

УДК: 519.633.2:519.633.6

## О построении и свойствах WENO-схем пятого, седьмого, девятого, одиннадцатого и тринадцатого порядков. Часть 1. Построение и устойчивость

Н. М. Евстигнеев

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,  
Россия, 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 9

E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

*Получено 01.07.2016, после доработки — 10.08.2016.*

*Принято к публикации 01.09.2016.*

В настоящее время для численного моделирования начально-краевых задач для систем гиперболических уравнений в частных производных (например, уравнения газовой динамики, МГД, деформируемого твердого тела и т. д.) применяются различные нелинейные численные схемы пространственной аппроксимации. Это связано с необходимостью повышения порядка аппроксимации и расчета разрывных решений, часто возникающих в таких системах. Необходимость в нелинейных схемах связана с ограничением, следующим из теоремы С. К. Годунова о невозможности построения линейной схемы порядка больше первого для монотонной аппроксимации уравнений такого типа. Одними из наиболее точных нелинейных схем являются схемы типа ENO (существенно не осциллирующие схемы и их модификации), в том числе схемы WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы). Последние получили наибольшее распространение, поскольку при одинаковой ширине шаблона имеют более высокий порядок аппроксимации чем ENO-схемы. Плюсом ENO- и WENO-схем является сохранение высокого порядка аппроксимации на немонотонных участках решения. Исследование данных схем затруднительно в связи с тем, что сами схемы нелинейны и применяются для аппроксимации нелинейных уравнений. В частности, условие линейной устойчивости ранее было получено только для схемы WENO5 (пятого порядка аппроксимации на гладких решениях) и является приближенным. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения и устойчивости схем WENO5, WENO7, WENO9, WENO11 и WENO13 для конечно-объемной схемы для уравнения Хопфа. В первой части статьи рассмотрены методы WENO в общем случае и приведены явные выражения для коэффициентов полиномов и весов линейных комбинаций, необходимых для построения схем. Доказывается ряд утверждений, позволяющих сделать выводы о порядках аппроксимации в зависимости от локального вида решения. Проводится анализ устойчивости на основе принципа замороженных коэффициентов. Рассматриваются случаи гладкого и разрывного поведения решения в области линеаризации при замороженных коэффициентах на гранях конечного объема и анализируется спектр схем для этих случаев. Доказываются условия линейной устойчивости для различных методов Рунге–Кутты при применении со схемами WENO. В результате приводятся рекомендации по выбору максимально возможного параметра устойчивости, которое наименьшим образом влияет на нелинейные свойства схем. Следуя полученным ограничениям, делается вывод о сходимости схем.

Ключевые слова: WENO-схемы, нелинейные схемы, устойчивость численных схем, системы уравнений гиперболического типа, уравнение Хопфа

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 14-07-00123).

© 2016 Николай Михайлович Евстигнеев

UDC: 519.633.2:519.633.6

# On the construction and properties of WENO schemes order five, seven, nine, eleven and thirteen.

## Part 1. Construction and stability

**N. M. Evstigneev**

Federal research center “Informatics and control” of Russian academy of science,  
9 pr. 60-letiya Oktyabrya, Moscow, 117312, Russia

E-mail: evstigneevnm@yandex.ru

*Received 01.07.2016, after completion – 10.08.2016.*

*Accepted for publication 01.09.2016.*

Currently, different nonlinear numerical schemes of the spatial approximation are used in numerical simulation of boundary value problems for hyperbolic systems of partial differential equations (e. g. gas dynamics equations, MHD, deformable rigid body, etc.). This is due to the need to improve the order of accuracy and perform simulation of discontinuous solutions that are often occurring in such systems. The need for non-linear schemes is followed from the barrier theorem of S. K. Godunov that states the impossibility of constructing a linear scheme for monotone approximation of such equations with approximation order two or greater. One of the most accurate non-linear type schemes are ENO (essentially non oscillating) and their modifications, including WENO (weighted, essentially non oscillating) schemes. The last received the most widespread, since the same stencil width has a higher order of approximation than the ENO scheme. The benefit of ENO and WENO schemes is the ability to maintain a high-order approximation to the areas of non-monotonic solutions. The main difficulty of the analysis of such schemes comes from the fact that they themselves are nonlinear and are used to approximate the nonlinear equations. In particular, the linear stability condition was obtained earlier only for WENO5 scheme (fifth-order approximation on smooth solutions) and it is a numerical one. In this paper we consider the problem of construction and stability for WENO5, WENO7, WENO9, WENO11, and WENO13 finite volume schemes for the Hopf equation. In the first part of this article we discuss WENO methods in general, and give the explicit expressions for the coefficients of the polynomial weights and linear combinations required to build these schemes. We prove a series of assertions that can make conclusions about the order of approximation depending on the type of local solutions. Stability analysis is carried out on the basis of the principle of frozen coefficients. The cases of a smooth and discontinuous behavior of solutions in the field of linearization with frozen coefficients on the faces of the final volume and spectra of the schemes are analyzed for these cases. We prove the linear stability conditions for a variety of Runge-Kutta methods applied to WENO schemes. As a result, our research provides guidance on choosing the best possible stability parameter, which has the smallest effect on the nonlinear properties of the schemes. The convergence of the schemes is followed from the analysis.

**Keywords:** WENO schemes, nonlinear schemes, stability of numerical schemes, hyperbolic systems of differential equations, Hopf equation

*Citation:* *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 5, pp. 721–753 (Russian).

This work is supported by Russian foundation for basic research (grant No. 14-07-00123).

## Введение

Схемы WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы) были впервые предложены в работе [Jiang, Shu, 1996], где дано обоснование построения для конечно-разностной схемы. Дальнейшие модификации схем привели к разработке конечно-объемных схем WENO. Несмотря на обширную литературу по данному направлению, вопрос расширения порядка аппроксимации схем и выбора нелинейных весов для сохранения высокого порядка аппроксимации на немонотонных участках решений является открытым. Вопрос линейной устойчивости схем ENO (существенно не осциллирующие схемы) и WENO третьего и пятого порядка, впервые обсуждался в работе [Jiang, Shu, 1996] для уравнения переноса. Устойчивость для схем третьего порядка рассмотрена в ряде работ, например в [Yamaleev, Carpenter, 2008]. Более детальный анализ для схемы WENO5 был проведен в работе [Wang, Spiteri, 2007]. Доказана необходимость условия включения отрезка на мнимой оси в область устойчивости интегрирования по времени. Также указываются методы, обладающие устойчивостью для схемы WENO5, в частности Strong Stability Preserving (SSP) – методы Рунге–Кутты (RK) [Spiteri, Ruuth, 2002]. В работе [Macdonald, Mohammad, Ruuth, 2011] для уравнения переноса показано, что для схемы WENO5 при рассмотрении дискретного спектра гармоник при анализе устойчивости требование включения отрезка мнимой оси в область устойчивости метода интегрирования по времени не обязательно. Так, показано, что для явного метода Эйлера условие устойчивости имеет вид  $\Delta t \leq \frac{8\pi^4}{15} \Delta x^5$  (см. [Macdonald, Mohammad, Ruuth, 2011, с. 139]). В данной работе рассматриваются схемы WENO(2n-1),  $n = 3, 4, \dots, 7$ . Доказываются утверждения для обоснования порядка аппроксимации на немонотонных решениях. Анализируется линейная устойчивость для уравнения Хопфа для всех возможных случаев замороженных коэффициентов.

## Конечно-объемная схема

В общем случае при анализе схем WENO рассматривается система законов сохранения, записанная в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{g}, \\ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0, n &= \{1 \vee 2 \vee 3\}, \\ \mathbf{u} : \Omega \times [0, t] &\rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь более детально остановимся на начально-краевой задаче для уравнения Хопфа в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &= 0, \quad x \in I = [a; b], \\ u(t, a) &= u(t, b), \\ u(0, x) &= u(x)_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Данная задача имеет следующее решение [Зайцев, Полянин, 2001]:

$$\begin{aligned} x - ut &= w(u), \\ w(u) &= [u(x)_0]^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем сетку по пространству  $Ix = I/\Delta x$  и шаг по пространству  $\Delta x$  – постоянный. Всего имеем  $N = |Ix|$  конечных объемов (КО) по пространству, при этом один КО представляется как

$Ix_j = [x_{j-1/2}; x_{j+1/2}]$ . Для (2) будем рассматривать схему КО, т. е. значения переменных хранятся в центрах сетки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_j &= -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}), & f_j &\equiv \frac{u_j u_j}{2}, \\ \hat{f}_{-1/2} &= \hat{f}_{N-1/2}, & \hat{f}_{N+1/2} &= \hat{f}_{1/2}, \\ u_j(0) &= u(x_j)_0, & x_j \forall j &= \{0 \dots N-1\} : x_0 = -1, x_1 = -1 + \Delta x, \dots, x_{N-1} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$u_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t, \xi) d\xi, \quad (5)$$

$\hat{f}_{j+1/2}$  — численный поток, обладающий свойством консервативности и согласованности [Того, 1999]. Для (2) решение задачи Римана на грани КО представляется потоком С. К. Годунова [Годунов, 1976]:

$$\hat{f}_{j+1/2}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) = \begin{cases} \min_{u_{j+1/2}^- \leq u \leq u_{j+1/2}^+} f(u), & u_{j+1/2}^- \leq u_{j+1/2}^+; \\ \max_{u_{j+1/2}^+ \leq u \leq u_{j+1/2}^-} f(u), & u_{j+1/2}^- > u_{j+1/2}^+. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь  $u_{j+1/2}^+$  — значение  $u$  на грани между КО номер  $j$  и КО номер  $j+1$  справа от грани, а  $u_{j+1/2}^-$  — слева от грани. Пользуясь тем, что поток скалярный и выпуклый, можно найти явное выражение для (6):

$$\hat{f}_{j+1/2}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) = \begin{cases} f(u_{j+1/2}^-), & u_{j+1/2}^- \leq u_{j+1/2}^+, & u_{j+1/2}^- > 0. \\ f(0), & u_{j+1/2}^- \leq u_{j+1/2}^+, & u_{j+1/2}^- < 0, & u_{j+1/2}^+ > 0. \\ f(u_{j+1/2}^+), & u_{j+1/2}^- \leq u_{j+1/2}^+, & u_{j+1/2}^+ < 0. \\ f(u_{j+1/2}^-), & u_{j+1/2}^- > u_{j+1/2}^+, & u_{j+1/2}^+ > 0. \\ f(u^*), & u^* = \begin{cases} u_{j+1/2}^+, & |u_{j+1/2}^+| > |u_{j+1/2}^-|, \\ u_{j+1/2}^-, & |u_{j+1/2}^+| \leq |u_{j+1/2}^-|, \end{cases} & \begin{cases} u_{j+1/2}^- > u_{j+1/2}^+, \\ u_{j+1/2}^+ < 0, & u_{j+1/2}^- > 0. \end{cases} \\ f(u_{j+1/2}^+), & u_{j+1/2}^- > u_{j+1/2}^+, & u_{j+1/2}^- < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Схемы WENO используются для вычисления  $u^{+/-}$ .

## Построение схемы WENO

Рассмотрим реконструкцию WENO для получения значения  $u^{+/-}$  [Shu, 1998].

### Нахождение постоянных для шаблонов WENO-аппроксимации

**Задача 1.** Пусть заданы средние значения функции (5) на сетке КО. Найти полином  $p(x)_j$  степени не выше  $k-1$  для каждого  $Ix_j$  такой, что он является аппроксимацией  $k$ -го порядка для функции  $u(x)$  внутри  $Ix_j$ :

$$p(x)_j = u(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in Ix_j, \quad j = 0 \dots N-1. \quad (8)$$

Предполагаем периодические граничные условия. Решение задачи 1 позволяет получить аппроксимацию для значений справа и слева от граней КО:

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^- &= p(x_{j+1/2})_j = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k), \\ u_{j-1/2}^+ &= p(x_{j-1/2})_j = u(x_{j+1/2}) + O(\Delta x^k). \end{aligned} \quad (9)$$

Полиномы  $p(x)_j$  могут быть любыми, например тригонометрическими. В рамках ENO- и WENO-подходов выбираются полиномы Лагранжа, и тогда задача 1 решается нижеизложенным путем.

