элемент которого содержит ненулевое значение исходной матрицы, второй — номер столбца исходной матрицы, в котором он находился. Номер строки каждого элемента нового массива соответствует номеру той строки, в которой он находился в исходной матрице.

Согласно алгоритму, приведенному в [Писсанецки, 1988], для упаковки разреженной матрицы в формат RR(C)O нужно осуществить подсчет количества ненулевых элементов, при этом для матрицы $n \times n$ с количеством ненулевых элементов z нужно выполнить $n \times n$ сравнений, $z + n \times n$ операций сложения и непосредственную упаковку матрицы. Это действие требует $n \times n$

операций сравнения, $n+2z$ операций переприсваивания, $2z+n\times n$ операций сложения. Для представления разреженной матрицы в формате Дмитриевой нужно создать маску нового массива, для чего выполнить $n\times n$ сравнений, $2z+n\times n$ сложений, $2n$ присвоений, и осуществить упаковку матрицы, на которую потребуется $n\times n$ сравнений, $2z+n\times n$ сложений, $2n$ присвоений. Исходя из приведенных данных, видно, что второй этап для создания упаковочного формата Дмитриевой требует меньше операций, что приводит к снижению временны́х затрат на подготовительный этап. Данные выводы подкрепляются практическими результатами [Дмитриева, 2014].

Итак, с ростом мерности матрицы время, необходимое на ее упаковку, растет, однако уже на этом этапе использование формата Дмитриевой дает преимущество во времени, тем больше, чем больше размерность матрицы. Затраты времени на упаковку матрицы в специальные форматы зависят от степени разреженности матрицы, поэтому при фиксированной размерности данные затраты можно считать постоянными.

Выигрыш времени прямо зависит от степени разреженности матрицы исходной системы. Сокращение количества выполняемых операций происходит за счет невыполнения операций с нулевыми элементами, а сокращение объема памяти — за счет хранения только отличных от нуля элементов и информации об их расположении.

Замечания к разделу 2. Подходы к решению задач линейной алгебры, симметричных положительно-определенных систем и несимметричных систем с квадратными матрицами можно найти в [Николаев, 1986; Николаев и др., 1988; Воеводин, 1977; Воеводин и др., 1984; Эстербю и др., 1987; Писсанецки, 1988; Фиалко, 2009; Фиалко, 2013].

Описание системы компьютерной алгебры в рамках среды ParJava для использования параллельных вычислительных систем можно найти в [Малашонок и др., 2004]. Приводится описание применения метода анализа профилей параллельной программы, позволяющего работать с иерархическим представлением численных характеристик. Описываются разработанные программы компьютерной алгебры и результаты модельных расчетов, проводимых на кластере ИСП РАН.

Алгоритмы символьной факторизации, вложенных сечений и левосторонний метод Холесского для работы с разреженными матрицами можно найти в [Малашонок и др., 2015].

Симплекс-метод решения задач линейного программирования, использующий мультипликативное представление обратной базисной матрицы, как алгоритм решения системы уравнений, математически привлекателен, но уязвим в вычислительном отношении. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из одного уравнения: $7x=21$. Лучший способ решения этой системы — деление: $x=21/7=3$, а использование обратной матрицы приводит к вычислению: $x=\left(7^{-1}\right)21=2{,}99997$, которое требует больше арифметических операций и дает менее точный результат. Все сказанное справедливо и для систем со многими уравнениями. Лишние действия — главная причина, по которой в данной работе основное внимание уделяется прямым мультипликативным методам решения систем, а не способам представления обратной базисной матрицы.

Следует отметить, что в симплекс-методе большое внимание уделяется способу представления обратной базисной матрицы и среди таких представлений важное место занимает мультипликативное представление, в котором эта обратная матрица записывается в факторизованном виде — как произведение матриц-мультипликаторов. Это представление было использовано еще Зойтендейком [Zoutendijk, 1963], а затем подробно описано Лэсдоном [Lasdon, 1975] со ссылкой на статью Ларсена [Larsen, 1962]. В 1962 появился отчет Смита и Орчард-Хейса об экспериментах с программной реализацией метода [Smith et al., 1963].

