**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 Т. 8 № 5 С. 803−815**

Ки&М

УДК: 330.42

Дискретная форма уравнений в теории переключающегося воспроизводства с различными вариантами финансовых потоков

И. Л. Кирилюк

Институт экономики РАН,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 32

E-mail: igokir@rambler.ru

Получено 07.09.2016, после доработки — 07.10.2016.
Принято к публикации 10.10.2016.

Разные варианты моделей переключающегося режима воспроизводства описывают совокупность взаимодействующих друг с другом макроэкономических производственных подсистем, каждой из которых соответствует свое домашнее хозяйство. Эти подсистемы различаются между собой по возрасту используемого ими основного капитала, поскольку они по очереди останавливают производство продукции для его обновления собственными силами (для ремонта оборудования и для привнесения инноваций, увеличивающих эффективность производства). Это принципиально отличает данный тип моделей от моделей, описывающих режим совместного воспроизводства, при котором обновление основного капитала и производство продукта происходят одновременно. Модели переключающегося режима воспроизводства позволяют наглядно описать механизмы таких явлений, как денежные кругообороты и амортизация, а также описывать различные виды монетарной политики, позволяют по-новому интерпретировать механизмы экономического роста. В отличие от многих других макроэкономических моделей модели этого класса, в которых конкурирующие между собой подсистемы поочередно приобретают преимущество над остальными за счет обновления, принципиально не равновесны. Изначально они были описаны в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений со скачкообразно меняющимися коэффициентами. В численных расчетах, проводившихся для этих систем, в зависимости от значений параметров и начальных условий была выявлена как регулярная, так и нерегулярная динамика. В данной работе показано, что простейшие варианты этой модели без использования дополнительных приближений могут быть представлены в дискретной форме (в виде нелинейных отображений) при различных вариантах (непрерывных и дискретных) финансовых потоков между подсистемами (интерпретируемых как зарплаты и субсидии). Эта форма представления более удобна для получения строгих аналитических результатов, а также для проведения более экономных и точных численных расчетов. В частности, ее использование позволило определить начальные условия, соответствующие скоординированному, устойчивому экономическому росту без систематического отставания в производительности одних подсистем от других.

Ключевые слова: основной капитал, амортизация, переключающийся режим воспроизводства, скоординированный экономический рост, дискретные отображения

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2016 VOL. 8 NO. 5 P. 803−815

Ки&М

MODELS OF ECONOMIC AND SOCIAL SYSTEMS

UDC: 330.42

The discrete form of the equations in the theory of the shifting mode of reproduction with different variants of financial flows

I. L. Kirilyuk

Institute of Economics RAS,
32 Nakhimovsky prospect, Moscow, 117218, Russia

E-mail: igokir@rambler.ru

Received 07.09.2016, after completion — 07.10.2016.
Accepted for publication 10.10.2016.

Different versions of the shifting mode of reproduction models describe set of the macroeconomic production subsystems interacting with each other, to each of which there corresponds the household. These subsystems differ among themselves on age of the fixed capital used by them as they alternately stop production for its updating by own forces (for repair of the equipment and for introduction of the innovations increasing production efficiency). It essentially distinguishes this type of models from the models describing the mode of joint reproduction in case of which updating of fixed capital and production of a product happen simultaneously. Models of the shifting mode of reproduction allow to describe mechanisms of such phenomena as cash circulations and amortization, and also to describe different types of monetary policy, allow to interpret mechanisms of economic growth in a new way. Unlike many other macroeconomic models, model of this class in which the subsystems competing among themselves serially get an advantage in comparison with the others because of updating, essentially not equilibrium. They were originally described as a systems of ordinary differential equations with abruptly varying coefficients. In the numerical calculations which were carried out for these systems depending on parameter values and initial conditions both regular, and not regular dynamics was revealed. This paper shows that the simplest versions of this model without the use of additional approximations can be represented in a discrete form (in the form of non-linear mappings) with different variants (continuous and discrete) financial flows between subsystems (interpreted as wages and subsidies). This form of representation is more convenient for receipt of analytical results as well as for a more economical and accurate numerical calculations. In particular, its use allowed to determine the entry conditions corresponding to coordinated and sustained economic growth without systematic lagging in production of a product of one subsystems from others.

Keywords: fixed assets, depreciation, shifting mode of reproduction, coordinated economic growth, discrete mapping

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 5, pp. 803–815 (Russian).

Введение

Теория переключающегося воспроизводства разрабатывается коллективом Центра эволюционной экономики при Институте экономики РАН под руководством академика РАН В. И. Маевского. В последние годы им совместно с С. Ю. Малковым, А. А. Рубинштейном и др. предложено и исследовано несколько новых вариантов математических моделей для описания этой теории [Маевский, Малков, 2013; Маевский, Малков, 2014; Маевский, Малков, Рубинштейн, 2015]. Особенностью моделей является наличие N производственных подсистем, где $N-1$ подсистема работает по программе В (выпуск продукции для рынка) и N-я подсистема работает по программе А (самообновление основного капитала, то есть осуществляемые своими силами ремонт и замена оборудования, в общем случае сопровождающиеся внедрением инноваций). Подсистемы каждый год по очереди сменяют друг друга в выполнении этой программы. Каждой подсистеме соответствует свое домашнее хозяйство, которое получает там зарплату и тратит ее на произведенные подсистемами товары. Полагаем, что вся чистая прибыль каждой из подсистем остается в этой подсистеме и направляется на инвестиции.