Для заданных  $Ix_j$  и  $k$  выберем шаблон  $S(j)$ , который имеет ширину  $l + r + 1 = k$ , т. е.  $l \geq 0$  ячеек влево, и  $r \geq 0$  ячеек вправо, и центр  $x_j$ :

$$S(j) \equiv \{Ix_{j-l}, \dots, Ix_{j+r}\}. \tag{10}$$

**Лемма 1 ([Shu, 1998]).** Пусть  $u(x) \in C^k[S(j)]$ . Тогда существует единственный полином  $p(x)_j$  степени  $k - 1 = l + r$ , средние значения которого по всем  $Ix \in S(j)$  совпадают со средним значением  $u(x)$  в точках из  $S(j)$  в смысле (5):

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p(\xi) d\xi = u_s, \quad s = j - l, \dots, j + r. \tag{11}$$

*Доказательство* [Shu, 1998]. Рассмотрим функцию

$$U(x) = \int_{-\infty}^x u(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Выразим значение  $U(x)$  в точке  $x_{j+1/2}$  через средние значения  $u_j$  в точках  $j \in S(j)$ , воспользовавшись (5):

$$U(x_{j+1/2}) = \sum_{s=-\infty}^j \int_{x_{s-1/2}}^{x_{s+1/2}} u(\xi) d\xi = \sum_{s=-\infty}^j u_s \Delta x. \tag{13}$$

Обозначим единственный полином степени не больше  $k$ , интерполирующий  $U(x_{j+1/2})$  на точках  $x_{j-l-1/2}, \dots, x_{j+r+1/2}$ , как  $P(x)$ . Обозначим  $p(x) = dP(x)/dx$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{s-1/2}}^{x_{s+1/2}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x} (P(x_{s+1/2}) - P(x_{s-1/2})) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} (U(x_{s+1/2}) - U(x_{s-1/2})) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{-\infty}^{x_{s+1/2}} u(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{s-1/2}} u(\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{s-1/2}}^{x_{s+1/2}} u(\xi) d\xi = u_s, \quad s = j - l, \dots, j + r. \end{aligned} \tag{14}$$

Следовательно, построенный полином  $p(x)$  — искомый полином. Очевидно, что  $dP(x)/dx = dU(x)/dx + O(\Delta x^k)$  при  $x \in Ix_j$ , из чего следует (8).  $\square$

Используем интерполяционный полином Лагранжа:

$$P(x) = \sum_{m=0}^k U(x_{j-l+m-1/2}) \prod_{s=0, s \neq m}^k \frac{x - x_{j-l+s-1/2}}{x_{j-l+m-1/2} - x_{j-l+s-1/2}}. \tag{15}$$

Вычтем  $U(x_{j-l-1/2})$  из (15):

$$P(x) - U(x_{j-l-1/2}) = \sum_{m=0}^k U(x_{j-l+m-1/2}) - U(x_{j-l-1/2}) \prod_{s=0, s \neq m}^k \frac{x - x_{j-l+r-1/2}}{x_{j-l+m-1/2} - x_{j-l+s-1/2}}. \quad (16)$$

Продифференцируем (16) по  $x$  и, учитывая  $U(x_{j-l+m-1/2}) - U(x_{j-l-1/2}) = \sum_{q=0}^{m-1} u_{j-l+q} \Delta x_{j-l+q}$ , согласно (13) получим

$$p(x) = \sum_{m=0}^k \sum_{q=0}^{m-1} u_{j-l+q} \Delta x_{j-l+q} \left( \frac{\sum_{s=0, s \neq m}^k \prod_{g=0, g \neq m, s}^k (x - x_{j-l+g-1/2})}{\prod_{g=0, g \neq m}^k (x_{j-l+m-1/2} - x_{j-l+g-1/2})} \right). \quad (17)$$

Для удобства перепишем выражения для интересующих нас значений функции  $u$  на гранях КО в виде

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^- &= \sum_{s=0}^{k-1} c_{l,s} u_{j-l+s}, \\ u_{j-1/2}^+ &= \sum_{s=0}^{k-1} \hat{c}_{l,s} u_{j-l+s}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $c_{l,s}, \hat{c}_{l,s}$  — постоянные, не зависящие от значений функции  $u$ . Если связать левую сторону шаблона  $l$  с точкой реконструкции  $x_{j+1/2}$ , то можно опустить выражения  $u^-$ ,  $u^+$  и тогда  $\hat{c}_{l,s} = c_{l-1,s}$ . Подставим значение  $x_{j+1/2}$  в (17) и получим выражения для постоянных  $c_{l,s}$ :

$$c_{l,s} = \left( \frac{\sum_{m=s+1}^k \frac{\sum_{q=0, q \neq m}^k \prod_{g=0, g \neq m, q}^k (x - x_{j-l+g-1/2})}{\prod_{g=0, g \neq m}^k (x_{j-l+m-1/2} - x_{j-l+g-1/2})}}{\prod_{g=0, g \neq m}^k (x_{j-l+m-1/2} - x_{j-l+g-1/2})} \right) \Delta x_{j-l+s}. \quad (19)$$

Полученное выражение может быть использовано для сетки с переменным шагом. Для рассматриваемой сетки с постоянным  $\Delta x$  выражение упрощается:

$$c_{l,s} = \sum_{m=s+1}^k \frac{\sum_{q=0, q \neq m}^k \prod_{g=0, g \neq m, q}^k (r - q + 1)}{\prod_{g=0, g \neq m}^k (m - g)}. \quad (20)$$

Аналогичные выражения получены в [Shu, 1998]. Нам будут важны полиномы 3, 4, ..., 7 порядков. Для них постоянные  $c_{l,s}$  выписаны в таблице 1 по выражению (20).

### Нахождение весов для WENO-аппроксимации

Далее рассмотрим WENO-реконструкцию аналогично [Shu, 1998]. Пусть для вычисления  $u_{j+1/2}$  используется  $k$  шаблонов:

$$S_l(j) = \{x_{j-l}, \dots, x_{j-l+k-1}\}, \quad l = 0, \dots, k-1. \quad (21)$$

Таблица 1.  $c_{l,s}$  для постоянных  $\Delta x$  при разных  $k$

$k$	$l$	$s = 0$	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$
3	-1	11/6	-7/6	1/3				
	0	1/3	5/6	-1/6				
	1	-1/6	5/6	1/3				
	2	1/3	-7/6	11/6				
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4			
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12			
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12			
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4			
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12			
5	-1	137/60	-163/60	137/60	-21/20	1/5		
	0	1/5	77/60	-43/60	17/60	-1/20		
	1	-1/20	9/20	47/60	-13/60	1/30		
	2	1/30	-13/60	47/60	9/20	-1/20		
	3	-1/20	17/60	-43/60	77/60	1/5		
	4	1/5	-21/20	137/60	-163/60	137/60		
6	-1	49/20	-71/20	79/20	-163/60	31/30	-1/6	
	0	1/6	29/20	-21/20	37/60	-13/60	1/30	
	1	-1/30	11/30	19/20	-23/60	7/60	-1/60	
	2	1/60	-2/15	37/60	37/60	-2/15	1/60	
	3	-1/30	11/30	19/20	-23/60	1/5	1/5	
	4	1/5	-21/20	137/60	-163/60	7/60	-1/60	
	5	1/30	-13/60	37/60	-21/20	29/20	1/6	
7	-1	363/140	-617/140	853/140	-2341/420	667/210	-43/42	1/7
	0	1/7	223/140	-197/140	153/140	-241/420	37/210	-1/42
	1	-1/42	13/42	153/140	-241/420	109/420	-31/420	1/105
	2	1/105	-19/210	107/210	319/420	-101/420	5/84	-1/140
	3	-1/140	5/84	-101/420	319/420	107/210	-19/210	1/105
	4	1/105	-31/420	109/420	-241/420	153/140	13/42	-1/42
	5	-1/42	37/210	-241/420	153/140	-197/140	223/140	1/7
	6	1/7	-43/42	667/210	-2341/420	853/140	-617/140	363/140

Получаем  $k$  различных реконструкций для  $u_{j+1/2}$  в соответствии с (18):

$$u_{j+1/2}^{(l)} = \sum_{s=0}^{k-1} c_{l,s} u_{j-l+s}, \quad l = 0, \dots, k-1, \tag{22}$$

на большом шаблоне:

$$S = \{x_{j-k+1}, \dots, x_{j+k-1}\}. \tag{23}$$

Докажем существование такой реконструкции альтернативным от принятого в литературе способом. Первая идея WENO-реконструкции заключается в использовании выпуклой комбинации всех индексов ( $l$ ) в (22) для построения новой аппроксимации порядка  $(2k - 1)$ . Рассмотрим полиномы  $P(x)$  степени  $k$  (см. (15)) и построим полином  $Q(x)$  степени  $2k - 1$ :

$$Q(x) = \sum_{l=0}^{k-1} C(x)_l P(x)_l, \tag{24}$$

являющийся интерполяционным на большом шаблоне для функции  $U(x)$ , (12). Поскольку требуется, что  $Q(x) \in \mathbb{P}^{2k-1}$ , и поскольку  $P(x) \in \mathbb{P}^k$ , то  $C(x) \in \mathbb{P}^{k-1}$ . Полином  $C(x)$  равен нулю в  $S \setminus S_l$ ,

поскольку  $P(x)_l$  является интерполяционным на шаблоне  $S_l$  для функции  $U(x)$ . Кроме того, поскольку  $Q(x)$  — интерполяционный на  $S$ , то сумма весов  $C(x)_l$  в  $S$  должна быть равна единице, а из условия устойчивости  $C(x)_l \geq 0 \forall l = 0, \dots, k-1$ . Полиномы  $C(x)$ :

$$C(x)_l = a_l \prod_{x_q \in S \setminus S_l} (x - x_q), \quad (25)$$

где веса  $a_l$  выбираются из условия

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k-1} C(x_j)_l &= 1 \quad \forall j \in S, \\ C(x_j)_l &\geq 0 \quad \forall l = 0, \dots, k-1 \quad \forall j \in S. \end{aligned} \quad (26)$$

**Лемма 2.** Система уравнений для нахождения весов  $a_l$  представляется в форме

$$A\mathbf{a} = \mathbf{1}, \quad (27)$$

где матрица  $A$  является нижней треугольной матрицей с ненулевой диагональю.

*Доказательство.*

Вспомним, что полиномы  $Q(x)$  и  $P(x)_l$  являются интерполяционными для функции  $U(x)$  на соответствующих шаблонах. Рассмотрим крайнюю левую точку  $x_{j-k+1}$ . В этой точке имеется только один полином,  $P(x)_0$ , с шаблоном  $S_{k-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q(x_{j-k+1}) &= C(x_{j-k+1})_0 P(x_{j-k+1})_0 = C(x_{j-k+1})_0 U_{j-k+1}, \\ C(x_{j-k+1})_0 &= 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из условия  $C(x_{j-k+1})_0 = 1$  следует  $a_0$ . Аналогично: в точке  $x_{j-k+2}$  имеем два полинома,  $P(x)_0$  и  $P(x)_1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(x_{j-k+2}) &= (C(x_{j-k+2})_0 P(x_{j-k+2})_0 + C(x_{j-k+2})_1 P(x_{j-k+2})_1) = \\ &= (C(x_{j-k+2})_0 + C(x_{j-k+2})_1) U_{j-k+2}. \\ (C(x_{j-k+2})_0 + C(x_{j-k+2})_1) &= 1. \end{aligned} \quad (29)$$

По индукции для  $x_{j-1}$ -й точки имеем  $k-1$  коэффициентов  $C(x_{j-k+1})_0, C(x_{j-k+2})_1, \dots, C(x_{j-1})_{k-1}$ . Поскольку на большом шаблоне  $S$  полиномы интерполируют функцию  $U(x)$  на отрезке  $[x_j; x_{j+1}]$ , то

$$\begin{aligned} x_j &\in \text{Dom}[P(x)_l] \quad \forall l \in 0, \dots, k-1, \\ C(x_j)_l &> 0 \quad \forall l \in 0, \dots, k-1 \quad \forall j \in S, \\ \sum_{l=0}^{k-1} C(x_j)_l &= 1, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\text{Dom}[P(x)_l]$  — область определения полинома  $l$ . Поскольку для точки  $x_j$  все  $C(x_j)$  определены, то имеем количество уравнений, равное количеству неизвестных  $a_l$ . Тогда можно сформировать систему вида

$$A\mathbf{a} = \mathbf{1}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{k-1})^T$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ , а матрица  $A$  определяется как

$$A_{l,m} = \prod_{x_q \in S \setminus S_l} (x_{j-n+m} - x_q) \mathbb{I}(x_{j-n+m}, S_l), \quad (32)$$



где  $\mathbb{I}(x_{j-n+m}, S_l) = \begin{cases} 1, & x_{j-n+m} \in S_l \\ 0, & x_{j-n+m} \notin S_l \end{cases}$  – индикаторная функция принадлежности крайней точки с индексом  $j - n + m$  малому шаблону  $S_l$ . По построению базиса индукции и из свойства полинома Лагранжа следует, что  $C(x_{j-q+1})_q \neq 0 \forall q = 0, \dots, k - 1$ . Следовательно, диагональ матрицы  $A$  не имеет нулевых элементов, а сама матрица – нижняя треугольная.  $\square$

Обратная матрица  $A^{-1}$  существует, и тогда этот подход позволяет однозначно определить веса  $a_l$  и  $C(x)_l$  в точках интерполяции, причем как для неравномерного, так и для равномерного разбиения элементов  $Ix_j$ . Данные веса можно заранее просчитать, например, с помощью кода на Wolfram Mathematica, листинг 4. Результаты для интересующих нас случаев  $k = 3-7$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. Выражения полиномов  $C(x)_l$  и их значения  $D$  при  $x_{j-1/2}$  для постоянных  $\Delta x$

$k$	порядок	$C(x)_l$	$D_l$
3	5	$C(x)_0 = \frac{(x-x_{j+3/2})(x-x_{j+5/2})}{20\Delta x^2}$	3/10
		$C(x)_1 = \frac{(x-x_{j-5/2})(x-x_{j+5/2})}{-10\Delta x^2}$	3/5
		$C(x)_2 = \frac{(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})}{20\Delta x^2}$	1/10
4	7	$C(x)_0 = \frac{(x-x_{j+3/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})}{210\Delta x^3}$	4/35
		$C(x)_1 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})}{-70\Delta x^3}$	18/35
		$C(x)_2 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j+7/2})}{70\Delta x^3}$	12/35
		$C(x)_3 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})}{-210\Delta x^3}$	1/35
5	9	$C(x)_0 = \frac{(x-x_{j+3/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})}{3024\Delta x^4}$	5/126
		$C(x)_1 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})}{-756\Delta x^4}$	20/63
		$C(x)_2 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})}{504\Delta x^4}$	10/21
		$C(x)_3 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})(x-x_{j+9/2})}{-756\Delta x^4}$	10/63
		$C(x)_4 = \frac{(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})(x-x_{j-1/2})}{3024\Delta x^4}$	1/126
6	11	$C(x)_0 = \frac{(x-x_{j+3/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})}{55440\Delta x^5}$	1/77
		$C(x)_1 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})}{-11088\Delta x^5}$	25/154
		$C(x)_2 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})}{5544\Delta x^5}$	100/231
		$C(x)_3 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})}{-5544\Delta x^5}$	25/77
		$C(x)_4 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j+11/2})}{11088\Delta x^5}$	5/77
		$C(x)_5 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})}{-55440\Delta x^5}$	1/462
7	13	$C(x)_0 = \frac{(x-x_{j+3/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})(x-x_{j+13/2})}{1235520\Delta x^6}$	7/1716
		$C(x)_1 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j+5/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})(x-x_{j+13/2})}{-205920\Delta x^6}$	21/286
		$C(x)_2 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j+7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})(x-x_{j+13/2})}{82368\Delta x^6}$	175/572
		$C(x)_3 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j+9/2})(x-x_{j+11/2})(x-x_{j+13/2})}{-61776\Delta x^6}$	175/429
		$C(x)_4 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j+11/2})(x-x_{j+13/2})}{82368\Delta x^6}$	105/572
		$C(x)_5 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})(x-x_{j+13/2})}{-205920\Delta x^6}$	7/286
		$C(x)_6 = \frac{(x-x_{j-11/2})(x-x_{j-9/2})(x-x_{j-7/2})(x-x_{j-5/2})(x-x_{j-3/2})(x-x_{j-1/2})}{1235520\Delta x^6}$	1/1716