Заключение

Разработан подход к построению численно устойчивых прямых мультипликативных методов решения систем линейных уравнений, учитывающих разреженность матриц, представленных в упакованном виде. Преимущество подхода состоит в возможности минимизации заполнения главных строк мультипликаторов без потери точности результатов, причем изменения в позиции очередной обрабатываемой строки матрицы не вносятся, что позволяет использовать статические форматы хранения данных.

Рассмотрен формат для хранения разреженных матриц, преимущество которого состоит в возможности параллельного выполнения любых матричных операций без распаковывания, что значительно сокращает время выполнения операций и объем занимаемой памяти.

Отмечена взаимосвязь подхода к увеличению эффективности гауссова исключения для разреженных матриц, предложенного Соловьевым [Соловьев, 2014], и предлагаемого подхода к увеличению эффективности численных методов ньютоновского и квазиньютоновского типа — использование структуры матрицы, то есть информации о том, в каких позициях матрицы хранятся ненулевые элементы. Для ньютоновских и квазиньютоновских методов безусловной оптимизации, основанных на факторизации Холесского, с регулировкой шага и с конечно-разностной аппроксимацией первых и вторых производных, это возможность формирования матрицы вторых производных в соответствии с ее структурой. Данное исследование является прямым продолжением работы [Свириденко и др., 2016] и находится в стадии экспериментального сравнения эффективности.

Разработанный подход к построению численно устойчивых прямых мультипликативных методов решения систем линейных уравнений является основой для дальнейших исследований, результаты которых могут быть использованы для построения прямых мультипликативных методов ЛП, ньютоновского и квазиньютоновского типа.

- Прямые мультипликативные методы решения систем линейных уравнений являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ: разреженные матрицы системы позволяют получать мультипликаторы, главные строки которых также разрежены, а операция умножения вектора-строки на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора. Поэтому в основу построения прямого мультипликативного алгоритма ЛП предлагается положить модификацию прямого мультипликативного алгоритма решения систем линейных уравнений, в основе которой лежит интеграция техники предложенного метода линейного программирования ЛП для выбора ведущего элемента [Хакимова и др., 2010; Свириденко, 2015].
- Прямые мультипликативные методы ЛП являются наиболее приспособленными для решения задач большого размера на ЭВМ: разреженные матрицы ограничений позволяют получать мультипликаторы, главные строки которых также разрежены, а операция умножения вектора-строки на мультипликатор по трудоемкости пропорциональна числу ненулевых элементов этого мультипликатора. Поэтому в основу построения прямого мультипликативного алгоритма задания направления спуска в ньютоновских методах безусловной оптимизации предлагается положить модификацию прямого мультипликативного метода ЛП, в основе которой лежит интеграция одной из предложенных в [Свириденко и др., 2016; Зеленков и др., 2013; Свириденко, 2015; Гилл и др., 1985] техник построения существенно положительно-определенной матрицы вторых производных. Следует отметить, что техника Гилла и Мюррея, как аппроксимация техник, обсуждаемых в [Свириденко и др., 2016; Свириденко, 2015], дает возможность существенно упростить построение вычислительной схемы задания направления спуска, быть может за счет некоторой потери точности результатов.

Список литературы (References)

Берчун Ю. В., Бурков П. В., Чиркова А. С., Прокопьева С. М., Рабкин Д. Л., Лукьянов А. А. Итерационный метод решения СЛАУ на основе механической аналогии // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. — 2015. — № 08. — С. 14–31.

Berchun Ju.V., Burkov P. V., Chirkova A. S., Prokop'eva S. M., Rabkin D. L., Luk'janov A. A. Iteracionnyj metod reshenija SLAU na osnove mehanicheskoj analogii [Mechanical Analogy-based iterative method for solving a system of linear equations.] // Sciens and Education of the Bauman MSTU. Electronic journal. — 2015. — No. 08. — P. 14–31 (in Russian).