Таким образом, теория переключающегося режима воспроизводства имеет следующие принципиальные особенности:

– макроэкономическая система дезагрегирована по возрасту основного капитала ее подсистем и по его эффективности, которая может увеличиваться в процессе обновления;

– динамика переменных в моделях теории принципиально неравновесная, ее неравновесность обусловлена эндогенными факторами; фактически в моделях реализована стратегия, именуемая «игра красной королевы», когда развитие конкурирующих между собой подсистем является условием их выживания [Васечкина, Ярин, 2002];

– модели переключающегося режима воспроизводства явно описывают денежный кругооборот, происходящий в макроэкономических системах, что свойственно далеко не всем экономическим моделям.

Предыстория моделей

Различные варианты экономических моделей, где использована дезагрегация на подсистемы с различным возрастом основного капитала, предложены в работах [Johansen, 1959; Solow, 1960; Канторович, Горьков, 1959; Канторович, Жиянов, 1973; Канторович, Жиянов, Хованский, 1978]. В [Матвеенко, 1981] показано, что при такой дезагрегации можно прийти к семейству моделей Неймана, в [Бекларян, Борисова, Хачатрян, 2012] исследуются магистральные свойства однопродуктовой динамической модели замещения производственных фондов.

Также есть аналогия между перечисленными моделями и моделью пересекающихся поколений, предложенной П. Даймондом [Diamond, 1965] для описания роли в экономике различных поколений людей. Нелинейная динамика конкурентного замещения поколений инновационного товара исследуется в [Кузнецов, Маркова, Мичасова, 2014].

Теперь вкратце приведем факты из истории используемого нами математического аппарата. Рассматриваемые в данной статье модели изначально предложены в форме дифференциальных уравнений со скачкообразно меняющимися в определенные моменты времени коэффициентами. В теорию таких систем существенный вклад был внесен советскими учеными. Например, подобные системы уравнений рассматриваются в работах [Айзерман, Пятницкий, 1974; Теория..., 1981; Матросов, 1967; Филиппов, 1985]. Когда изменения происходят через фиксированные, заданные извне промежутки времени, ситуация упрощается по сравнению с общим случаем. Нами показывается в данной статье, что система уравнений базового варианта модели может быть сведена к системе дискретных отображений благодаря тому, что между эквидистантными моментами переключения описывается системой линейных дифференциальных уравнений, для которой получено аналитически общее решение.

Дискретные отображения являются более известным объектом исследований, чем системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и описываются во многих учебниках по нелинейной динамике. В экономике ранее их использовали, например, в [Лебедева, Лебедев, Смыкова, 2006].

Математический аппарат дифференциальных уравнений с разрывной правой частью применяется в исследованиях дезагрегированных по возрасту основного капитала макроэкономических систем, находящихся в режиме переключающегося воспроизводства в моделях публикаций [Маевский, Малков, 2013; Маевский, Малков, 2014; Маевский, Малков, Рубинштейн, 2015] и в ряде других публикаций тех же авторов. Возможность сведения таких моделей в простейших случаях к системам нелинейных дискретных отображений продемонстрирована в данной статье.

Варианты базовой модели переключающегося воспроизводства в форме систем дифференциальных уравнений

Базовая версия модели, которую мы здесь рассматриваем, имеет варианты в зависимости от того, какие из денежных потоков мы считаем непрерывными во времени, а какие — дискретными.

Простой частный случай, когда доходы домохозяйств и эмиссии непрерывны во времени может быть написан в следующем виде:

$$\frac{dM_{hi}}{dt} = h_i Y_i (1-k_{sh}) - k_{hi} M_{hi} + \Delta M_{hi}, \ i=1,...,N-1, \tag{1}$$

$$\frac{dM_{hN}}{dt} = h_N Y'_N \nu_N (1-k_{sh}) - k_{hN} M_{hN} + \Delta M_{hN}, \tag{2}$$

$$\frac{dM_{Yi}}{dt} = \sum\nolimits_{j=1}^{N} k_{hj} M_{hj} \left(\frac{z_i Y_i}{\sum\nolimits_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1-k_{sY}) - h_i Y_i + \Delta M_{Yi}, \ i=1,...,N-1, \tag{3}$$

$$\frac{dM_{YN}}{dt} = -h_N Y'_N \nu_N + \Delta M_{YN}, \tag{4}$$

$$\Delta K_N = M'_{YN} - 12(N-1) K'_N k_{\alpha N}, \tag{5}$$

$$Y_N = g_N Y'_N, \ g_N = 1 + \frac{\Delta K_N}{K'_N}. \tag{6}$$

Более распространенный случай, когда домохозяйства получают зарплаты и субсидии с четкой периодичностью во времени, например раз в месяц, может быть получен заменой уравнений (1)–(4) на соответствующие уравнения, содержащие дельта-функции:

$$\frac{dM_{hi}}{dt} = h_i Y_i (1-k_{sh}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau) - \frac{k_{hi} \hat{M}_{hi}}{\tau} + \Delta M_{hi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau), \ i=1,...,N-1, \tag{1$'$}$$

$$\frac{dM_{hN}}{dt} = h_N Y'_N \nu_N (1-k_{sh}) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau) - \frac{k_{hN} \hat{M}_{hN}}{\tau} + \Delta M_{hN} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau). \tag{2$'$}$$

$$\frac{dM_{Yi}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} k_{hj} \frac{\hat{M}_{hj}}{\tau} \left(\frac{z_i Y_i}{\sum\limits_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right) (1-k_{sY}) - h_i Y_i \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau) + \Delta M_{Yi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau), \tag{3$'$}$$

$$\frac{dM_{YN}}{dt} = -h_N Y'_N \nu_N \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau) + \Delta M_{YN} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k\tau). \tag{4$'$}$$

В уравнениях (1)–(6) и (1′)–(4′) величины с индексами $i=1,...,N$ интерпретируются следующим образом.