При условии  $dP(x)/dx = p(x)$  получаем

$$dQ(x_{j+1/2})/dx = \sum_{l=0}^{k-1} D_{1P}(x_{j+1/2})_l \tag{33}$$

и переходим к выражению (22), где веса  $D_l = C(x_{j+1/2})_l$ , их численные значения приведены в таблице 2. Вторая идея WENO-реконструкции заключается в введении адаптированных весов, чтобы исключить из линейной комбинации шаблон с наличием разрыва в функции. Рассмотрим веса

$$\omega_l \geq 0, \quad \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l = 1. \quad (34)$$

Справедлива следующая

**Лемма 3.** Пусть заданы веса (34), такие что

$$D_l = \omega_l + O(\Delta x^{k-1}), \quad l = 0, \dots, k-1. \quad (35)$$

Тогда

$$u(x_{j+1/2}) = \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l u_{j+1/2}^{(l)} + O(\Delta x^{2k-1}). \quad (36)$$

*Доказательство.*

Из (24) следует, что  $u(x_{j+1/2}) = \sum_{l=0}^{k-1} D_l u_{j+1/2}^{(l)} + O(\Delta x^{2k-1})$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l u_{j+1/2}^{(l)} - \sum_{l=0}^{k-1} D_l u_{j+1/2}^{(l)} = \\ & = \sum_{l=0}^{k-1} (\omega_l - D_l) (u_{j+1/2}^{(l)} - u(x_{j+1/2})) = \\ & = \sum_{l=0}^{k-1} O(\Delta x^{k-1}) O(\Delta x^k) = O(\Delta x^{2k-1}). \end{aligned} \quad (37)$$

□

Веса, удовлетворяющие лемме 3, нормируются:

$$\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{q=0}^{k-1} \alpha_q}, \quad (38)$$

где коэффициенты  $\alpha_l$  такие, что

$$\alpha_l = D_l(1 + O(\Delta x)^q). \quad (39)$$

При этом легко проверить, что справедливо

$$\omega_l = D_l(1 + O(\Delta x)^q). \quad (40)$$

Коэффициенты  $\alpha_l$  выбираются в работе [Jiang, Shu, 1996] как

$$\alpha_l = \frac{D_l}{(\varepsilon + \beta_l)^2}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (41)$$

Здесь  $\beta_l$  — функция-индикатор гладкости, которая меняет свое поведение в зависимости от гладкости функции каждого шаблона  $S_l \subset S$ . Значение  $\varepsilon$  выбирается так, чтобы не влиять на точность вычислений. В [Jiang, Shu, 1996] рекомендуется  $\varepsilon \sim 1 \cdot 10^{-6}$ . Справедлива следующая

**Лемма 4.** Пусть выполнены выражения (38), (41), (34). Кроме того, пусть во всем шаблоне  $S$ -функции такой гладкости, что для всех  $l = 0, \dots, k - 1$  функции-индикаторы можно представить как:

$$\beta_l = G(1 + O(\Delta x^{k-1})), \tag{42}$$

где  $G$  не зависит от  $l$ , но может зависеть от  $\Delta x$ . Тогда

1)  $D_l = \omega_l + O(\Delta x^{k-1})$ ;

2) справедливо выражение (36).

*Доказательство.*

Докажем условие 1.  $\omega_l = \frac{1}{\sum_q \alpha_q} D_l \frac{1}{(\varepsilon + \beta_l)^2}$ , или  $\omega_l (\sum_q \alpha_q) (\varepsilon + \beta_l)^2 = D_l$ . Поскольку  $G$  не зависит от  $l$  и справедливо (26), то

$$\sum_q \alpha_q = \frac{1}{(\varepsilon + G(1 + O(\Delta x^{k-1})))^2} \sum_q D_q = \frac{1}{(\varepsilon + G(1 + O(\Delta x^{k-1})))^2}. \tag{43}$$

Тогда

$$D_l = \omega_l \left( \frac{1}{(\varepsilon + G)^2} + \frac{2O(\Delta x^{k-1})}{(\varepsilon + G)^2} \right) ((\varepsilon + G)^2 + 2(\varepsilon + G)(\varepsilon + G)O(\Delta x^{k-1})). \tag{44}$$

Следовательно

$$D_l = \omega_l (1 + O(\Delta x^{k-1})). \tag{45}$$

По лемме 3 доказано условие 2. □

В работе [Jiang, Shu, 1996] был предложен общий метод постройки индикаторов гладкости, который позволяет достаточно эффективно обнаруживать особенности на гладких функциях. Общее выражение имеет вид

$$\beta_l = \sum_{q=1}^{k-1} \Delta x^{2q-1} \int_{\Delta x_{j-1/2}}^{\Delta x_{j+1/2}} \left( \frac{d^q p(x)_l}{dx^q} \right)^2 dx. \tag{46}$$

Фактически выражение (46) есть сумма квадрата норм  $\mathbb{L}_2$  для производных полиномов  $p(x)_l$ , а  $\Delta x^{2q-1}$  необходимо для отсутствия зависимости от  $\Delta x$  в получаемых выражениях. Применение (46) для полиномов в форме (17) на шаблонах  $S_l$  позволяет получить явные выражения для функций-индикаторов (можно воспользоваться кодом на Wolfram Mathematica, листинг 2; явные выражения  $\beta_l$  приводятся в приложении 2). По построению индикаторов гладкости понятно, что если на шаблоне  $S_l$  наблюдается разрыв, то  $\beta_l = O(1)$ . При равенстве нулю производных (экстремумы функций) поведение индикаторов гладкости необходимо проанализировать.

Разложением в ряд Тейлора в окрестности  $x_j$  для WENO5 можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \beta_0^{WENO5} &= \Delta x^2 (p')^2 + \frac{\Delta x^4}{3} \left( \frac{13}{4} (p'')^2 - 2p' p''' \right) + O(\Delta x^5), \\ \beta_1^{WENO5} &= \Delta x^2 (p')^2 + \frac{\Delta x^4}{3} \left( \frac{13}{4} (p'')^2 + p' p''' \right) + O(\Delta x^6), \\ \beta_2^{WENO5} &= \Delta x^2 (p')^2 + \frac{\Delta x^4}{3} \left( \frac{13}{4} (p'')^2 - 2p' p''' \right) + O(\Delta x^5). \end{aligned} \tag{47}$$

Выражения (47) приводятся к форме (42), при этом

$$G = \begin{cases} (p')^2(\Delta x^2), p' \neq 0, \\ \frac{13}{12}(p'')^2(\Delta x^4), p' = 0, p'' \neq 0. \end{cases} \quad (48)$$

В первом случае условия леммы 4 выполняются, в случае равенства нулю первой производной — нет. Таким образом, в точках экстремума порядок схемы будет понижаться.

Рассмотрим разложение индикаторов гладкости в ряд Тейлора для схемы WENO7:

$$\begin{aligned} \beta_0^{WENO7} &= \Delta x^2(p')^2 + \frac{13}{12}\Delta x^4(p'')^2 - \frac{1}{2}\Delta x^5 p' p^{IV} + O(\Delta x^6), \\ \beta_1^{WENO7} &= \Delta x^2(p')^2 + \frac{13}{12}\Delta x^4(p'')^2 + \frac{1}{6}\Delta x^5 p' p^{IV} + O(\Delta x^6), \\ \beta_2^{WENO7} &= \Delta x^2(p')^2 + \frac{13}{12}\Delta x^4(p'')^2 + \frac{1}{6}\Delta x^5 p' p^{IV} + O(\Delta x^6), \\ \beta_3^{WENO7} &= \Delta x^2(p')^2 + \frac{13}{12}\Delta x^4(p'')^2 - \frac{1}{2}\Delta x^5 p' p^{IV} + O(\Delta x^6). \end{aligned} \quad (49)$$

Если  $(p') \neq 0$ , то приведение выражений (49) к форме (42) имеет вид  $\beta_l = G(1 + O(\Delta x^2))$ , когда для выполнения леммы 4 требуется поведение вида  $O(\Delta x^{(4-1)})$ . Аналогично можно показать невыполнение условий леммы 4 для схем WENO9–WENO13.

В работе [Shen, Zha, 2008] предлагается скомбинировать индикаторы гладкости иным способом, чтобы добиться верного поведения индикаторов в точках экстремума. Предлагается следующий вариант:

$$\tilde{\beta}_l = \frac{\beta_l + \varepsilon}{\beta_l + \tau + \varepsilon}. \quad (50)$$

Тогда выражение (41) меняется на следующие:

$$\alpha_l = \frac{D_l}{\tilde{\beta}_l} = D_l \left( 1 + \left( \frac{\tau}{\beta_l + \varepsilon} \right)^q \right), \quad (51)$$

здесь  $\tau = |\beta_0 - \beta_{k-1}|$ . В работе [Shen, Zha, 2008] параметр  $q$  выбирается в зависимости от схемы. Так, для схемы WENO5 приводится  $q = 2$ , а для схемы WENO7 —  $q = 4$ . Докажем следующее утверждение для всех рассматриваемых схем:

**Лемма 5.** *Выражение (38) при определении  $\alpha_l$  по (51) при  $q = 2$  для всех схем, кроме WENO7 и при  $q = 3$  для схемы WENO7 удовлетворяет лемме 3 для условий в экстремумах:  $(p' \neq 0, p'' \neq 0)$ ,  $(p' = 0, p'' \neq 0)$ ,  $(p' = 0, p'' = 0, p''' \neq 0)$ .*

*Доказательство.*

Разложим в ряд Тейлора выражения  $\tau_X$ , где  $X$  — номер схемы:

$$\tau_5 = \left( -\frac{13}{3}p''p''' + p'p^{IV} \right) \Delta x^5 + \frac{1}{36} \left( -103p'''p^{IV} - 39p''p^V + 6p'p^{VI} \right) \Delta x^7 + O(\Delta x^8),$$

$$\tau_7 = -p'p^{IV}\Delta x^5 + \frac{1}{120} \left( -781p'''p^{IV} + 520p''p^V - 100p'p^{VI} \right) \Delta x^7 + O(\Delta x^8),$$

$$\begin{aligned} \tau_9 &= \left( -\frac{18}{5}p''p^V + \frac{4}{3}p'p^{VI} \right) \Delta x^7 + \frac{1}{2520} \left( -21857p^{IV}p^V + 27335p^{III}p^{VI} - \right. \\ &\quad \left. - 13020p^{II}p^{VII} + 2100p'p^{VIII} \right) \Delta x^9 + O(\Delta x^{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= -\frac{2}{3}(p'p^{VI})\Delta x^7 + \frac{(-49117p^{III}p^{VI} + 41328p^{II}p^{VII} - 10080p'p^{VIII})\Delta x^9}{6048} + O(\Delta x^{11}), \\ \tau_{13} &= \left(-\frac{211}{70}p''p^{VII} + \frac{3}{2}p'p^{VIII}\right)\Delta x^9 + \frac{1}{302400}(-3261720p^{II}p^{IX} - \\ &\quad - 4586081p^{IV}p^{VII} + 6299335p^{III}p^{VIII} + 635040p'p^X)\Delta x^{11} + O(\Delta x^{13}).\end{aligned}$$

Дополнительно представим разложение индикаторов гладкости для схем WENO9-WENO13:

$$\begin{aligned}\beta_{13,11} &= (p')^2\Delta x^2 + \frac{13}{12}(p'')^2\Delta x^4 + \left(\frac{781}{720}(p''')^2 - \frac{1}{360}p''p^{IV}\right)\Delta x^6 + O(\Delta x^8), \\ \beta_9 &= (p')^2\Delta x^2 + \frac{13}{12}(p'')^2\Delta x^4 + \frac{1}{720}(781(p''')^2 - 2p''p^{IV} - 288p'p^V)\Delta x^6 + O(\Delta x^8).\end{aligned}$$

Различие разложений индикаторов от номера  $l$  в данных членах ряда отсутствует. Рассмотрим случаи.

1. ( $p' \neq 0, p'' \neq 0$ ). Тогда имеем следующее поведение отношения  $B = \tau/\beta$ :

$$\begin{aligned}B_5 &= O(\Delta x^3), \\ B_7 &= O(\Delta x^3), \\ B_9 &= O(\Delta x^5), \\ B_{11} &= O(\Delta x^5), \\ B_{13} &= O(\Delta x^7).\end{aligned}\tag{52}$$

2. ( $p' = 0, p'' \neq 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned}B_5 &= O(\Delta x), \\ B_7 &= O(\Delta x^3), \\ B_9 &= O(\Delta x^3), \\ B_{11} &= O(\Delta x^5), \\ B_{13} &= O(\Delta x^5).\end{aligned}\tag{53}$$

3. ( $p' = 0, p'' = 0, p''' \neq 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned}B_5 &= O(\Delta x), \\ B_7 &= O(\Delta x), \\ B_9 &= O(\Delta x^3), \\ B_{11} &= O(\Delta x^3), \\ B_{13} &= O(\Delta x^5).\end{aligned}\tag{54}$$

Из подстановки  $B^q$  при  $q = 2$  и при  $q = 3$  для WENO7 в выражение (51) следует утверждение леммы.  $\square$

На основе полученных функций индикаторов гладкости можно окончательно построить взвешенную схему WENO.

**Алгоритм 1.** Алгоритм работы схемы WENO.

Пусть заданы значения  $u_{j+1/2}$  — средние для функций  $u(x)$  в центре каждого элемента  $Ix_j$ . Приведем алгоритм для нахождения  $u_{j+1/2}^\pm$  с помощью схемы WENO.