Брумштейн Ю. М. Использование псеводогидродинамической постановки в задачах фильтрации со свободной поверхностью // Естественные науки. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет». — 2004. — № 8. — С. 125–128.

Brumshtejn Yu. M. Ispol'zovanie psevodogidrodinamicheskoj postanovki v zadachah fil'tracii so svobodnoj poverhnost'ju [Use pseudohallucinations formulation in problems of filtration with a free surface] // Natural Sciences. Astrakhan University. — 2004. — No. 8. — P. 125–128 (in Russian).

Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. — М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005.

Verzhbickij V. M. Chislennye metody. Linejnaja algebra i nelinejnye uravnenija [Numerical methods. Linear algebra and nonlinear equations]. — M.: ONYX 21 century, 2005 (in Russian).

Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.

Voevodin V. V. Vychislitel'nye osnovy linejnoj algebry [Computational foundations of linear algebra]. — M.: Nauka, 1977 (in Russian).

Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука,1984.

Voevodin V. V., Kuznecov Yu. A. Matricy i vychislenija [Matrix and calculations]. — M.: Nauka, 1984 (in Russian).

Галанов Б. А. О сходимости одного непрерывного метода и его аппроксимаций // Математические методы в кибернетической технике: Сборник. — 1970. — Вып. 7. — Киев: Изд-во ИК АН УССР.

Galanov B. A. O shodimosti odnogo nepreryvnogo metoda i ego approksimacij [On the convergence of a continuous method and its approximations] // Mathematical methods in cybernetic technology. — 1970. — No. 7. — Kiev: IR SSR (in Russian).

Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. — М.: Мир, 1985.

Gill P. E., Murray W., Margaret H. Wright Practical optimization. — System Optimization Laboratory Department of Operations Research Stanford University California, USA // Academic Press, 1981. (Russ. ed.: *Gill F., Mjurrej U., Rajt M.* Prakticheskaja optimizacija. — M.: Mir, 1985.)

Григорьева О. Н., Дмитриева О. А. Моделирование линейных динамических систем большой размерности с разреженными матрицами коэффициентов // Информатика и компьютерные технологии-2011. — Донецк: Донецкий национальный технический университет. — 2011. — С. 199–203.

Grigor'eva O. N., Dmitrieva O. A. Modelirovanie linejnyh dinamicheskih sistem bol'shoj razmernosti s razrezhennymi matricami kojefficientov [Modeling linear dynamical systems of high dimension with sparse matrices of coefficients] // Informatics and computer technologies-2011. — Donetsk: Donetsk national technical University. — 2011. — P. 199–203 (in Russian).

Дмитриева О. А. Оптимизация выполнения матрично-векторных операций при параллельном моделировании динамических процессов // Наукові праці ДонНТУ. Сер. Обчислювальна техніка та автоматизація. — 2014. — № 1(26). — С. 94–100.

Dmitrieva O. A. Optimizacija vypolnenija matrichno-vektornyh operacij pri parallel'nom modelirovanii dinamicheskih processov [Optimization of performance of matrix and vector operations at parallel simulation of dynamic processes] // Donetsk National Technical University. — 2014. — No. 1(26). — P. 94–100 (in Russian).

Зеленков Г. А., *Хакимова А. Б.* Подход к разработке алгоритмов ньютоновских методов оптимизации, программная реализация и сравнение эффективности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3 — С. 367–377.

Zelenkov G. A., Hakimova A. B. Podhod k razrabotke algoritmov n'jutonovskih metodov optimizacii, programmnaja realizacija i sravnenie jeffektivnosti [Approach to development of algorithms of Newtonian methods of unconstrained optimization, their software implementation and benchmarking] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 5, No. 3. — P. 367–377 (in Russian).

Кундас С. П. Обзор численных методов расчета систем уравнений строительной механики и выбор оптимальной схемы хранения данных для задач большой размерности // Вестник полоцкого государственного университета. — 2010. — Сер. F. № 6. — С. 79–83.