1. *Кусочно-непрерывно меняющиеся переменные:* M_{hi}, M_{Yi}, ΔM_{hi}, ΔM_{Yi}.

M_{hi} — денежные средства домашних хозяйств.

M_{Yi} — денежные капиталы макроэкономических подсистем, накапливаемые для финансирования программы А.

ΔM_{hi} — дополнительное увеличение доходов домашних хозяйств подсистем, например, через бюджет (увеличение пенсий, пособий, зарплат бюджетникам и т. п.).

ΔM_{Yi} — государственные субсидии, возникающие, когда государство стремится стимулировать производство.

В некоторых версиях модели предполагается, что ΔM_{hi}, ΔM_{Yi} поступают дискретными порциями, в других — что они поступают непрерывно. В любом случае в рамках данной статьи эти переменные экзогенные. Они «вливаются» в экономику извне, поэтому для краткости будем называть их эмиссией (соответственно домохозяйства и в производственные подсистемы).

2. *Дискретно меняющиеся переменные:* K_i, Y_i *(с периодом 1 год) и* $\hat{M}_{hi}$ *(с периодом 1 месяц).*

K_i — стоимость основного капитала i-й производственной подсистемы. ΔK_N — ее изменение для N-й подсистемы по сравнению с предыдущим годом (предыдущий год обозначается штрихом — K'_i)[1].

Y_i — продукты макроэкономических подсистем.

$\hat{M}_{hi}$ — средства в группе i, имеющиеся у домашних хозяйств в начале месяца (эта переменная присутствует только в варианте модели, описываемом уравнениями (1′)–(4′)).

3. *Константы:* h_i, k_{sh}, k_{sY}, k_{hi}, $k_{\alpha N}$, ν_N, z_i, τ.

h_i — доля выплат зарплат, дивидендов и т. п. i-й группе домашних хозяйств от стоимостного выражения выпуска продукции Y_i.

k_{sh} — доля налогов, взимаемых с домохозяйств от их доходов.

k_{sY} — доля уплачиваемых государству макроэкономическими подсистемами налогов от их выручки.

k_{hi} — доля затрат членами i-й группы домашних хозяйств на покупки в единицу времени от их денежных средств M_{hi}.

$k_{\alpha N}$ — доля выручки, направляемой в амортизационный фонд, от стоимости основного капитала K_N соответствующей производственной подсистемы.

ν_N — коэффициент, учитывающий изменение выплат доходов домашним хозяйствам группы N к уровню зарплат предыдущего периода (до обновления основного капитала), когда соответствующая группе макроэкономическая подсистема производила потребительскую продукцию.

z_i — корректирующие коэффициенты. При отличии коэффициентов z_i друг от друга продукты, производимые производственными подсистемами, становятся неидентичными.

$\delta(t-k\tau)$ — дельта-функции в (1′)–(4′), где τ — период времени, равный в модели одному месяцу.

Таким образом, приведенные в этом разделе уравнения представляют собой модель, описывающую финансовое взаимодействие между производственными системами и домохозяйствами в процессе производства и потребления некоторого продукта, с учетом амортизации и периодического самообновления оборудования подсистем. Государство рассматривается только как экзогенный источник эмиссии и сборщик налогов, банковский сектор не учитывается.

[1]Все другие переменные предыдущего момента переключения также обозначаются штрихом.

Дискретная форма уравнений модели переключающегося воспроизводства для случая непрерывной эмиссии и зарплаты

Возможность сведения дифференциальных уравнений (1)–(4), как и (1′)–(4′), к дискретной форме обусловлена следующими обстоятельствами:

– в промежутках между заданными соседними моментами скачкообразного изменения параметров динамику (1)–(4) и (1′)–(4′) определяют линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, где характер неоднородности задает явная зависимость эмиссии от времени;

– при этом уравнения (1)–(2) и (1′)–(2′) в промежутках между заданными соседними моментами скачкообразного изменения параметров являются отдельными, изолированными друг от друга уравнениями, и поэтому общие решения для них получаются отдельно;

– подстановка результатов решения (1)–(2) или (1′)–(2′) соответственно в (3)–(4) или в (3′)–(4′) позволяет решить системы дифференциальных уравнений до конца посредством обычного интегрирования;

– уравнения (5)–(6) дискретны изначально.

Опуская явное приведение здесь описанных промежуточных математических выкладок, приведем результат для случая (1)–(6), когда эмиссия непрерывна во времени и функция ΔM_{hi} задается формулой $\Delta M_{hi} = \Delta M'_{hi} e^{\beta \cdot t}$, где $\Delta M'_{hi}$ — константа, β — параметр, имеющий размерность, обратную времени, общее решение выглядит следующим образом:

$$K_i = K'_i, \tag{7}$$

$$Y_i = Y'_i, \tag{8}$$

$$K_N = K'_N + M'_{YN} - 12(N-1)K'_N k_{\alpha N}, \tag{9}$$

$$Y_N = \left(1 + \frac{M'_{YN} - 12(N-1)K'_N k_{\alpha N}}{K'_N}\right) Y'_N, \tag{10}$$

$$M_{hi} = \frac{h_i Y_i (1-k_{sh})}{k_{hi}} + \left(M'_{hi} - \frac{h_i Y_i (1-k_{sh})}{k_{hi}} - \frac{\Delta M'_{hi}}{\beta + k_{hi}}\right) e^{-k_{hi} t} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta t}}{\beta + k_{hi}}, \tag{11}$$