1. Определяем шаблоны  $S_l(x)$ , на которых требуется вычислить значения функции, в зависимости от порядка схемы, и берем соответствующие значения  $u_{j+1/2-l}$  на шаблонах.
2. Вычисляем веса, используя функции-индикаторы гладкости (46) (или их явные выражения, получаемые с использованием листинга 2) и выражения (38), (51) (таблица 2).
3. Строим реконструкцию на основе выражений (22) и (36) порядка  $(2k - 1)$ , тем самым находим  $u_{j+1/2}^\pm$ .

По доказанным леммам следует, что такое построение однозначно и для гладкой функции имеет порядок аппроксимации  $(2k - 1)$  и порядок  $k$  в окрестности точки разрыва.

**Исследование устойчивости**

Известно, что WENO-схемы относятся к классам TVB (ограничивающих полную вариацию) [Harten et al., 1986; Li, Qiu, 2010], т. е.

$$TV(u^{n+1}) - TV(u^n) \leq O(\Delta x^k), \quad (55)$$

где  $TV$  — полная вариация, определяемая для дискретного разбиения отрезка на  $N$  КО как

$$TV(f) = \sum_{j=0}^{N-1} |f_{j+1} - f_j|. \quad (56)$$

Условие (55) выполняется в случае устойчивости численной схемы. Рассмотрим устойчивость схем WENO в комбинации с явными методами Рунге–Кутты. В связи с нелинейностью оператора WENO-схемы рассмотрим несколько вариантов линеаризации индикаторов гладкости. В целом можно ожидать ухудшения свойств линейной устойчивости схем с увеличением порядка в связи с ростом константы Лебега для полиномов Лагранжа на равноотстоящих узлах. Отметим сразу, что найденные ниже условия являются только необходимыми.

**Метод замороженных коэффициентов**

Рассмотрим вариацию  $0 < \frac{\|\delta_j\|}{\|u_j\|} \ll 1$  функции  $u_j$  для схемы (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_j &= -\frac{1}{\Delta x} \left[ (u_{j+1/2} u_{j+1/2/2})^\pm - (u_{j-1/2} u_{j-1/2/2})^\pm \right], \\ \frac{d}{dt} (u_j + \delta_j) &= \\ &= -\frac{1}{2\Delta x} \left[ (u_{j+1/2} + \delta_{j+1/2})^\pm (u_{j+1/2} + \delta_{j+1/2})^\pm - (u_{j-1/2} + \delta_{j-1/2})^\pm (u_{j-1/2} + \delta_{j-1/2})^\pm \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

Вычитая одно выражение из другого и приравнявая к нулю члены второго и более порядка малости, получаем

$$\frac{d\delta_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ u_{j+1/2} \delta_{j+1/2}^\pm - u_{j-1/2} \delta_{j-1/2}^\pm \right]. \quad (58)$$

Здесь  $\delta^\pm$  вычисляется по (7) в зависимости от линеаризованного значения  $u$ . В классическом методе замороженных коэффициентов [Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2003, с. 521] вариации  $\delta$  рассматривают относительно невозмущенного значения фонового решения, т. е.  $u_{j+1/2} = u_{j-1/2} = \text{Const}$ . Это оправдано для линейных схем. Для нелинейных схем, к которым относится WENO-схема, вариация  $\delta$  зависит от фонового решения. Поэтому будем рассматривать линеаризации  $u_{j+1/2} = a$  и  $u_{j-1/2} = b$  такие, что

$$O(\Delta x^{k-1}) < |a - b| < O(\Delta x). \tag{59}$$

Такие возмущения будут приводить к переключениям шаблонов схемы и изменению свойств устойчивости. Будем рассматривать варианты возмущений (59), приводящие ко всем возможным переключениям шаблонов. Получим выражение

$$\frac{d\delta_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [a\delta_{j+1/2}^\pm - b\delta_{j-1/2}^\pm], \tag{60}$$

здесь  $a, b$  — константы, удовлетворяющие условию (59). Выражение (60) исследуется на устойчивость при различных  $a, b$ , а значения  $\delta_{j\pm 1/2}^\pm$  находятся с помощью схемы WENO и далее выбираются в зависимости от (7).

Будем исследовать устойчивость в линейном приближении (60) методом гармоник [Бахвалов, Жидков, Кобельков, 2003, с. 506]:

$$\delta(t)_j = \hat{\delta}(t)e^{ij\theta_m}, \tag{61}$$

где  $\theta_m = m\Delta x$ ,  $m = -N/2, \dots, N/2$ .  $\delta_{j\pm 1/2}^\pm = \text{WENO}(\delta_{j+A}, \dots, \delta_{j-B}) = z(\theta_m)\hat{\delta}(t)$  и при  $N \rightarrow \infty$  получаем  $z(\theta_m)\hat{\delta}(t) \rightarrow z(\theta)\hat{\delta}(t)$ ,  $\theta \in [0; 2\pi)$ . Здесь  $\text{WENO}()$  — применение алгоритма 1 к  $\delta_j$ ,  $A, B$  — левая и правая полуширина шаблона при работе алгоритма 1.

**Определение 1.** *Спектр оператора схемы WENO есть множество  $S_{p\text{WENO}} = \{-z(\theta) : \theta \in [0; 2\pi)\} \subset \mathbb{C}^1$ .*

Рассмотрим методы интегрирования по времени (семейство явных методов РК), которые можно записать как

$$\delta_j^{n+1} = -g(Cz(\theta_m))\delta_j^n, \tag{62}$$

где  $g(z)$  — оператор перехода,  $C$  — число Куранта–Фридрихса–Леви (CFL) [Курант, Фридрихс, Леви, 1941].

**Определение 2.** *Область линейной устойчивости  $D_{\text{RK}}$  с оператором перехода  $g(z)$ :  $D_{\text{RK}} = \{z : |g(z)| \leq 1\} \subset \mathbb{C}^1$ .*

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Численный метод решения уравнения Хопфа с применением схемы WENO и метода Рунге–Кутты порядка  $q$  линейно устойчив тогда и только тогда, когда  $S_{p\text{WENO}} \subset D_{\text{RK}}$ .*

*Доказательство.*

1. Условие  $S_{p\text{WENO}} \subset D_{\text{RK}}$  эквивалентно условию  $\forall \theta \in [0; 2\pi) : -z(\theta) \in D_{\text{RK}}$ , т. е.  $\forall \theta : |g(z(\theta))| \leq 1$ . Таким образом, точки, отображаемые оператором WENO на комплексную плоскость, лежат внутри области устойчивости метода РК. Тогда амплитуда любой гармоники убывает при переходе с временного слоя  $n$  на временной слой  $n + 1$  и схема линейно-устойчива.

2. Пусть  $\exists \theta^* : z(\theta^*) \notin D_{\text{RK}}$ . Тогда  $|g(z(\theta^*))| > 1$  по определению 2. Следовательно, данная гармоника будет возрастать при переходе с временного слоя  $n$  на временной слой  $n + 1$  и схема будет линейно-неустойчива.  $\square$

Оператор перехода выражается путем подстановки разложения (61) в выбранный метод Рунге–Кутты. Например, для метода Эйлера имеем  $\hat{\delta}^{n+1} = \hat{\delta}^n + Cz(\theta)\hat{\delta}^n = \hat{\delta}^n(1 + Cz(\theta)) = g(z(\theta))\hat{\delta}^n$ .

1. Явный метод Эйлера:  $g(z) = 1 + Cz$ .
2. Метод Рунге–Кутты второго порядка  $g(z) = 1 + Cz + (Cz)^2/2$ .
3. Метод SSP Рунге–Кутты третьего порядка [Spiteri, Ruuth, 2002]:  $g(z) = 1 + Cz + (Cz)^2/2 + (Cz)^3/6$ .
4. Метод Рунге–Кутты четвертого порядка:  $g(z) = 1 + Cz + (Cz)^2/2 + (Cz)^3/6 + (Cz)^4/24$ .

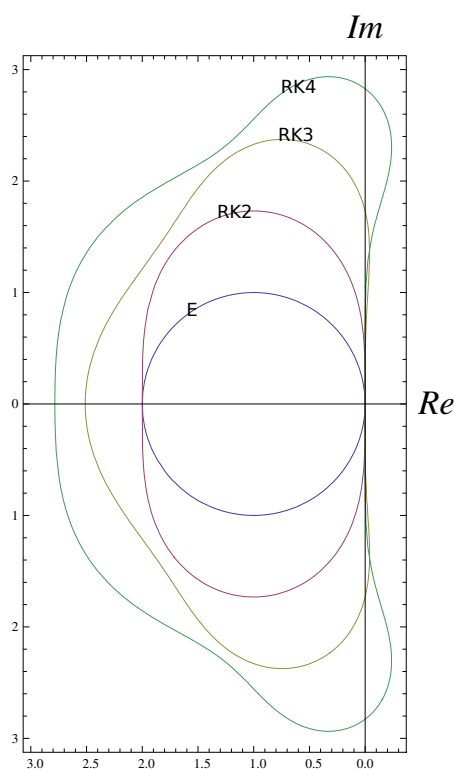


Рис. 1. Области линейной устойчивости  $D_{RK}$  для операторов перехода методов Рунге–Кутты 1–4 порядков при  $C = 1$ .  $D_{RK1}$  — обозначение «E»,  $D_{RK2}$  — обозначение «RK2»,  $D_{RK3}$  — обозначение «RK3» и  $D_{RK4}$  — обозначение «RK4»

Нам понадобятся точки на мнимой оси, которые включены в  $D_{RK}$  при  $C = 1$ .

**Лемма 6.** *Только одна точка на мнимой оси  $(0, i0) \in D_{RK}$  для метода Эйлера и метода Рунге–Кутты второго порядка.*

*Доказательство.*

Подставим  $z = a + ib$ ;  $(a, b) \in Re$  и найдем решение системы

$$\begin{cases} a = 0, \\ |g(z)|^2 = 1. \end{cases} \quad (63)$$

Тогда

$$\begin{cases} a = 0, \\ (1 + a + ib)(1 + a - ib) = 1 \end{cases} \quad (64)$$



для метода Эйлера и

$$\begin{cases} a = 0, \\ (1 + a + a^2/2 - b^2/2 + i(b + ab))(1 + a + a^2/2 - b^2/2 - i(b + ab)) = 1 \end{cases} \quad (65)$$

для РК2. Откуда для метода Эйлера  $1 + b^2 = 1$  следовательно,  $b = 0$ , т. е.  $(0, i0) \in D_{RK}$ , кратности 2. Аналогично для РК2:  $(1 - b^2/2)^2 + b^2 = 1$  следовательно,  $1 + b^4/4 = 1$ , т. е. для РК2  $(0, i0) \in D_{RK}$ , кратности 4.  $\square$

**Лемма 7.** Для метода Рунге–Кутты третьего порядка справедливо включение  $[-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}] \in D_{RK}$ .

*Доказательство.*

Аналогично:  $z = a + ib$  и

$$\begin{cases} a = 0, \\ |(1 + a + a^2/2 - b^2/2 + a^3/6 - ab^2/2) + i(b + ab + a^2b/2 - b^3/6)|^2 = 1. \end{cases} \quad (66)$$

Тогда  $(1 - b^2/2)^2 + (b - b^3/6)^2 = 1$  следовательно,  $1 - b^2 + b^4/4 + b^2 - b^4/3 + b^6/36 = 1$ . Отсюда  $b^4(-1 + b^2/3) = 0$ , получаем  $b = 0$  кратности 4 и  $b = \pm\sqrt{3}$ . Поскольку других нулей функции  $|g(z)|^2 = 1$  при условии отсутствия действительной части нет, то  $[-i\sqrt{3}; i\sqrt{3}] \in D_{RK}$ .  $\square$

**Лемма 8.** Для метода Рунге–Кутты четвертого порядка справедливо включение  $[-i\sqrt{8}; i\sqrt{8}] \in D_{RK}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{cases} a = 0, \\ |(1 + a + a^2/2 - b^2/2 + a^3/6 - ab^2/2 + a^4/24 - a^2b^2/4 + b^4/24) + \\ + i(b + ab + a^2b/2 - b^3/6 + a^3b/6 - ab^3/6)|^2 = 1. \end{cases} \quad (67)$$

Отсюда  $(1 - b^2/2 + b^4/24)^2 + (b - b^3/6)^2 = 1$  следовательно,  $1/576b^6(-8 + b^2) = 0$ , и получаем  $b = 0$  кратности 6 и  $b = \pm\sqrt{8}$ . Поскольку других нулей функции  $|g(z)|^2 = 1$  при условии отсутствия действительной части нет, то  $[-i\sqrt{8}; i\sqrt{8}] \in D_{RK}$ .  $\square$

Области линейной устойчивости графически показаны на рис. 1.

### Гладкие решения

Будем рассматривать линеаризацию на гладких решениях, т. е. таких, для которых справедливо выполнение условий леммы 5. Тогда  $\omega_l = D_l + O(\Delta x^{k-1})$ . Введем  $\epsilon_l = O(\Delta x^{k-1})$  и рассмотрим веса в виде

$$\omega_l = D_l + \epsilon_l, \quad (68)$$

где  $D_l$  определяются по таблице 2.