Kundas S. P. Obzor chislennyh metodov rascheta sistem uravnenij stroitel'noj mehaniki i vybor optimal'noj shemy hranenija dannyh dlja zadach bol'shoj razmernosti [Review of numerical method for calculating equations of structural mechanics and choice of the optimal storage solutions for systems of large dimensionality] // Herald of Polotsk state University. — 2010. — Series F, No. 6. — P. 79–83 (in Russian).

Лебедев С. А., Мееров И. Б., Козинов Е. А., Ахмеджанов Д. Р., Пирова А. Ю., Сысоев А. В. Двухуровневый параллельный алгоритм выполнения численной фазы разложения Холецкого для разреженных матриц // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (28–29 сентября 2015 г., г. Москва). — М.: Изд-во МГУ, 2015. — С. 133–144.

Lebedev S. A., Meerov I. B., Kozinov E. A., Ahmedzhanov D. R., Pirova A. Yu., Sysoev A. V [Duplex parallel execution algorithm for the numerical phase of the decomposition of Cholesky for sparse matrices] // Trudy mezhdunarodnoj konferencii (28–29 sentjabrja 2015 g., g. Moskva) // Superkomp'juternye dni v Rossii [Proceedings of the international conference (28–29 September 2015) Russian Supercomputing Days 2015]. — Moscow: MSU, 2015. — P. 133–144 (in Russian).

Малашонок Г. И., Аветисян А. И., Валеев Ю. Д., Зуев М. С. Параллельные алгоритмы компьютерной алгебры // Proceedings of the Institute for System Programming. Vol. 8 (Issue 2, in Russian). — 2004. — С. 169–180.

Malashonok G. I., Avetisjan A. I., Valeev Yu. D., Zuev M. S. Parallel'nye algoritmy komp'juternoj algebry [Parallel algorithms of computer algebra] // Proceedings of the Institute for System Programming. Vol. 8 (Issue 2, in Russian). — 2004. — P. 169–180 (in Russian).

Малашонок Г. И., Щербинин А. С. Об одном алгоритме треугольной декомпозиции в коммутативном кольце // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 1293–1302.

Malashonok G. I., Shcherbinin A. S. Ob odnom algoritme treugol'noj dekompozicii v kommutativnom kol'ce [About algorithm for the triangular decomposition in a commutative ring] // Tambov University Reports. Ser. Natural and Technical sciences. — 2015. — Vol. 20, No. 5. — P. 1293–1302 (in Russian).

Николаев Е. С. Разреженные матрицы. Библиотека программ. — М.: МГУ, 1986.

Nikolaev E. S. Razrezhennye matricy. Biblioteka programm [The sparse matrix. Library programs]. — M.: MSU, 1986 (in Russian).

Николаев Е. С., Кучеров А. Б. Разреженные матрицы. Численные методы и алгоритмы. — М.: МГУ, 1988.

Nikolaev E. S., Kucherov A. B. Razrezhennye matricy. Chislennye metody i algoritmy [The sparse matrix. Numerical methods and algorithms]. — M.: MSU, 1988 (in Russian).

Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.

Ortega J. M., PooleW. G. An introduction to numerical methods for differential equations. — Jr. Pitman Publishing Inc., 1981. (Russ. ed.: Ortega Dzh., Pul U. Vvedenie v chislennye metody reshenija differencial'nyh uravnenij. — M.: Nauka, 1986.)

Отаров А. О., Уразымбетова Э. П., Отаров А. А. Решение неустойчивых систем линейных алгебраических уравнений методом дифференциального спуска // Вестник Каракалпакского государственного университета им. Бердаха. — 2010. — № 3–4 (8–9). — Ташкент: SAYDANA-PRINT. С. 7–15.

Otarov A. O., Urazymbetova E. P., Otarov A. A. Reshenie neustojchivyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij metodom differencial'nogo spuska [The solution of unstable systems of linear algebraic equations by the method of differential descent] // Bulletin of Karakalpak state University After Berdakh. — Tashkent: «SAYDANA-PRINT». — 2010 — No. 3–4 (8–9). — P. 7–15 (in Russian).

Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. — М.: Мир, 1983.