$$M_{hN} = \frac{h_N Y'_N \nu_N (1-k_{sh})}{k_{hN}} + \left(M'_{hN} - \frac{h_N Y'_N \nu_N (1-k_{sh})}{k_{hN}} - \frac{\Delta M'_{hN}}{\beta + k_{hN}}\right) e^{-k_{hN} t} + \frac{\Delta M'_{hN} e^{\beta t}}{\beta + k_{hN}}, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} M_{Yi} = \sum_{j=1}^{N} k_{hj} \left(\frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j}\right)(1-k_{sY}) \cdot \\ \left(\frac{h_j Y_j (1-k_{sh})}{k_{hj}} t + \left(M'_{hj} - \frac{h_j Y_j (1-k_{sh})}{k_{hj}} - \frac{\Delta M'_{hj}}{\beta + k_{hj}}\right)\left(-\frac{e^{-k_{hj} t}}{k_{hj}} + \frac{1}{k_{hj}}\right) + \frac{\Delta M'_{hj}}{\beta + k_{hj}}\left(\frac{e^{\beta t}}{\beta} - 1/\beta\right)\right) - \\ - h_i Y_i t + \int_0^t \Delta M_{Yi} dt + M'_{Yi}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$M_{YN} = -h_N Y'_N \nu_N t + \int_0^t \Delta M_{YN} dt + M'_{YN}. \tag{14}$$

Везде в (7)–(14) $i = 1, \ldots, N-1$.

Уравнения (7)–(10) выводятся из (5)–(6) посредством несложных преобразований.

Формулы (7)–(14) справедливы в написанном виде в течение года от момента переключения $t = 0$ вплоть до следующего момента переключения $t = T$.

Таким образом, заменяя в (7)–(14) t на T, получаем рекуррентные соотношения (иначе говоря, дискретные отображения), связывающие между собой значения величин в следующие непосредственно друг за другом по времени моменты переключений. Благодаря наличию множителей $\left(\frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j} \right)$ эти отображения являются нелинейными.

Дискретная форма уравнений модели переключающегося воспроизводства для случая дискретно выделяемых эмиссии и зарплаты

Динамика системы в этом случае описывается системой уравнений (1′)–(4′) и (5)–(6). В пределах одного месяца это система линейных обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами. Свойство линейности само по себе существенно облегчает исследование модели. Дополнительным упрощающим решение фактом является то, что уравнения (1′)–(2′) не зависят от M_{Yi} и от M_{hj}, где $j \neq i$, и решаются отдельно.

В пределах одного календарного года (то есть в период между переключениями режимов воспроизводства подсистем) дискретные отображения, получающиеся нахождением общих решений (1′)–(4′) и (5)–(6) в пределах месячных интервалов сами линейны. При этом переменные, которые изменяются только на границе соседних лет, могут считаться в пределах календарного года постоянными параметрами. Это позволяет свести многомерное отображение к одномерным отображениям для отдельных переменных и выписать аналитические решения, связывающие значения переменных на начало следующих друг за другом лет (то есть сначала из системы дифференциальных уравнений получается система дискретных отображений с месячным шагом, которую можно, в свою очередь, свести к системе дискретных отображений с годовым шагом, уже нелинейных.

Уравнения (1′) в пределах одного месяца могут быть сведены к виду

$$M_{hi} = \hat{M}_{hi} + h_i Y_i \left(1 - k_{sh}\right) - \frac{k_{hi} \hat{M}_{hi}}{\tau} t + \Delta M_{hi}, \; i = 1, \ldots, N-1, \tag{15}$$

то есть предполагается, что между моментами, например, 0 и τ один раз «мгновенно» выплачивается зарплата одновременно с эмиссией и при этом происходит непрерывная равномерная трата денег. Считается, что выплаты происходят в начале месяца, при этом за месяц (до следующей порции выплат) домохозяйства успевают потратить долю k_{hi} от имеющихся на начало месяца сбережений. Величина k_{hi} в этом случае является безразмерной величиной. На основании (1′) можно выписать $N - 1$ дискретных отображений с шагом в 1 месяц, связывающие значения $\hat{M}_{hi}$ в моменты получения очередных порций денег (упорядочим их с помощью индекса l). Из вида формулы (15) очевидно, что в пределах календарного года это одномерные, независимые между собой отображения вида

$$\hat{M}_{hi}(l+1) = \hat{M}_{hi}(l) + \left(h_i Y_i (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hi}\right) - k_{hi} \hat{M}_{hi}(l), \; i = 1, \ldots, N-1. \tag{16}$$

Рекуррентные соотношения (16), по крайней мере при постоянных параметрах, решаемы в том смысле, что для них можно выписать аналитическую формулу, выражающую значения $\hat{M}_{hi}$ для любых l из соответствующего интервала через одно «начальное» значение M'_{hi}.

В явной форме это решение уравнения (16) выглядит следующим образом:

$$\hat{M}_{hi}(l) = \left(h_i Y_i (1 - k_{sh}) + \Delta M_{hi}\right) \frac{1 - \left(1 - k_{hi}\right)^l}{k_{hi}} + M'_{hi} \left(1 - k_{hi}\right)^l, \; l = 1, 2, \ldots, 12, \tag{17}$$

l — номер месяца от начала года.