Рассмотрим **случай 1** для потока. Пусть решение (7) такое, что  $\delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta_{j+1/2}^{-} = \delta^e$  и  $\delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta_{j-1/2}^{-} = \delta^w$ , т. е. реализуется противопоточная схема. При этом направление + или - в данном случае неважно. Действительно, можно показать симметричность схем к отражению относительно центральной точки  $j$  с помощью симметричности коэффициентов из таблиц 1 и 2. Подобный анализ для схемы WENO5 выполнен в [Wang, Spiteri, 2007]. Подставим выражение (61) в алгоритм 1 и рассмотрим явные выражения отдельных шаблонов, входящих в линейную комбинацию схемы. Обозначим выражения для отдельных шаблонов как  $\delta_{b,j}^a$ , где  $a$  —

сторона, т. е.  $e$  или  $w$ ;  $b$  — номер схемы т. е. 5 для схемы WENO5, 7 для WENO7 и т. д.;  $l$  — номер шаблона. Для краткости запишем только шаблоны  $e$ , шаблоны  $w$  получаются из шаблонов  $e$  сдвигом  $e^{in\theta} \rightarrow e^{i(n-1)\theta}$

$$\begin{aligned}\delta_{5,2}^e &= 1/3e^{-2i\theta} - 7/6e^{-i\theta} + 11/6, \\ \delta_{5,1}^e &= -1/6e^{-i\theta} + 5/6 + 1/3e^{i\theta}, \\ \delta_{5,0}^e &= 1/3 + 5/6e^{i\theta} - 1/6e^{2i\theta}.\end{aligned}\quad (69)$$

$$\begin{aligned}\delta_{7,3}^e &= -1/4e^{-3i\theta} - 13/12e^{-2i\theta} - 23/12e^{-i\theta} + 25/12, \\ \delta_{7,2}^e &= 1/12e^{-2i\theta} - 5/12e^{-i\theta} + 13/12 + 1/4e^{i\theta}, \\ \delta_{7,1}^e &= -1/12e^{-i\theta} + 7/12 + 7/12e^{i\theta} - 1/12e^{2i\theta}, \\ \delta_{7,0}^e &= 1/4 + 13/12e^{i\theta} - 5/12e^{2i\theta} + 1/12e^{3i\theta}.\end{aligned}\quad (70)$$

$$\begin{aligned}\delta_{9,4}^e &= 1/5e^{-4i\theta} - 21/20e^{-3i\theta} + 137/60e^{-2i\theta} - 163/60e^{-i\theta} + 137/60, \\ \delta_{9,3}^e &= -1/20e^{-3i\theta} + 17/60e^{-2i\theta} - 43/60e^{-i\theta} + 77/60 + 1/5e^{i\theta}, \\ \delta_{9,2}^e &= 1/30e^{-2i\theta} - 13/60e^{-i\theta} + 47/60 + 9/20e^{i\theta} - 1/20e^{2i\theta}, \\ \delta_{9,1}^e &= -1/20e^{-i\theta} + 9/20 + 47/60e^{i\theta} - 13/60e^{2i\theta} + 1/30e^{3i\theta}, \\ \delta_{9,0}^e &= 1/5 + 77/60e^{i\theta} - 43/60e^{2i\theta} + 17/60e^{3i\theta} - 1/20e^{4i\theta}.\end{aligned}\quad (71)$$

$$\begin{aligned}\delta_{11,5}^e &= -1/6e^{-5i\theta} + 31/30e^{-4i\theta} - 163/60e^{-3i\theta} + 79/20e^{-2i\theta} - 71/20e^{-i\theta} + 49/20, \\ \delta_{11,4}^e &= 1/30e^{-4i\theta} - 13/60e^{-3i\theta} + 37/60e^{-2i\theta} - 21/20e^{-i\theta} + 29/20 + 1/6e^{i\theta}, \\ \delta_{11,3}^e &= -1/60e^{-3i\theta} + 7/60e^{-2i\theta} - 23/60e^{-i\theta} + 19/20 + 11/30e^{i\theta} - 1/30e^{2i\theta}, \\ \delta_{11,2}^e &= 1/60e^{-2i\theta} - 2/15e^{-i\theta} + 37/60 + 37/60e^{i\theta} - 2/15e^{2i\theta} + 1/60e^{3i\theta}, \\ \delta_{11,1}^e &= -1/30e^{-i\theta} + 11/30 + 19/20e^{i\theta} - 23/60e^{2i\theta} + 7/60e^{3i\theta} - 1/60e^{4i\theta}, \\ \delta_{11,0}^e &= 1/6 + 29/20e^{i\theta} - 21/20e^{2i\theta} + 37/60e^{3i\theta} - 13/60e^{4i\theta} + 1/30e^{5i\theta}.\end{aligned}\quad (72)$$

$$\begin{aligned}\delta_{13,6}^e &= 1/7e^{-6i\theta} - 43/42e^{-5i\theta} + 667/210e^{-4i\theta} - 2341/420e^{-3i\theta} + 853/140e^{-2i\theta} - 617/140e^{-i\theta} + 363/140, \\ \delta_{13,5}^e &= -1/42e^{-5i\theta} + 37/210e^{-4i\theta} - 241/420e^{-3i\theta} + 153/140e^{-2i\theta} - 197/140e^{-i\theta} + 223/140 + 1/7e^{i\theta}, \\ \delta_{13,4}^e &= 1/105e^{-4i\theta} - 31/420e^{-3i\theta} + 109/420e^{-2i\theta} - 241/420e^{-i\theta} + 153/140 + 13/42e^{i\theta} - 1/42e^{2i\theta}, \\ \delta_{13,3}^e &= -1/140e^{-3i\theta} + 5/84e^{-2i\theta} - 101/420e^{-i\theta} + 319/420 + 107/210e^{i\theta} - 19/210e^{2i\theta} + 1/105e^{3i\theta}, \\ \delta_{13,2}^e &= 1/105e^{-2i\theta} - 19/210e^{-i\theta} + 107/210 + 319/420e^{i\theta} - 101/420e^{2i\theta} + 5/84e^{3i\theta} - 1/140e^{4i\theta}, \\ \delta_{13,1}^e &= -1/42e^{-i\theta} + 13/42 + 153/140e^{i\theta} - 241/420e^{2i\theta} + 109/420e^{3i\theta} - 31/420e^{4i\theta} + 1/105e^{5i\theta}, \\ \delta_{13,0}^e &= 1/7 + 223/140e^{i\theta} - 197/140e^{2i\theta} + 153/140e^{3i\theta} - 241/420e^{4i\theta} + 37/210e^{5i\theta} - 1/42e^{6i\theta}.\end{aligned}\quad (73)$$

Спектр оператора WENO можно записать следующим выражением:

$$z(\theta)_a = \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l \delta_{a,l}^e - \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l \delta_{a,l}^w. \quad (74)$$

Подстановка (68) в (74) приведет к тому, что спектр операторов будет иметь часть, не зависящую от  $\epsilon_l$  ( $0 \leq l < k$ ), и часть, зависящую от  $\epsilon_l$ . Найти спектр можно прямой подстановкой

и вычислением (74) для всех случаев:

$$\begin{aligned} z(\theta)_5 = & -1/60(20 - 60e^{-i\theta} - 30e^{i\theta} - 15e^{-2i\theta} + 3e^{2i\theta} + 2e^{-3i\theta}) - \\ & - 1/6(11 - 18e^{-i\theta} + 9e^{-2i\theta} - 2e^{-3i\theta})\epsilon_0 - \\ & - 1/6(3 - 6e^{-i\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-2i\theta})\epsilon_1 + \\ & + (1/2 + e^{-i\theta}/3 - e^{i\theta} + 1/6e^{2i\theta})\epsilon_2, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} z(\theta)_7 = & -1/420(3e^{-4i\theta} - 28e^{-3i\theta} + 126e^{-2i\theta} - 420e^{-i\theta} + 105 + 252e^{i\theta} - 42e^{2i\theta} + 4e^{3i\theta}) + \\ & + 1/12(10 + 3e^{-i\theta} - 18e^{i\theta} + 6e^{2i\theta} - e^{3i\theta})\epsilon_0 + \\ & + 1/12(-e^{-2i\theta} + 8e^{-i\theta} - 8e^{i\theta} + e^{2i\theta})\epsilon_1 + \\ & + 1/12(-10 + 18e^{-i\theta} - 3e^{i\theta} - 6e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta})\epsilon_2 + \\ & + (-(25/12) + 4e^{-i\theta} - 3e^{-2i\theta} + 4/3e^{-3i\theta} - 1/4e^{-4i\theta})\epsilon_3, \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} z(\theta)_9 = & -1/5 + e^{-i\theta} - 2/3e^{i\theta} - 1/3e^{-2i\theta} + 1/7e^{2i\theta} + 2/21e^{-3i\theta} - \\ & - 1/42e^{3i\theta} - 1/56e^{-4i\theta} + 1/504e^{4i\theta} + 1/630e^{-5i\theta} + \\ & + (13/12 + e^{-i\theta}/5 - 2e^{i\theta} + e^{2i\theta} - 1/3e^{3i\theta} + 1/20e^{4i\theta})\epsilon_0 + \\ & + 1/60(20 + 30e^{-i\theta} - 60e^{i\theta} - 3e^{-2i\theta} + 15e^{2i\theta} - 2e^{3i\theta})\epsilon_1 + \\ & + 1/60(-20 + 60e^{-i\theta} - 30e^{i\theta} - 15e^{-2i\theta} + 3e^{2i\theta} + 2e^{-3i\theta})\epsilon_2 + \\ & + (-13/12 + 2e^{-i\theta} - e^{i\theta}/5 - e^{-2i\theta} + 1/3e^{-3i\theta} - 1/20e^{-4i\theta})\epsilon_3 + \\ & + (-137/60 + 5e^{-i\theta} - 5e^{-2i\theta} + 10/3e^{-3i\theta} - 5/4e^{-4i\theta} + 1/5e^{-5i\theta})\epsilon_4, \end{aligned} \quad (77)$$

и для WENO11 и WENO13 сокращенно, в связи с громоздкостью:

$$\begin{aligned} z(\theta)_{11} = & -1/6 + e^{-i\theta} - 5/7e^{i\theta} - 5/14e^{-2i\theta} + 5/28e^{2i\theta} + 5/42e^{-3i\theta} - \\ & - 5/126e^{3i\theta} - 5/168e^{-4i\theta} + 1/168e^{4i\theta} + 1/210e^{-5i\theta} - 1/2310e^{5i\theta} - 1/2772e^{-6i\theta} + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} z(\theta)_{13} = & -1/7 + e^{-i\theta} - 3/4e^{i\theta} - 3/8e^{-2i\theta} + 5/24e^{2i\theta} + 5/36e^{-3i\theta} - \\ & - 1/18e^{3i\theta} - 1/24e^{-4i\theta} + 1/88e^{4i\theta} + 1/110e^{-5i\theta} - 1/660e^{5i\theta} - \\ & - 1/792e^{-6i\theta} + 1/10296e^{6i\theta} + 1/12012e^{-7i\theta} + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (79)$$

Справедливо следующее

**Утверждение 1.** Схемы WENO5, WENO7, WENO9, WENO11 и WENO13 линейно-неустойчивы при применении явных методов Эйлера и Рунге-Кутты второго порядка.

*Доказательство.*

Покажем данный факт путем разложения в ряд выражений (75), (77), (79) в окрестности нуля и найдем часть спектра  $S_{PWENO}$ , которая на содержится в  $D_{RK1,2}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} z(\theta)_5 = & -i\theta - 1/60\theta^6 + 1/140i\theta^7 + 1/240\theta^8 + O(\theta^9) - \\ & - \epsilon(3i\theta - 1/4\theta^4 + 7/30i\theta^5 + 5/24\theta^6 - 25/252i\theta^7 - 43/960\theta^8 + O(\theta^9)) = \\ & = -i\theta - 3i\theta^3 + 7/30\theta^6 + O(\theta^7). \end{aligned} \quad (80)$$

Аналогично:

$$z(\theta)_7 = -i\theta - 4i\theta^3 + 2/15i\theta^7 + 277/840\theta^8 + O(\theta^9), \quad (81)$$

$$z(\theta)_9 = -i\theta - 5i\theta^5 - 211/1260\theta^{10} + O(\theta^{11}), \quad (82)$$

$$z(\theta)_{11} = -i\theta - 6i\theta^3 - 3/28i\theta^9 - 3/8\theta^{10} + 109/240i\theta^{11} + O(\theta^{12}) \quad (83)$$

и

$$z(\theta)_{13} = -i\theta - 7i\theta^7 + 1501/12012\theta^{14} + O(\theta^{15}). \quad (84)$$

Для всех выражений в окрестности 0 часть спектра содержит чисто мнимый отрезок. Линейная неустойчивость следует из леммы 6 и теоремы 1.  $\square$

Указанный вывод для схемы WENO5, в отличие от работы [Macdonald, Mohammad, Ruuth, 2011, с. 139], выполнен для предельного перехода спектра. В дальнейшем на применении данных методов к схемам WENO не останавливаемся.

Для нахождения критического значения  $C^*$ , при котором схема будет линейно-устойчива (а при его превышении будет терять устойчивость), необходимо решить уравнение для РК3 и РК4:

$$\begin{aligned} |G(z)_{\text{RK3}}| &:= |1 + Cz(\theta) + C^2z(\theta)^2/2 + C^3z(\theta)^3/6|^2 - 1 = 0 \quad \forall \theta \in (0; \pi], \\ |G(z)_{\text{RK4}}| &:= |1 + Cz(\theta) + C^2z(\theta)^2/2 + C^3z(\theta)^3/6 + C^4z(\theta)^4/24|^2 - 1 = 0 \quad \forall \theta \in (0; \pi]. \end{aligned} \quad (85)$$

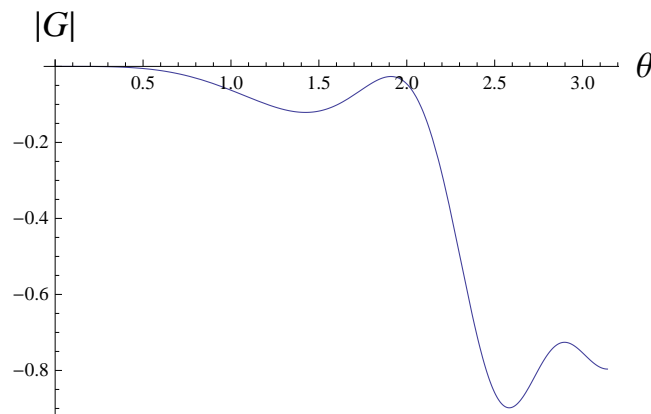
К сожалению, решение данных равенств аналитически невозможно в силу теоремы Абеля–Руффини. Для решения данной системы можно воспользоваться пакетом символьных вычислений Wolfram Mathematica. Для упрощения задачи при решении пакетом символьных вычислений будем рассматривать решение задачи нахождения условного максимума:

$$\begin{aligned} |G(z(\theta))_{\text{RK}}| &\rightarrow \max_{C, \theta}, \\ |G(z(\theta))_{\text{RK}}| &\leq 0, \\ \theta &\in (\theta_0, \theta_1), \\ C &\in (C_0, C_1). \end{aligned} \quad (86)$$