Parlett B. N. The symmetric eigenvalue problem. University of California Berkeley, California, 1980. (Russ. ed.: Parlett B. Simmetrichnaja problema sobstvennyh znachenij. Chislennye metody. — M.: Mir, 1983.)

Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. — Киев: Сталь, 2002. — 600 с.

Perel'muter A. V. Raschetnye modeli sooruzhenij i vozmozhnost' ih analiza [Design models of structures and possibility of their analysis]. — Kiev: Stal, 2002. — 600 s. (in Russian).

Писсанецки С. Технология разреженных матриц. — М.: Мир, 1988. — 410 с.

Pissanetzky S. Sparse matrix technology. Centro Atamico Bariloche, Bariloche, Argentina. — Academic Press Inc., 1984. (Russ. ed.: Pissanecki S. Tehnologija razrezhennyh matric. — M.: Mir, 1988.)

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1969.

Samarskij A. A., Gulin A. V. Chislennye metody [Numerical methods]. — M.: Nauka, 1969 (in Russian).

Свириденко А. Б. Априорная поправка в ньютоновских методах оптимизации // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 835–863.

Sviridenko A. B. Apriornaja popravka v n'jutonovskih metodah optimizacii [The correction to Newton's methods of optimization] // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, No. 4. — P. 835–863 (in Russian).

Свириденко А. Б. Взаимосвязь и реализация квазиньютоновских и ньютоновских методов безусловной оптимизации // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 1. — С. 55–78.

Sviridenko A. B. Vzaimosvjaz' i realizacija kvazin'jutonovskih i n'jutonovskih metodov bezuslovnoj optimizacii [Correlation and realization of quasi-Newton methods of absolute optimization] // Computer Research and Modeling. — 2016. — Vol. 8, No. 1. — P. 55–78 (in Russian).

Солнцева М. О., Кухаренко Б. Г. Применение методов кластеризации узлов на графах с разреженными матрицами смежности в задачах логистики // Труды МФТИ. — 2013. — Т. 5, № 3 (19). — С. 75–83.

Solnceva M. O., Kuharenko B. G. Primenenie metodov klasterizacii uzlov na grafah s razrezhennymi matricami smezhnosti v zadachah logistiki [Application of methods of clustering nodes in graphs with sparse matrices adjacency in tasks logistics] // The works of MFTU. — 2013. — Vol. 5? No. 3 (19). — P. 75–83 (in Russian).

Соловьев С. А. Решение разреженных систем линейных уравнений методом Гаусса с использованием техники аппроксимации матрицами малого ранга // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — М.: Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова. — С. 441–460.

Solov'ev C. A. Reshenie razrezhennyh sistem linejnyh uravnenij metodom Gaussa c ispol'zovaniem tehniki approksimacii matricami malogo ranga [Application of the low-rank approximation technique in the Gauss elimination method for sparse linear systems] // Numerical methods and programming. — 2014. — Vol. 15. — P. 441–460 (in Russian).

Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980.

Strang G. Linear algebra and its applications. / Massachusetts Institute of Technology. — Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976. (Russ. ed.: Streng G. Linejnaja algebra i ee primenenija. — M.: Mir, 1980.)

Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. — М.: Мир, 1977.

Tewarson R. P. Sparse matrices. Mathematics in science and Enginiring, Edited by Richard Bellman. Department of Applied Mathematics and Statistics State University of New York, Stony Brook, New York — Academic Press New York and London, 1973. (Russ. ed.: T'juarson R. Razrezhennye matricy. — M.: Mir, 1977.)

Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.–Л.: Физматгиз, 1963.

Faddeev D. K., Faddeeva V. N. Vychislitel'nye metody linejnoj algebry [Computational methods of linear algebra]. — M.–L.: Fizmatgiz, 1963 (in Russian).

Фиалко С. Ю. О методах решения большеразмерных задач строительной механики на многоядерных компьютерах // Инженерно-строительный журнал. — 2013. — № 5. — С. 116–124.