Уравнения, связывающие значения M_{hi} в начале и в конце данного календарного года:

$$M_{hi} = \left(h_i Y_i (1-k_{sh}) + \Delta M_{hi}\right)\frac{1-\left(1-k_{hi}\right)^{12}}{k_{hi}} + M'_{hi}\left(1-k_{hi}\right)^{12},\ i=1,\ldots,N-1\,. \tag{18}$$

Для подсистемы с номером N справедливо выражение:

$$M_{hN} = \left(h_N Y'_N \nu_N (1-k_{sh}) + \Delta M_{hN}\right)\frac{1-\left(1-k_{hN}\right)^{12}}{k_{hN}} + M'_{hN}\left(1-k_{hN}\right)^{12}. \tag{19}$$

Уравнения (3′) в пределах одного месяца (на интервалах времени, содержащих выплаты домохозяйствам) могут быть сведены к виду

$$M_{Yi} = \hat{M}_{Yi} + \sum_{j=1}^{N} k_{hj}\frac{\hat{M}_{hj}}{\tau}\left(\frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j}\right)(1-k_{sY})t - h_i Y_i + \Delta M_{Yi},\ i=1,\ldots,N-1\,, \tag{20}$$

где вводится новое обозначение $\hat{M}_{Yi}$ для денежных средств, имеющихся у макроэкономических подсистем в начале месяца.

Единственные величины, которые меняются в (20) от месяца к месяцу, кроме M_{Yi}, — в пределах календарного года, — это $\hat{M}_{hi}$, значения которых определяются (17).

Таким образом, можем выписать уравнения, связывающие значения M_{Yi} в начале и в конце данного календарного года:

$$M_{Yi} = M'_{Yi} + \sum_{j=1}^{N} k_{hj}\frac{1}{\tau}\left(\frac{z_i Y_i}{\sum_{j=1}^{N-1} z_j Y_j}\right)(1-k_{sY})t\left(\sum_{l=1}^{12}\hat{M}_{hjl}\right) - 12(h_i Y_i + \Delta M_{Yi}),\ i=1,\ldots,N-1\,, \tag{21}$$

где $\hat{M}_{hjl}$ — значения M_{hj} на начало соответствующих месяцев с номером l от начала года, выражаемые из (17).

Для подсистемы с номером N справедливо выражение:

$$M_{YN} = M'_{YN} - 12(h_N Y'_N \nu_N + \Delta M_{YN}). \tag{22}$$

Для K_i, Y_i, $i=1,\ldots,N$, остаются справедливы формулы (7)–(10). Вместе с (18)–(19) и (21)–(22) они образуют систему нелинейных дискретных отображений с шагом в 1 год.

Режим скоординированного роста

При изучении описанных выше систем особый интерес представляет исследование условий, при которых происходит скоординированный рост, когда все подсистемы развиваются без кризисов, по очереди обгоняя друг друга.

Простейший вариант математической формулировки такого случая характеризуется тем, что все переменные всех N подсистем умножаются через N шагов по времени от данного момента на единый показатель μ^N:

$$K_i = \mu^N K_{0i},\ Y_i = \mu^N Y_{0i},\ M_{hi} = \mu^N M_{h0i},\ M_{Yi} = \mu^N M_{Y0i},\ i=1,\ldots,N\,. \tag{23}$$

Независимо от того, дискретно или непрерывно во времени поступает эмиссия, будем считать, что в последовательные моменты переключения она удовлетворяет условию

$$\Delta M_{hi} = \mu \Delta M'_{hi},\ \Delta M_{Yi} = \mu \Delta M'_{Yi},\ i = 1,...,N. \qquad (24)$$

Очевидно, что величины эмиссии в моменты времени, отстоящие друг от друга на N шагов, связаны соотношениями, аналогичными (23).

Также предположим, что Y_i, $i = 1,...,N$, в начальный момент времени отличаются друг от друга в различные степени числа μ в зависимости от того, через сколько шагов их значения обновятся, таким образом, чтобы они, по циклу опережая друг друга, принимали бы значения, равные произведению единого множителя на различные степени μ.

Согласно (8), (10), (23) Y_i на каждом шаге увеличивается в μ^N раз для одной из подсистем, до которой дошла очередь, в то время как для других подсистем значения Y_i остаются неизменными.

Сначала рассмотрим случай непрерывных зарплат и эмиссий.

Уравнения (11), (12) могут быть переписаны в виде

$$M_{hi} = \left(\frac{h_i Y_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta t}}{\beta + k_{hi}} \right) \left(1 - e^{-k_{hi} t}\right) + M'_{hi} e^{-k_{hi} t},\ \ i = 1,...,N-1, \qquad (25)$$

$$M_{hN} = \left(\frac{h_N Y'_N \nu_N (1 - k_{sh})}{k_{hN}} + \frac{\Delta M'_{hN} e^{\beta t}}{\beta + k_{hN}} \right) \left(1 - e^{-k_{hN} t}\right) + M'_{hN} e^{-k_{hN} t}. \qquad (26)$$

Соотношения (25), (26) справедливы для всех соседних моментов переключений, то есть, для t, равного промежутку времени между этими моментами T, что позволяет линейно выразить M'_{hi} через M''_{hi}, а M''_{hi}, через M'''_{hi}, и так далее, на N шагов назад во времени. Уравнения динамики эмиссий (24) также позволяют выразить все их значения через значение N шагов назад от текущего момента, величины Y_i выражаются через прошлые значения согласно (8), (10), (23). Таким образом, M_{hi} и M_{hN} можно выразить только через значения переменных N-го шага назад по времени и констант, а затем, используя (23) вычислить начальные значения M_{hi} и M_{hN}, при которых возможен скоординированный рост.