Введенные условия продиктованы формой функции  $|G(z(\theta))_{\text{RK}}|$  (см. рис. 2 для примера). В связи с гладкостью решения линеаризации будем рассматривать веса (68) в виде  $\omega_l = D_l$ , предполагая малость  $\Delta x$ . Используем уже полученные выражения (75), (77), (79) при условии  $\epsilon_l = 0$ . Тогда, приводя подобные и выражая тригонометрические функции через экспоненты, спектры операторов будут иметь вид:

$$\begin{aligned} z(\theta)_5 &= -1/3 + 1/2 \cos \theta - 1/5 \cos 2\theta + 1/30 \cos 3\theta + \\ &\quad + i(-3/2 \sin \theta + 3/10 \sin 2\theta - 1/30 \sin 3\theta), \\ z(\theta)_7 &= -1/4 + 2/5 \cos \theta - 1/5 \cos 2\theta + 2/35 \cos 3\theta - 1/140 \cos 4\theta + \\ &\quad + i(-8/5 \sin \theta + 2/5 \sin 2\theta - 8/105 \sin 3\theta + 1/140 \sin 4\theta), \\ z(\theta)_9 &= -1/5 + 1/3 \cos \theta - 4/21 \cos 2\theta + 1/14 \cos 3\theta - 1/63 \cos 4\theta + 1/630 \cos 5\theta + \\ &\quad + i(-5/3 \sin \theta + 10/21 \sin 2\theta - 5/42 \sin 3\theta + 5/252 \sin 4\theta - 1/630 \sin 5\theta), \\ z(\theta)_{11} &= -1/6 + 2/7 \cos \theta - 5/28 \cos 2\theta + 5/63 \cos 3\theta - \\ &\quad - 1/42 \cos 4\theta + 1/231 \cos 5\theta - 1/2772 \cos 6\theta + \\ &\quad + i(-12/7 \sin \theta + 15/28 \sin 2\theta - 10/63 \sin 3\theta + 1/28 \sin 4\theta - 2/385 \sin 5\theta + 1/2772 \sin 6\theta), \\ z(\theta)_{13} &= -(1/7) + 1/4 \cos \theta - 1/6 \cos 2\theta + 1/12 \cos 3\theta - \\ &\quad - 1/33 \cos 4\theta + 1/132 \cos 5\theta - 1/858 \cos 6\theta + 1/12012 \cos 7\theta + \\ &\quad + i(-7/4 \sin \theta + 7/12 \sin 2\theta - 7/36 \sin 3\theta + 7/132 \sin 4\theta - \\ &\quad - 7/660 \sin 5\theta + 7/5148 \sin 6\theta - 1/12012 \sin 7\theta). \end{aligned} \quad (87)$$

Заметим, что выражения (87) симметричны на  $\mathbb{C}^1$  относительно действительной оси. Поскольку  $\text{Im}(z(\theta) + z(-\theta)) = 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$ , следовательно, при каждом фиксированном  $\theta^*$

Рис. 2. График функции  $|G(z(\theta))_{\text{RK3}}$  для схемы WENO11 при  $C = 1.03$ 

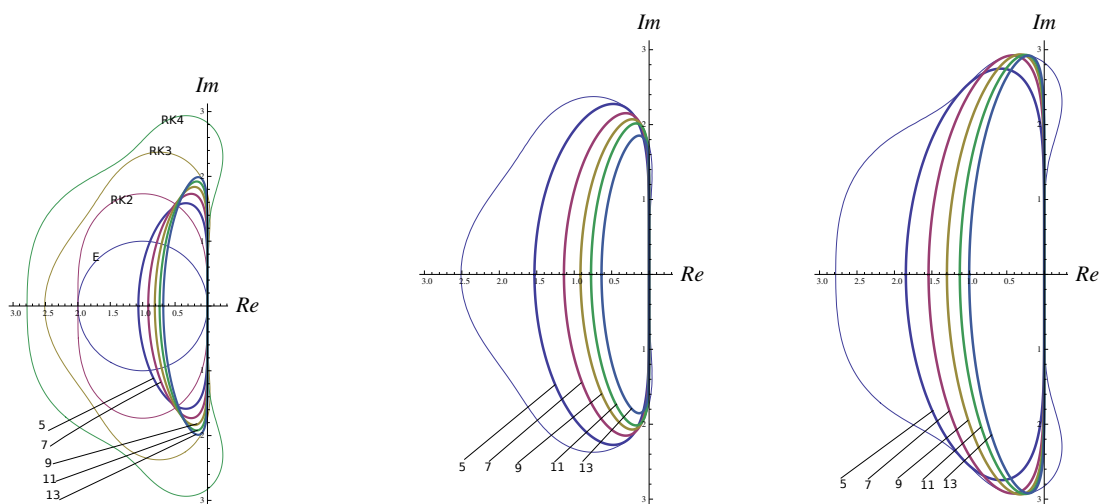
и  $-\theta^*$ , отличающихся знаком, но равных по абсолютному значению, имеем две точки, расположенные симметрично относительно действительной оси на  $\mathbb{C}^1$ . Более того, справедливо, что  $\text{Re}(z(\theta)_{\text{WENO}}) < 0 \forall \theta \in (0, \pi]$ . Рассмотрим действительную часть спектра. Нулевое значение достигается при  $\theta = 0$ , в чем можно убедиться прямой подстановкой. Из уравнения  $\frac{d\text{Re}(z(\theta)_{\text{WENO}})}{d\theta} = 0$  можно найти вторую точку экстремума —  $\theta = \pi$ , при этом  $\text{Im}(z(\theta)_{\text{WENO}}) = 0$ , т. е. эта точка — на действительной оси и она является точкой минимума для всех (87). Поскольку функция  $\text{Re}(z(\theta)_{\text{WENO}})$  непрерывна, монотонно убывает на участке  $[0, \pi]$ , то найденные значения — экстремумы функции и  $\text{Re}(z(0)_{\text{WENO}}) = 0$  — максимум. Убывание функций  $\text{Re}(z(\theta)_{\text{WENO}})$  на рассматриваемом полуинтервале можно доказать, рассмотрев полуинтервалы монотонности членов ряда Фурье со своими производными. Например, для  $\text{Re}(z(\theta)_{\text{WENO5}})$  будем иметь восемь полуинтервалов:  $(0; \pi] = (0; \pi/6] \cup (\pi/6; \pi/4] \cup (\pi/4; \pi/3] \cup (\pi/3; \pi/2] \cup (\pi/2; 2\pi/3] \cup (2\pi/3; 3\pi/4] \cup (3\pi/4; 5\pi/6] \cup (5\pi/6; \pi]$ . Пронумеруем каждый интервал от 1 до 8, начиная с крайнего от 0. На каждом из полуинтервалов функция монотонна, поскольку члены ряда монотонны (производная сохраняет знак). Далее рассмотрим значения в окрестностях предельных точек  $\theta_j$  полуинтервалов и убедимся, что выполняются неравенства: из  $\theta_j > \theta_{j+1}$  следует  $\text{Re}(z(\theta_j)_{\text{WENO5}}) < \text{Re}(z(\theta_{j+1})_{\text{WENO5}})$ , где  $j = 1, 2, \dots, 7$ . При некотором  $\theta < \theta_0$  функция  $|G(z)_{\text{RK}}$  стремится к 0, что видно и при разложении функции в ряд. Из доказанного в леммах 7 и 8 следует, что  $z(\theta) \in G(z)$  при  $\theta : z < A$ ,  $z \in \text{Im}$ , где  $A$  — крайнее положение  $z$  на мнимой оси такое, что  $A < L$ , где  $L$  — полудлина отрезка, доказанного в леммах 7 и 8. Из доказанного выше для  $\text{Re}(z)$  следует, что на самом деле строго  $A = 0$ , но поскольку мы используем пакет символьных вычислений для решения задачи (86), то введем некую малую величину  $\varepsilon$ , модуль которой больше предела точности вычислений, и найдем  $\theta_0 : \text{Re}(z(\theta_0)) > \varepsilon$ . Принимаем  $\varepsilon = -1 \cdot 10^{-15}$  и для каждой из анализируемых схем получим  $\theta_{0, \text{WENO5}} = 0.1155$ ,  $\theta_{0, \text{WENO7}} = 0.115206$ ,  $\theta_{0, \text{WENO9}} = 0.115145$ ,  $\theta_{0, \text{WENO11}} = 0.114845$ ,  $\theta_{0, \text{WENO13}} = 0.11238$ . Подставив полученные значения  $\theta_0$  в выражения для  $z(\theta)$  убеждаемся, что  $\text{Im}(z(\theta)) < L \forall \theta < \theta_0$ . Тогда найденные значения принимаются в качестве  $\theta_0$  в (86). Значение  $\theta_1$  можно взять в виде  $\theta_1 = \pi$ . Значения  $C_0 = 0$ , а  $C_1 = 2$  приняты интуитивно, поскольку  $C_0 = 0$  очевидно, а  $C_1 = 2$  — некое разумное ограничение на число CFL. Используем следующее выражение для Wolfram Mathematica:

Listing 1. Решение задачи (86) в Wolfram Mathematica, MaxFuncX — функция  $|G(z)|$  для схемы 'X'.  
`NMaximize[{MaxFuncX[C, theta], MaxFuncX[C, theta] <= 0, 1 < A < 2, 0.1155 < theta < Pi}, {C, theta}];`

Результаты применения указанного алгоритма сведены в таблицу 3 и показаны на рис. 3. Как можно заметить, все спектры лежат внутри или на границе соответствующих множеств устойчивости для RK3 и RK4.

Таблица 3. Максимальные значения  $C$  и точки  $\theta$ , где максимум достигается для различных схем WENO и RK для гладкого случая 1

	RK3		RK4	
	$C$	$\theta$	$C$	$\theta$
WENO5	1.43498	1.69465	1.73198	2.29965
WENO7	1.24377	1.76066	1.68920	2.11189
WENO9	1.12718	1.84474	1.59841	2.1004
WENO11	1.04932	1.9203	1.52568	2.13855
WENO13	0.931814	2.16283	1.46919	2.1797



Спектр операторов и  $D_{RK}$

Спектр операторов при  $C_{RK3}$

Спектр операторов при  $C_{RK4}$

Рис. 3. Множества  $D_{RK}$  и  $S p_{WENO}$  на  $\mathbb{C}^1$  для случая 1. Тонкие линии —  $D_{RK}$  для методов РК («E» — метод Эйлера, «RK2» — метод Рунге–Кутты 2-ого порядка, «RK3» — метод Рунге–Кутты 3-ого порядка, «RK4» — метод Рунге–Кутты 4-ого порядка). Толстые линии —  $S p$  схем WENO:  $S p_{WENO5}$  обозначена «5»,  $S p_{WENO7}$  обозначена «7»,  $S p_{WENO9}$  обозначена «9»,  $S p_{WENO11}$  обозначена «11»,  $S p_{WENO13}$  обозначена «13»

Рассмотрим **случай 2** для потока, который в литературе не рассматривается. Пусть решение (7) такое, что  $\delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta^e$  и  $\delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta^w$ , т. е. реализуется решение, направленное внутрь рассматриваемого конечного объема. Первый вариант — направление потоков внутрь. Реализуется, например, при возникновении в точке  $j$  решения типа ударной волны. Второй вариант данного случая — направление потоков вовне (7) при возникновении решения вида волны разряжения. При этом  $\delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta^e$  и  $\delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta^w$ . Гладкость (46) не нарушается при одинаковом уклоне решения относительно  $j$ . Наиболее неблагоприятным случаем является случай конфигурации потоков типа «ударной волны». При таком решении спектр вырождается в отрезок на мнимой оси. Действительно, подставив выражения спектров операторов в (7) для указанных конфигураций будем иметь:

$$\begin{aligned}
 z(\theta)_5 &= i(-5/3 \sin \theta + 13/30 \sin 2\theta - 1/15 \sin 3\theta), \\
 z(\theta)_7 &= i(-17/10 \sin \theta + 1/2 \sin 2\theta - 5/42 \sin 3\theta + 1/70 \sin 4\theta), \\
 z(\theta)_9 &= i(-26/15 \sin \theta + 58/105 \sin 2\theta - 17/105 \sin 3\theta + 41/1260 \sin 4\theta - 1/315 \sin 5\theta), \\
 z(\theta)_{11} &= i(-37/21 \sin \theta + 25/42 \sin 2\theta - 25/126 \sin 3\theta + \\
 &\quad 13/252 \sin 4\theta - 61/6930 \sin 5\theta + 1/1386 \sin 6\theta), \\
 z(\theta)_{13} &= i(-25/14 \sin \theta + 53/84 \sin 2\theta - 29/126 \sin 3\theta + \\
 &\quad 65/924 \sin 4\theta - 37/2310 \sin 5\theta + 85/36036 \sin 6\theta - 1/6006 \sin 7\theta).
 \end{aligned} \tag{88}$$

Определим длину данных отрезков. Для  $z(\theta)_5$  можно найти аналитически, воспользовавшись формулами двойного и тройного угла.