Fialko S. Yu. O metodah reshenija bol'sherazmernyh zadach stroitel'noj mehaniki na mnogojadernyh komp'juterah [About analysis of large problems of structural mechanics on multi-core computers] // Magazine of Civil Engineering. — 2013. — No. 5. — P. 116–124 (in Russian).

Фиалко С. Ю. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах. — М.: СКАД СОФТ, Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ), 2009. — С. 160.

Fialko S. Yu. Prjamye metody reshenija sistem linejnyh uravnenij v sovremennyh MKJe-kompleksah [Direct methods for solving systems of linear equations in the FE-complexes]. — M.: SKAD SOFT, Publisher Association building universities (DIA), 2009. — P. 160 (in Russian).

Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969.

Forsythe G. E., Moler C. B. Computer solution of linear algebraic systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1967. (Russ. ed.: Forsajt Dzh., Moler K. Chislennoe reshenie sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij. — M.: Mir, 1969.)

Хакимова А. Б., Зеленков Г. А., Рзун И. Г. Подход к увеличению эффективности мультипликативного алгоритма симплекс-метода // Динамика неоднородных систем: Труды ИСА РАН. — 2010. — Вып. 14, Т. 53(2). — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». — С. 245–251.

Khakimova A. B., Zelenkov G. A., Rzun I. G. Podhod k uvelicheniju jeffektivnosti mul'tiplikativnogo algoritma simpleks-metoda [Approach to increase the efficiency of the multiplicative algorithm of the simplex method] // The works of ISA Russian Academy of Sciences "Dynamics of heterogeneous systems". — 2010. — The issue 14, Vol. 53(2). — P. 245–251 (in Russian).

Цыганков А. А. Новые условия экстремума для гладких задач с ограничениями в форме равенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 10. — С. 1474–1484.

Cygankov A. A. Novye uslovija jekstremuma dlja gladkih zadach s ogranichenijami v forme ravenstv [New extremum conditions for smooth problems with constraints in form of equalities] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 41, No. 10. — P. 1474–1484 (in Russian).

Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: Учебное пособие. — СПб., 2012. — URL: http://elib.spbstu.ru/dl/2357.pdf

Chernoruckij I. G. Metody optimizacii [Methods of optimization]. — SPb., 2012. — URL: http://elib.spbstu.ru/dl/2357.pdf (in Russian).

Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации. Компьютерные технологии. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 384 с.

Chernoruckij I. G. Metody optimizacii. Komp'juternye tehnologii [Methods of optimization. Computer technology.]. — SPb.: BHV-Petersburg, 2011. — 384 p. (in Russian).

Черноруцкий И. Г. Практическая оптимизация и невыпуклые задачи // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2013. — № 4(176). — СПб.: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого». — С. 79–86.

Chernoruckij I. G. Prakticheskaja optimizacija i nevypuklye zadachi [Practical optimization and nonconvex problems] // Nauchno-tekhnicheskie Vedomosti SPbGPU. Informatics. Telecommunications. Management. — 2013. — No. 4(176). — St. Petersburg: Federal state Autonomous educational institution of higher professional education "Saint-Petersburg Polytechnic University Peter the Great". — P. 79–86 (in Russian).

Эстербю О., Златев З. Прямые методы для разреженных матриц. — М.: Мир, 1987.

Østerby O., Zlatev Z. Direct Methods for sparse matrices. / Lecture Notes in Computer Science. Edited by G. Goos and J. Hartmanis. — Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Spriger-Verlag, 1983. (Russ. ed.: Jesterbju O., Zlatev Z. Prjamye metody dlja razrezhennyh matric. — M.: Mir, 1987.)

Bakhvalov N. S. On the Convergence of a Relaxation Method with Natural Constraints on the Elliptic Operator // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. — 1966. — No. 6 (5). — P. 861–885. [USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1966. — No. 6 (5). — P. 101–135.]

Bebendorf M. and Hackbusch W. Existence of H-Matrix Approximants to the Inverse FE-Matrix of Elliptic Operators with L∞-Coefficients // Numer. Math. — 2003. — No. 95 (1). — P. 1–28.