Приведем здесь значение рассчитанного начального условия для M_{hi}, $i = 1,...,N$ при $N = 3$, введя для унификации записи и сокращения числа формул обозначение:

$$X_i \equiv Y_i,\ i = 1,2,\ X_i \equiv Y'_N \nu_N,\ i = N = 3.$$

$$M'''_{hi} = \left(\frac{1 - e^{-k_{hi} T}}{\mu^3 - e^{-3 k_{hi} T}} \right) R_{\text{непр}}, \qquad (27)$$

$$R_{\text{непр}} \equiv \left(\frac{h_i X_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) + \left(\frac{h_i X'_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M''_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) e^{-k_{hi} T}$$
$$+ \left(\frac{h_i X''_i (1 - k_{sh})}{k_{hi}} + \frac{\Delta M'''_{hi} e^{\beta T}}{\beta + k_{hi}} \right) e^{-2 k_{hi} T}.$$

Обобщение (27) на случай любого N, а также нахождение, исходя из аналогичных рассуждений, начального условия для M_{Yi} (с использованием дополнительно (13), (14)) никаких дополнительных трудностей не вызывают, но, поскольку в результате получаются весьма громоздкие формулы, мы их здесь не приводим.

Начальные условия для капитала находятся по формуле, полученной подстановкой (9) в (23) и арифметическими преобразованиями:

$$K'_N = M'_{YN} / \left(\mu^N + 12(N-1)k_{\alpha N} - 1 \right). \tag{28}$$

В случае дискретного поступления зарплат и эмиссий используемые в расчетах начальных условий скоординированного роста соотношения (8), (10), (23), (24), (28) такие же, как в непрерывном случае, и используются так же. Вместо формул (25), (26), (13), (14) используются соответственно формулы (18), (19), (21), (22).

Начальное условие для M_{hi} при $N = 3$, например, для этого случая выглядит следующим образом:

$$M'''_{hi} = \left(\frac{1-(1-k_{hi})^{12}}{\mu^3 - (1-k_{hi})^{36}} \right) R_{\text{дискр}},$$

$$R_{\text{дискр}} \equiv \frac{h_i X_i (1-k_{sh}) + \mu^3 \Delta M'''_{hi}}{k_{hi}} + \frac{\left(h_i X'_i (1-k_{sh}) + \mu^2 \Delta M'''_{hi}\right)}{k_{hi}} (1-k_{hi})^{12} + \\ + \frac{\left(h_i X''_i (1-k_{sh}) + \mu \Delta M'''_{hi}\right)}{k_{hi}} (1-k_{hi})^{24}.$$

Справедливость приводимых в этом разделе рассуждений проверена созданием программы в Exel, которая для случая $N = 3$ рассчитывает набор начальных условий, соответствующих скоординированному росту (23).

На рисунке 1а показана зависимость $Y_i(t)$ (переменной, динамика которой в рассматриваемых моделях непосредственно характеризует экономический рост), типичная для режима скоординированного роста.

Рисунок 1б характеризует более общий случай неравномерного развития подсистем, когда условия скоординированного роста не выполнены.