**Утверждение 2.** Для случая 2 схема WENO5 линейно устойчива при

$$C \leq \frac{810}{D} (754 - 27 \sqrt{779})^{2/3} \sqrt{\frac{3}{1 - \frac{1}{324} \left( -13 + \frac{55^{2/3}}{(754-27\sqrt{779})^{1/3}} + (5(754 - 27 \sqrt{779}))^{1/3} \right)^2}}, \quad (89)$$

для метода RK3 и

$$C \leq \frac{1620}{D} (754 - 27 \sqrt{779})^{2/3} \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{1}{324} \left( -13 + \frac{55^{2/3}}{(754-27\sqrt{779})^{1/3}} + (5(754 - 27 \sqrt{779}))^{1/3} \right)^2}}, \quad (90)$$

для метода RK4, где

$$D = 5 \cdot 5^{1/3} (3284 - 117 \sqrt{779}) + 935 (754 - 27 \sqrt{779})^{2/3} + 5^{2/3} (754 - 27 \sqrt{779})^{1/3} (611 - 18 \sqrt{779}).$$

*Доказательство.*

Значение нуля производной находится из выражения  $-12x^3 + 26x^2 - 16x - 13 = 0$ ,  $\cos \theta = x$ . Максимум/минимум достигается при  $x_0 = \frac{1}{18} (13 - \frac{5 \cdot 5^{2/3}}{(754-27\sqrt{779})^{1/3}} - (5(754 - 27 \sqrt{779}))^{1/3})$  (комплексно-сопряженные корни не имеют смысла). Выражение  $x_0$  приближенно равно  $x_0 \sim -0.437906$ . Воспользуемся равенством  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ , что справедливо, поскольку  $(-0.437906)^2 < 1$ , и выражениями для двойного и тройного угла. Значение в точке максимума/минимума:

$$Im(z(\theta_0)_5) = -1/15 \sqrt{1-x_0^2} (24 - 13x_0 + 4x_0^2), \quad (91)$$

где  $x_0$  — найденные значения точки, в которой достигаются экстремумы. Точное значение достаточно громоздкое. Для нас важно отношение  $C = L/Im(z(\theta_0)_5)$  (т.е. чтобы спектр оператора полностью содержался в  $D_{RK}$ ), где  $L$  — полудлина отрезка на мнимой оси из лемм 7 и 8. Отсюда получаются точные значения для схемы WENO5, указанные в утверждении, и устойчивость следует из теоремы 1.  $\square$

Для схемы WENO7 выражения получаются очень громоздкими, а для WENO9–WENO13 найти аналитически длину отрезка не удастся. Результаты численного анализа сведены в таблицу 4. Видно, что ограничения строже, чем для случая 1.

Таблица 4. Максимальные значения  $C$  и точки  $\theta$ , где достигается максимум для различных схем WENO и RK для гладкого случая 2

	RK3		RK4	
	$C$	$\theta$	$C$	$\theta$
WENO5	0.948757	2.02406	1.54931	2.02406
WENO7	0.914931	2.10616	1.49408	2.10616
WENO9	0.885006	2.16735	1.44521	2.16735
WENO11	0.860084	2.21633	1.40451	2.21633
WENO13	0.839385	2.25713	1.37071	2.25713

### Разрывное решение

Здесь предлагается численно локально рассмотреть эволюцию спектра операторов в ячейках конечных объемов, принимая  $\delta_{j+1/2}^{\pm} = \delta_{j+1/2}^{-}$  и  $\delta_{j-1/2}^{\pm} = \delta_{j-1/2}^{-}$ , т. е. перенос решения осуществляется слева направо. К сожалению, анализ устойчивости на разрывных решениях осложнен тем, что неясны значения линеаризации для коэффициентов гладкости (46) и, следовательно, весов линейной комбинации (38). Такой анализ не позволит установить критерий устойчивости на разрывном решении (хотя бы потому, что понятие спектра на разрывном решении не определено), но позволит проанализировать общие свойства схемы в локальных областях решений, имеющих решение с большим локальным градиентом.

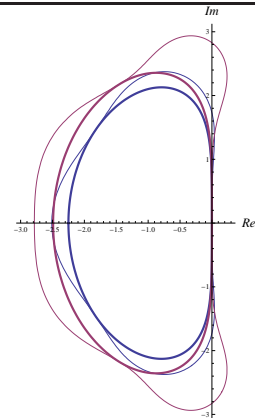
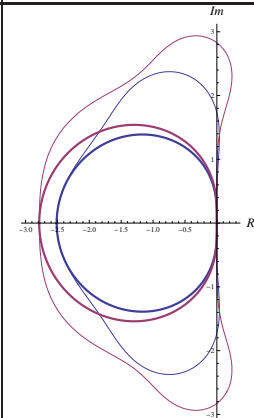
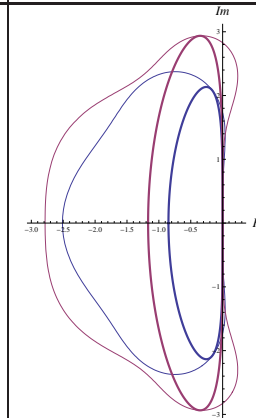
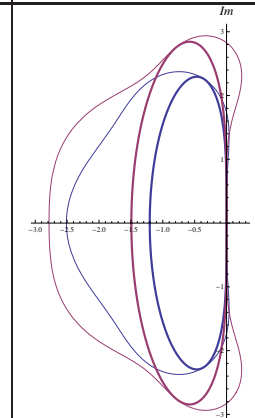
Будем рассматривать поведение схемы в окрестности решения типа «обратная ступень», т. е.

$$u(x) = 1 - H(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (92)$$

Сетка располагается так, чтобы элемент с номером  $j$  приходился на  $x = 0$ . Запишем все схемы WENO с нелинейными весами в окрестностях данного элемента. Заметим, что результаты для разрывного решения вида «прямая ступенька» ( $u(x) = H(x)$ ) зеркально симметричны относительно точки  $j$ . Для решения задачи построения спектра применяется Wolfram Mathematica. Пример программы для анализа спектра оператора WENO5 приведен в листинге 5. Известно, что в точке разрыва (т. е. на грани конечного объема) схема WENO любого порядка переходит в противоточную схему первого порядка [Yamaleev, Carpenter, 2008]. Данный процесс будет повторяться (т. е. разрыв будет «размазываться») до тех пор, пока разрыв не будет заменен полиномом, достаточно гладким, чтобы схема не переключалась на первый порядок, т. е. чтобы в большем шаблоне схемы  $S$  было минимум два шаблона с одной из сторон от грани конечного объема. В таком случае спектр схемы будет близок к спектру гладкого решения и «уширение» разрыва практически перестанет зависеть от времени. Рассмотрим масштабированные спектры в окрестности разрыва (без сглаживания), используя алгоритм, аналогичный анализу гладких решений.

Результаты расчета для схемы WENO5 приведены в таблице 5.

Таблица 5. Значения условия устойчивости  $C$ , точки аргтах волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO5 в окрестности разрывного решения. Разрыв приходится на элемент  $j$

	$j - 2$	$j - 1$	$j + 1$	$j + 2$
$C_{RK3}$	1.42333	0.573389	1.91166	1.59481
$\theta_{RK3}$	2.57904	2.95468	1.44295	1.6595
$C_{RK4}$	1.57534	0.635774	2.62988	1.97629
$\theta_{RK4}$	2.25596	$\pi$	1.68202	2.031
				



Как можно видеть, полученные значения постоянных  $C$  меньше, чем для случая гладких решений в точке  $j-1$ . Можно также отметить значение  $C = 0.573389$  в точке  $j-1$ , которое близко к эмпирическому значению числа CFL (0.5), которое принимается во многих работах (например, в [Spiteri, Ruuth, 2002]) с использованием схем WENO5. Из данной таблицы можно ожидать, что в центральном элементе  $j$  произойдет переход на схему первого порядка, тогда как в окрестности элемента  $j$  схема будет обладать порядком не меньше  $k$ . Более того, для схемы WENO5 не ожидается эффекта Гиббса около разрывного решения при соблюдении указанных критериев устойчивости, т. к. весь спектр  $z(\theta)$  лежит в левой полуплоскости. С течением времени разрыв, заданный в элементе  $j$ , будет размываться благодаря численной диффузии, пока не перейдет в градиент, на котором будет переключен гладкий шаблон, хотя бы с одной стороны. После этого схема будет работать аналогично гладкому участку решения.

Таблица 6. Значения условия устойчивости  $C$ , точки argmax волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO7 в окрестности разрывного решения. Разрыв приходится на элемент  $j$ . Жирные  $\theta$  – отрезок, для которого спектр лежит в правой полуплоскости

	$j-2$	$j-1$	$j+1$	$j+2$
$C_{RK3}$	1.02482	0.3588728	1.428451	1.3901527
$\theta_{RK3}$	2.67575	<b>[0.99854;1.34054]</b>	2.54292	1.78076
$C_{RK4}$	1.195816	0.39936194	1.58811332	2.031811
$\theta_{RK4}$	$\pi$	<b>[1.0127837;1.3665837]</b>	2.20063	1.8343

Спектры операторов схем WENO7–WENO11 около элемента, содержащего разрыв, показаны в таблицах 6, 7, 8, а для схемы WENO13 – в таблицах 9 и 10. Особенностью данных схем является наличие неустойчивой части спектра в окрестности разрыва, причем достаточно протяженного по волновому числу. Поскольку схемы WENO нелинейны, это указывает на локальную потерю устойчивости этих схем с развитием эффекта Гиббса в окрестности разрыва, но не на глобальную потерю устойчивости. Как и ожидалось, наиболее протяженная по пространству область неустойчивости принадлежит схеме WENO13, занимая четыре элемента, кроме центрального. В неустойчивом спектре преобладают средне- и коротковолновые моды, распространяющиеся на 2-3 элемента ( $2\pi/\theta$ ). Амплитуда спектра для схемы WENO7 не превышает  $1/700$ , следовательно, можно ожидать незначительного по амплитуде эффекта Гиббса на данной схеме. По области спектра наиболее «зашумленной» является схема WENO13.

Рассмотрим следующую функцию:

$$u(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-Kx}}, \tag{93}$$

Таблица 7. Значения условия устойчивости  $C$ , точки аргтах волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO9 в окрестности разрывного решения. Разрыв приходится на элемент  $j$ . Жирные  $\theta$  — отрезок, для которого спектр лежит в правой полуплоскости

	$j-2$	$j-1$	$j+1$	$j+2$
$C_{RK3}$	0.708592	0.226734	0.852846	1.24311
$\theta_{RK3}$	2.77853	<b>[1.339651;1.906502]</b>	2.70686	1.82616
$C_{RK4}$	0.803778	0.254132	0.979201	1.75768
$\theta_{RK4}$	$\pi$	<b>[1.239677;1.810518]</b>	$\pi$	1.96732

Таблица 8. Значения условия устойчивости  $C$ , точки аргтах волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO11 в окрестности разрывного решения. Разрыв приходится на элемент  $j$ . Жирные  $\theta$  — отрезок, для которого спектр лежит в правой полуплоскости

	$j-2$	$j-1$	$j+1$	$j+2$
$C_{RK3}$	0.492035	0.141828	0.558401	1.34547
$\theta_{RK3}$	<b>[2.10232;2.21021]</b>	<b>[1.740101;2.228196]</b>	<b>[1.98322;2.17231]</b>	1.8453
$C_{RK4}$	0.553179	0.159975	0.629484	1.43382
$\theta_{RK4}$	<b>[2.10522;2.20917]</b>	<b>[1.743207;2.22589]</b>	<b>[1.99021;2.13661]</b>	2.38671

которая заменяет разрывное решение (92) на гладкое. Для каждой схемы подберем такие  $K$  и  $C$ , при которых спектр схем WENO такой, что  $z_{WENO} \subset D_{RK}$ . На рис. 4 показан результат решения данной задачи при  $0.1 \leq C \leq 1.0$  и численные значения сведены в таблицу 11. Как видно, меньше всего разрыв «размывается» схемой WENO11, которая для этого требует четыре точки. Схема

Таблица 9. Значения условия устойчивости  $C$ , точки  $\arg$ мак волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO13 в окрестности разрывного решения. Спектры в элементах слева от  $j$ . Жирные  $\theta$  — отрезок, для которого спектр лежит в правой полуплоскости

	$j - 3$	$j - 2$	$j - 1$
$C_{RK3}$	0.772965	0.342469	0.08703
$\theta_{RK3}$	2.8004	<b>[0.5110;1.9025]</b>	<b>[1.21023; 2.41832]</b>
$C_{RK4}$	0.8972931	0.3845825	0.098914
$\theta_{RK4}$	$\pi$	<b>[0.4275;1.9221]</b>	<b>[1.20851; 2.41176]</b>

Таблица 10. Значения условия устойчивости  $C$ , точки  $\arg$ мак волнового числа  $\theta$  и масштабированные спектры оператора схемы WENO13 в окрестности разрывного решения. Спектры в элементах справа от  $j$ . Жирные  $\theta$  — отрезок, для которого спектр лежит в правой полуплоскости

	$j + 1$	$j + 2$	$j + 3$
$C_{RK3}$	0.377907	0.913072	1.066123
$\theta_{RK3}$	<b>[0.51284;1.799621]</b>	<b>[2.01342;2.11711]</b>	2.00471
$C_{RK4}$	0.42456148	1.061692	1.592625
$\theta_{RK4}$	<b>[0.49134;1.67812]</b>	<b>[1.9982;2.06081]</b>	2.07717

WENO13 — шесть точек. Это обусловлено худшими свойствами устойчивости схемы. Схема WENO9 требует уже 7 точек, WENO7 — 9 точек, а схема WENO5 — 12 точек.

Такой анализ нельзя назвать точным, он дает общую наглядную оценку поведения в окрестности разрывного решения для нелинейных схем WENO.

Таблица 11. Коэффициенты  $C$  и  $K$  при аппроксимации разрыва гладкой функцией

	$C$	$K$
WENO5	0.95	0.866
WENO7	0.81	1.14
WENO9	0.7	1.41
WENO11	0.64	1.969
WENO13	0.34	1.504

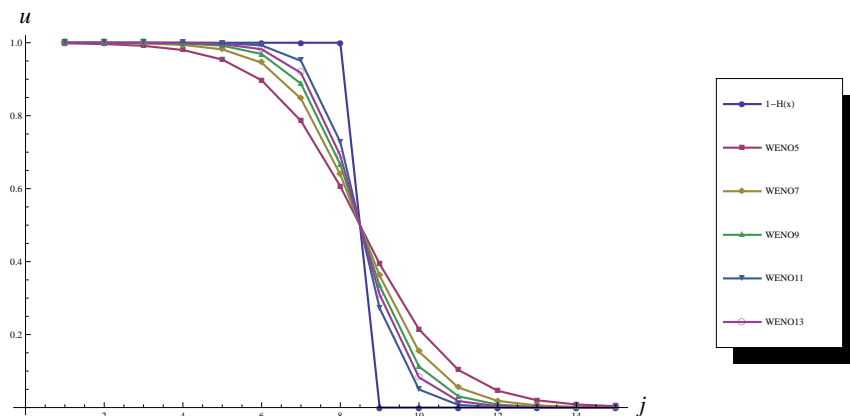


Рис. 4. Замена разрыва гладкой функцией, при которой схема линейная устойчива в каждой точке

## Вывод

В данной работе построены условия сохранения порядка аппроксимации на немонотонных решениях для схем WENO (впервые для схем WENO9–WENO13). Построение схем сведено в алгоритм 1, которым можно воспользоваться для создания схем высокого порядка.