Borne S. Le, Grasedyck L., and Kriemann R. Domain-Decomposition Based H-LU Preconditioners // Lecture Notes in Computational Science and Engineering (Springer, Heidelberg, 2007). — Vol. 55. — P. 667–674.

Chandrasekaran S., Dewilde P., Gu M., and Somasunderam N. On the Numerical Rank of the OffDiagonal Blocks of Schur Complements of Discretized Elliptic PDEs // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2010. — No. 31 (5). — P. 2261–2290.

Davis T. A. Direct methods for sparse linear systems // Siam. — 2006. — Vol. 2.

Dehnavi M. M., Fernández D. M., Giannacopoulos D. Finite-element sparse matrix vector multiplication on graphic processing units // IEEE Transactions on Magnetics. — 2010. — Vol. 46, No. 8. — P. 2982–2985.

Fedorenko R. P. A Relaxation Method for Solving Elliptic Difference Equations // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. — 1961. — No. 1 (5). — P. 922–927. [USSR Comput. Math. Math. Phys. — 1962. — No. 1 (4). — P. 1092–1096.]

George A. and Liu J. W. H. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981; Moscow: Mir, 1984).

George A. Nested Dissection of a Regular Finite Element Mesh // SIAM J. Numer. Anal. — No. 10 (2). — P. 345–363 (1973).

George T., Saxena V., Gupta A., Singh A., Choudhury A. R. Multifrontal factorization of sparse SPD matrices on GPUs // Parallel & Distributed Processing Symposium (IPDPS). — 2011. — P. 372–383.

Goreinov S. A., Tyrtyshnikov E. E., and Zamarashkin N. L. A Theory of Pseudo-Skeleton Approximations // Linear Algebra Appl. — 1997. — Vol. 261, No. 1–3. — P. 1–21.

Hackbusch W. A Sparse Matrix Arithmetic Based on H-Matrices. Part I: Introduction to H-Matrices // Computing. — 1999. — No. 62 (2). — P. 89–108.

Kalinkin A., Arturov K. Asynchronous approach to memory management in sparse multifrontal methods on multiprocessors // Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 4, No. 12A. — P. 33–39.

Karypis G. and Kumar V. METIS: A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices. Version 4.0 (Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1998).

Larsen L. J. A modified inversion procedure for product form of the inverse linear programming codes // Comm. of ACM. — 1962. — Vol. 5. — P. 382–383.

Lasdon L. S. Optimization theory for large systems. MacMillan Co., 1970. (Русский пер.: Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. — М.: Наука, 1975.)

Lipton R., Rose D., and Tarjan R. Generalized Nested Dissection // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. — No. 16 (2). — P. 346–358.

Liu J. W. H. The multifrontal method for sparse matrix solution: Theory and practice // SIAM review. — 1992. — Vol. 34, No. 1. — P. 82–109.

Saad Y. and Vorst H. Iterative Solution of Linear Systems in the 20th Century // J. Comput. Appl. Math. — 2000. — No. 123 (1). — P. 1–33.

Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems // SIAM, Philadelphia. — 2003.

Smith D. E., Orchard-Hays W. Computational efficiency in product form LP codes // R. L. Graves, Ph. Wolfe / Eds. Recent Advances in Mathematical Programming. — McGraw-Hill Book Co. — 1963. — P. 211–218.

Tyrtyshnikov E. E. Mosaic-Skeleton Approximations // Calcolo. — 1996. — 33 (1). — P. 47–57.
Xia J. A Robust Inner-Outer Hierarchically Semi-Separable Preconditioner // Numer. Linear Algebra Appl. — 2012. — No. 19 (6). — P. 992–1016.
Xia J. Efficient Structured Multifrontal Factorization for General Large Sparse Matrices // SIAM J. Sci. Comput. — 2013. — 35 (2). — P. 832–860.
Xia J. Robust and Efficient Multifrontal Solver for Large Discretized PDEs // High-Performance Scientific Computing. — London: Springer, 2012. — P. 199–217.
Zoutendijk G. Methods of feasible directions. Elsevier Publishing Co., 1960. (Русский пер.: Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. — М.: ИЛ, 1963.)