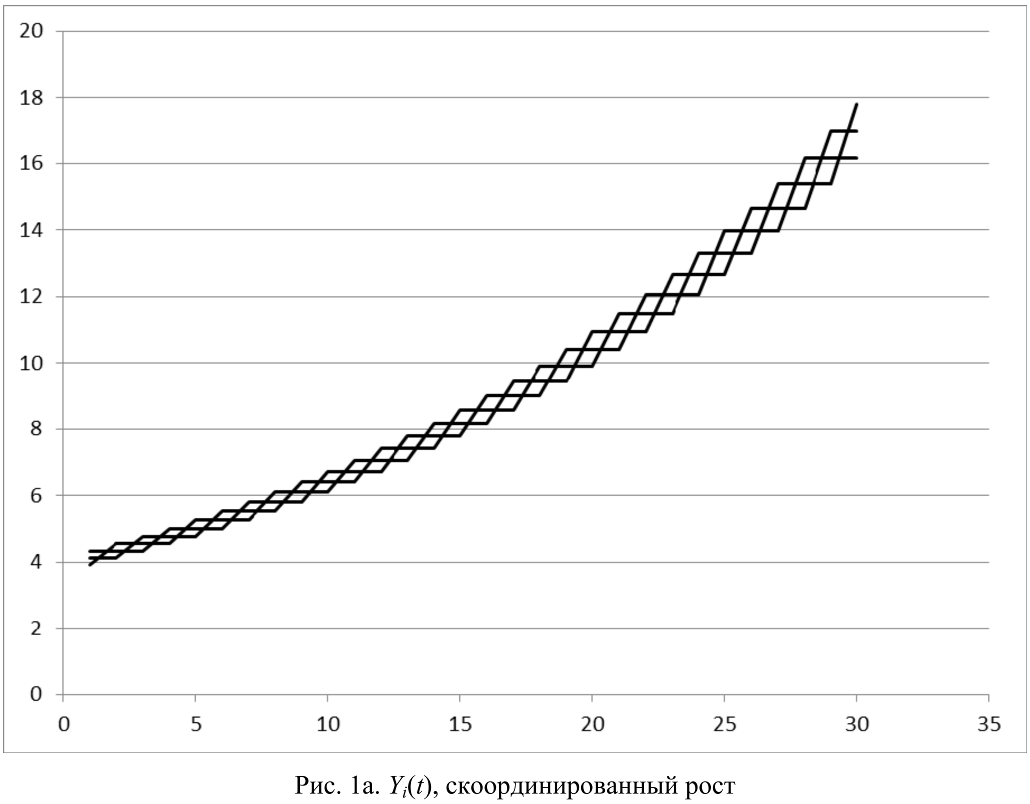

Рис. 1а. $Y_i(t)$, скоординированный рост

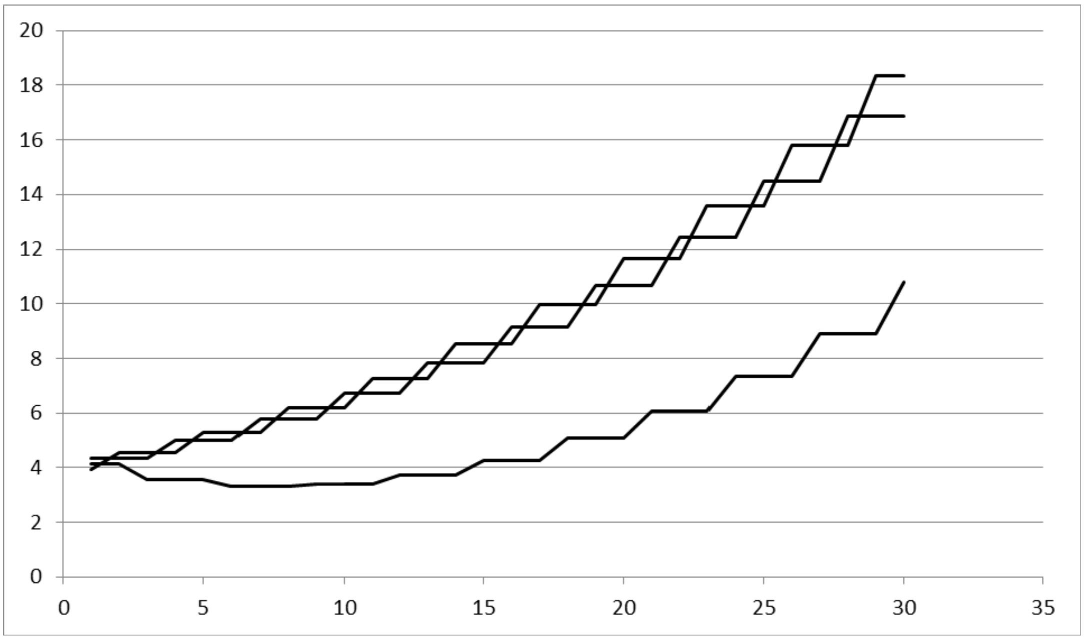

Рис. 1б. $Y_i(t)$, раскоординированный рост

Также отметим, что в формулы, описывающие начальные условия скоординированного роста, такие параметры, как h_i, k_{sh}, k_{sY}, $k_{\alpha N}, \nu_N$, входят линейно в отличие k_{hi} и z_i. Линейное вхождение параметров в данном случае дает легкую возможность частичной замены их начальными условиями при определении условий скоординированного роста.

Заключение

Приведение уравнений теории переключающегося режима воспроизводства к дискретной форме открывает дополнительные возможности получения строгих математических результатов и упрощает численные исследования. Благодаря такому представлению в статье получены начальные условия, соответствующие скоординированному росту подсистем, когда они в долгосрочной перспективе имеют экспоненциальный рост без получения систематического преимущества какими-либо из них над другими.

Особенностью рассмотренного в данной статье простейшего варианта модели переключающегося воспроизводства является то, что переключения происходят через фиксированные, экзогенно заданные интервалы времени. В более сложных версиях, например при включении в рассмотрение банковской системы, моменты скачкообразного изменения формы уравнений могут определяться динамикой системы, например необходимостью для подсистем при каких-то условиях брать кредиты.

Автор выражает искреннюю благодарность академику РАН, д. э. н. В. И. Маевскому, д. т. н. С. Ю. Малкову, к. э. н. А. А. Рубинштейну, д. соц. н., к. э. н. С. Г. Кирдиной, к. э. н. М. Ю. Иванову, д. э. н. С. А. Андрюшину за полезные обсуждения.

Список литературы (References)

Айзерман М. А., Пятницкий Е. С. Основы теории разрывных систем I, II // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 7. — С. 33–47; № 8. — С. 39–61.

Ajzerman M. A., Pjatnickij E. S. Osnovy teorii razryvnyh sistem I, II [Fundamentals of the theory of discontinuous systems] // Automation and Remote Control. — 1974. — No. 7. — P. 33–47; No. 8. — P. 39–61 (in Russian).

Бекларян Л. А., Борисова С. В., Хачатрян Н. К. Однопродуктовая динамическая модель замещения производственных фондов. Магистральные свойства // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 5. — С. 801–817.

Beklarjan L. A., Borisova S. V., Hachatrjan N. K. Odnoproduktovaja dinamicheskaja model' zameshhenija proizvodstvennyh fondov. Magistral'nye svojstva [A single-product dynamic model of replacing production capacities. Turnpike properties] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, No. 5. — C. 801–817 (in Russian).

Васечкина Е. Ф., Ярин В. Д. Динамическое моделирование эколого-экономической системы // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. — Севастополь: ЭКОСИ — Гидрофизика. — 2002. — С. 163–174.

Vasechkina E. F., Jarin V. D. Dinamicheskoe modelirovanie jekologo-jekonomicheskoj sistemy [Dynamic modeling of ecological-economic system] // Jekologicheskaja bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa. Sevastopol': JeKOSI — Gidrofizika. — 2002. — P. 163–174 (in Russian).

Матвеенко В. Д. Дискретная модель с фондами, различающимися по срокам службы. Оптимизация. — 1981. — Вып. 26 (43). — С. 90–102.

Matveenko V. D. Diskretnaja model' s fondami, razlichajushhimisja po srokam sluzhby [Discrete model with the funds that differ in life cycle] // Optimizacija. — 1981. — Vol. 26 (43). — P. 90–102 (in Russian).

Канторович Л. В., Горьков Л. И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Доклады АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 4. — С. 732–736.

Kantorovich L. V., Gor'kov L. I. O nekotoryh funkcional'nyh uravnenijah, voznikajushhih pri analize odnoproduktovoj jekonomicheskoj modeli [About some functional equations arising in the analysis of single-product economic model] // Doklady AN SSSR. — 1959. — Vol. 129, No. 4. — P. 732–736 (in Russian).

Канторович Л. В., Жиянов В. И. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Доклады АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 6. — С. 1280–1283.

Kantorovich L. V., Zhijanov V. I. Odnoproduktovaja dinamicheskaja model' jekonomiki, uchityvajushhaja izmene-nie struktury fondov pri nalichii tehnicheskogo progressa [The single-product dynamic model of economy considering change of structure of funds in the presence of technical progress] // Doklady AN SSSR. — 1973. — Vol. 211, No. 6. — P. 1280–1283 (in Russian).

Канторович Л. В., Жиянов В. И., Хованский А. Г. Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // Сб. тр. ВНИИ системных исслед. — 1978. — Вып. 9. — С. 5–25.

Kantorovich L. V., Zhijanov V. I., Hovanskij A. G. Analiz dinamiki jekonomicheskih pokazatelej na osnove odnoproduktovyh dinamicheskih modelej [The analysis of dynamics of economic indicators on the basis of single-product dynamic models] // Sb. tr. VNII sistemnyh issled. — 1978. — Vol. 9. — P. 5–25 (in Russian).

Кузнецов Ю. А., Маркова С. Е., Мичасова О. В. Математическое моделирование динамики конкурентного замещения поколений инновационного товара // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. — 2014. — № 2(1). — С. 170–179.

Kuznecov Ju. A., Markova S. E., Michasova O. V. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki konkurentnogo zameshhenija pokolenij innovacionnogo tovara [Mathematical modeling of dynamics of competitive replacement of generations of innovative goods] // Vestnik Nizhegorodskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. — 2014. — No. 2(1). — P. 170–179 (in Russian).

Лебедева И. В., Лебедев В. И. Смыкова Н. В. Самоорганизация, прогнозирование и управление в макроэкономических системах // Фундаментальные исследования. — 2006. — № 2. — С. 48–49.

Lebedeva I. V., Lebedev V. I., Smykova N. V. Samoorganizacija, prognozirovanie i upravlenie v makrojekonomicheskih sistemah [Self-organization, forecasting and management in macroeconomic systems] // Fundamental'nye issledovanija. — 2006. — No. 2. — P. 48–49 (in Russian).

Маевский В. И., Малков С. Ю. Новый взгляд на теорию воспроизводства: Монография. — М.: ИНФРА-М, 2013.

Maevskij V. I., Malkov S. Ju. Novyj vzgljad na teoriju vosproizvodstva: Monografija [A New Approach to the Theory of Reproduction] — M.: INFRA-M, 2013 (in Russian).

Маевский В., Малков С. Перспективы макроэкономической теории воспроизводства // Вопросы экономики. — 2014. — № 4. — С. 137–155.

Maevskij V., Malkov S. Perspektivy makrojekonomicheskoj teorii vosproizvodstva [Perspectives of the macroeconomic Reproduction Theory] // Voprosy jekonomiki. — 2014. — No. 4. — P. 137–155 (in Russian).

Маевский В. И., Малков С. Ю., Рубинштейн А. А. Теория и модель перекрывающихся поколений основного капитала. — М.: Институт экономики РАН, 2015.

Maevskij V. I., Malkov S. Ju., Rubinshtejn A. A. Teorija i model' perekryvajushhihsja pokolenij osnovnogo kapitala. [Overlapping Generations of Fixed Capital Theory and Model] — M.: Institut jekonomiki RAN, 2015 (in Russian).

Матросов В. М. О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, II // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3, № 3. — С. 395–409; № 5. — С. 869–878.

Matrosov V. M. O differencial'nyh uravnenijah i neravenstvah s razryvnymi pravymi chastjami I, II [About the differential equations and inequalities with discontinuous right parts] // Differencial'nye uravnenija. — 1967. — Vol. 3, No. 3. — P. 395–409; No. 5. — P. 869–878 (in Russian).

Теория систем с переменной структурой / Под ред. С. В. Емельянова. — М.: Наука, 1981.

Teorija sistem s peremennoj strukturoj [The theory of systems with variable structure] / Pod red. S. V. Emel'janova. — M.: Nauka, 1981 (in Russian).

Филиппов А. Ф. дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.

Filippov A. F. differencial'nye uravnenija s razryvnoj pravoj chast'ju [The differential equations with discontinuous right part] — M.: Nauka, 1985 (in Russian).

Diamond P. A. National Debt in Neoclassical Growth Model // American Economic Review. — 1965. — 5 (5). — P. 1126—1150.

Johansen L. Substitutions versus Fixed Production Coefficients in the Theory of Economic Growth: A Synthesis // Econometrica. — 1959. — Vol. 27, No. 2. — P. 157–175.

Solow R. M. Investment and technical progress // Arrow, Kenneth J.; Karlin, Samuel; Suppes, Patrick, Mathematical models in the social sciences, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium, Stanford mathematical studies in the social sciences, IV, Stanford, California: Stanford University Press, 1960. — P. 89–104.