Полученные оценки линейной устойчивости схем говорят о следующем. Для гладких решений без наличия больших градиентов коэффициент  $C$  может быть выбран по таблице 3 или точно для схемы WENO5 из доказанных утверждений. Данная оценка для схемы WENO5 совпадает с приближенной оценкой, полученной в работе [Wang, Spiteri, 2007] (хотя в указанной работе точное значение  $C$  не приводится). При наличии сильных градиентов в решениях, даже при всюду гладком решении, рекомендуется пользоваться коэффициентами из таблицы 4. При наличии в задаче решений типа ударных волн или скачков уплотнения, рекомендуется пользоваться оценками для спектров из таблиц 5, 6, 7, 8, а для схемы WENO13 — из таблиц 9 и 10. Желательно выбирать наименьший из коэффициентов  $C$  для соответствующего метода RK, что гарантирует минимальную часть спектра вне областей линейной устойчивости. Это уменьшит эффект Гиббса.

Важно отметить, что критическими в смысле линейной устойчивости являются именно значения, приведенные в таблице 3. Нарушение остальных условий устойчивости не приводит к «развалу» схем в классическом смысле. В этом случае схема становится более диссипативной, поскольку локальные неустойчивости гасятся нелинейным механизмом схемы. Это будет подтверждено численными примерами во второй части работы.

При выполнении критериев устойчивости можно воспользоваться теоремой 6.1 из [Jiang, Shu, 1996, с. 211]. Это доказывает сходимость всех рассмотренных схем WENO любого поряд-

ка к решению задачи Коши для уравнений (1), где для разрывного решения подразумевается сходимость в слабом.

## Приложение

Listing 2. Вычисление  $\beta_l$  и постоянных  $C_{l,s}$  для любого порядка полиномов в Wolfram Mathematica

```
dataTan = Table[DX**xx, {xx, -10, 10}];
(*Parameters to be set:*)
J = 11; (*Middle of cells for table*)
k = 3; (*Polynomial degree*)
l = 1; (*shift for marker function*)
Pml[x_] =
  Expand[Sum[
    Sum[DX*U[
      J - 1 + q]*(Sum[
        If[s != m,
          Product[If[g != m,
            If[g != s, (x - Part[dataTan, J - 1 + g]), 1], 1], {g, 0,
              k}], 0], {s, 0, k}]/(Product[
            If[g != m, (Part[dataTan, J - 1 + m]
              Part[dataTan, J - 1 + g]), 1], {g, 0, k}]]), {q, 0,
          m - 1}], {m, 0, k}]]; (*Resulting Polynomial*)

(*Resulting \beta_l:*)
FullSimplify[
  Sum[Integrate[(D[Pml[x], {x, q}])^2, {x, DX,
    0})*(DX)^(2*q - 1), {q, 1, k - 1}]]

(*c_{l,s} s with shift of DX:*)
Pml[DX]
```

Listing 3. Вычисление коэффициентов конечно-разностной аппроксимации для  $\beta_l$  в Wolfram Mathematica

```
jmin = 6; jmax = 0; derivative = 1;
A = Table[
  If[(j == 0) && (n == 0), 1, j^n], {n, 0, jmax - jmin}, {j, jmin,
  jmax}];
b = Table[If[(derivative == j), 1, 0], {j, 0, jmax - jmin}];
a = LinearSolve[A, b];
MatrixForm (* a[0]=a[jmin], a[1]=a[jmin+1], ... *)
Sum[
  a[[q - jmin + 1]] U[J + q - 1], {q, jmin, jmax}
```

Listing 4. Вычисление постоянных  $C(x)_k = d_{0,k}$  для любого порядка полиномов в Wolfram Mathematica

```
Nsk = 3; (* Order of the Sk polynomial *)

Ns = 2*Nsk - 1; (* Order of the smooth WENO scheme *)

Sk = Table[(-Nsk + k + n - 1 + j)*DX, {k, 1, Nsk}, {n, 1, Nsk + 1}];
S = Flatten[Sk];
Complement[S, Sk[[3]]];
mat1 = Table[
  Product[(x - Complement[S, Sk[[s]]][[1]]), {1, 1, Nsk - 1}], {s, 1,
  Nsk}];
j = 0;
Ones = Table[1, {i, 1, Nsk}];
mat = Table[
```

```

Product[((-Nsk + k)*DX - Complement[S, Sk[[s]]][[1]]), {1, 1,
  Nsk - 1}], {k, 1, Nsk}, {s, 1, Nsk}];
A = LowerTriangularize[mat, 0] ;
iA = Inverse;
a = iA.Ones;
a // MatrixForm (* Coefficients a_k *)
xRef = DX; (* Place to calc C \
(x)_k *)
CK =
Table[a[[k]] Product[(xRef - Complement[S, Sk[[k]]][[1]]), {1, 1,
  Nsk - 1}], {k, 1, Nsk}];
CK (* Calculated wights C (x)_k *)
(* Check consistency*)
Sum[
  CK[[1]], {1, 1, Nsk}]
j =.
CKx =
Table[mat1[[k]] a[[k]], {k, 1,
  Nsk}]; (* From CKx as functon of 'x' *)
CKx

```

Listing 5. Численный анализ спектра оператора схемы WENO5 в окрестности точки разрыва в Wolfram Mathematica

```

(* Set up local solutions *)
Nmax = 20;
dataTan = Table[1, {xx, Nmax, Nmax}];
J = Nmax;
dataTan[[J ;; 2 Nmax + 1]] = 0.0;
ListPlot[dataTan]
J = 20; (* Center element *)
Sp50[x_, m_, g_] := 1/3 Exp[(2 g + m) I x] 7/6 Exp[(1 g + m) I x] + 11/6
Exp[(0 g + m) I x];
Sp51[x_, m_, g_] := 1/6 Exp[(1 g + m) I x] + 5/6 Exp[(0 g + m) I x] + 1/3
Exp[(1 g + m) I x];
Sp52[x_, m_, g_] := 1/3 Exp[(0 g + m) I x] + 5/6 Exp[(1 g + m) I x] 1/6
Exp[(2 g + m) I x];

f1[m_, g_] := dataTan[[J 2 g + m]];
f2[m_, g_] := dataTan[[J 1 g + m]];
f3[m_, g_] := dataTan[[J 0 g + m]];
f4[m_, g_] := dataTan[[J + 1 g + m]];
f5[m_, g_] := dataTan[[J + 2 g + m]];

g50[m_, g_] := 1/3 f1[m, g] 7/6 f2[m, g] + 11/6 f3[m, g];
g51[m_, g_] := 1/6 f2[m, g] + 5/6 f3[m, g] + 1/3 f4[m, g];
g52[m_, g_] := 1/3 f3[m, g] + 5/6 f4[m, g] 1/6 f5[m, g];

beta50[m_, g_] := 13/12 (f1[m, g] 2 f2[m, g] + f3[m, g]) (f1[m, g] 2 f2[m, g] + f3[m, g]) +
1/4 (f1[m, g] 4 f2[m, g] + 3 f3[m, g]) (f1[m, g] 4 f2[m, g] + 3 f3[m, g]);
beta51[m_, g_] := 13/12 (f2[m, g] 2 f3[m, g] + f4[m, g]) (f2[m, g] 2 f3[m, g] + f4[m, g]) +
1/4 (f2[m, g] f4[m, g]) (f2[m, g] f4[m, g]);
beta52[m_, g_] := 13/12 (f3[m, g] 2 f4[m, g] + f5[m, g]) (f3[m, g] 2 f4[m, g] + f5[m, g]) +
1/4 (3 f3[m, g] 4 f4[m, g] + f5[m, g]) (3 f3[m, g] 4 f4[m, g] + f5[m, g]);
D50 = 1/10;
D51 = 3/5;
D52 = 3/10;
eps = 1/1000000;
Alpha50[m_, g_] := D50/(beta50[m, g] + eps)^2;
Alpha51[m_, g_] := D51/(beta51[m, g] + eps)^2;

```

```

Alpha52[m_, g_] := D52/(beta52[m, g] + eps)^2;
SumAlpha[m_, g_] := (Alpha52[m, g] + Alpha51[m, g] + Alpha50[m, g]);
W50[m_, g_] := Alpha50[m, g]/SumAlpha[m, g];
W51[m_, g_] := Alpha51[m, g]/SumAlpha[m, g];
W52[m_, g_] := Alpha52[m, g]/SumAlpha[m, g];

WENO5Sp[x_, m_, g_] := W50[m, g] Sp50[x, m, g] + W51[m, g] Sp51[x, m, g] +
W52[m, g] Sp52[x, m, g];

```

```

NumberForm[{"W:", W50[1, 1], W51[1, 1], W52[1, 1], "E:", W50[0, 1],
W51[0, 1], W52[0, 1]},
NumberFormat > (Row[{#1, "e", #3}] &)]
UEp[x_] := WENO5Sp[x, 1, 1];
UEm[x_] := WENO5Sp[x, 0, 1];
UWp[x_] := WENO5Sp[x, 0, 1];
UWm[x_] := WENO5Sp[x, 1, 1];
Spec[x_] := (UEm[x] UWm[x]);
SpecRe[x_] := Re[Spec[x]];
SpecIm[x_] := Im[Spec[x]];
ParametricPlot[{SpecRe[Theta], SpecIm[Theta]}, {Theta, Pi, Pi},
PlotStyle > Thickness[0.01], AspectRatio > Automatic]

```

### Явные выражения $\beta_l^X$ для схем WENOX

$$\begin{aligned}
\beta_0^5 &= 1/3(4U[j-2]^2 + 25U[j-1]^2 - 31U[j-1]U[j] + 10U[j]^2 + U[j-2](-19U[j-1] + 11U[j])); \\
\beta_1^5 &= 1/3(4U[j-1]^2 + 13U[j]^2 - 13U[j]U[j+1] + 4U[j+1]^2 + U[j-1](-13U[j] + 5U[j+1])); \\
\beta_2^5 &= 1/3(10U[j]^2 + 25U[j+1]^2 - 19U[j+1]U[j+2] + 4U[j+2]^2 + U[j](-31U[j+1] + 11U[j+2]));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0^7 &= 1/240(547U[j-3]^2 + 7043U[j-2]^2 + 11003U[j-1]^2 - 9402U[j-1]U[j] + 2107U[j]^2 - 2U[j-3](1941U[j-2] - \\
&- 2321U[j-1] + 927U[j]) + U[j-2](-17246U[j-1] + 7042U[j])); \\
\beta_1^7 &= 1/240(267U[j-2]^2 + 2843U[j-1]^2 + 3443U[j]^2 - 2522U[j]U[j+1] + 547U[j+1]^2 - 2U[j-2](821U[j-1] - \\
&- 801U[j] + 247U[j+1]) + U[j-1](-5966U[j] + 1922U[j+1])); \\
\beta_2^7 &= 1/240(547U[j-1]^2 + 3443U[j]^2 + 2843U[j+1]^2 - 1642U[j+1]U[j+2] + 267U[j+2]^2 - 2U[j-1](1261U[j] - \\
&- 961U[j+1] + 247U[j+2]) + U[j](-5966U[j+1] + 1602U[j+2])); \\
\beta_3^7 &= 1/240(2107U[j]^2 + 11003U[j+1]^2 + 7043U[j+2]^2 - 3882U[j+2]U[j+3] + 547U[j+3]^2 - 2U[j](4701U[j+1] - \\
&- 3521U[j+2] + 927U[j+3]) + U[j+1](-17246U[j+2] + 4642U[j+3]));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0^9 &= (1/5040)(22658U[j-4]^2 + 482963U[j-3]^2 + 1521393U[j-2]^2 - 2462076U[j-2]U[j-1] + 1020563U[j-1]^2 + U[j- \\
&- 3](-1704396U[j-2] + 1358458U[j-1] - 411487U[j]) + 758823U[j-2]U[j] - 649501U[j-1]U[j] + 107918U[j]^2 + \\
&+ U[j-4](-208501U[j-3] + 364863U[j-2] - 288007U[j-1] + 86329U[j])); \\
\beta_1^9 &= (1/5040)(6908U[j-3]^2 + 138563U[j-2]^2 + 406293U[j-1]^2 - 611976U[j-1]U[j] + 242723U[j]^2 + U[j-2] \times \\
&\times (-464976U[j-1] + 337018U[j] - 88297U[j+1]) + 165153U[j-1]U[j+1] - 140251U[j]U[j+1] + 22658U[j+1]^2 + \\
&+ U[j-3](-60871U[j-2] + 99213U[j-1] - 70237U[j] + 18079U[j+1])); \\
\beta_2^9 &= (1/5040)(6908U[j-2]^2 + 104963U[j-1]^2 + 231153U[j]^2 - 299076U[j]U[j+1] + 104963U[j+1]^2 + U[j-1] \times \\
&\times (-299076U[j] + 179098U[j+1] - 38947U[j+2]) + 67923U[j]U[j+2] - 51001U[j+1]U[j+2] + 6908U[j+2]^2 + U[j- \\
&- 2](-51001U[j-1] + 67923U[j] - 38947U[j+1] + 8209U[j+2])); \\
\beta_3^9 &= (1/5040)(22658U[j-1]^2 + 242723U[j]^2 + 406293U[j+1]^2 - 464976U[j+1]U[j+2] + 138563U[j+2]^2 + U[j] \times \\
&\times (-611976U[j+1] + 337018U[j+2] - 70237U[j+3]) + 99213U[j+1]U[j+3] - 60871U[j+2]U[j+3] + 6908U[j+ \\
&+ 3]^2 + U[j-1](-140251U[j] + 165153U[j+1] - 88297U[j+2] + 18079U[j+3])); \\
\beta_4^9 &= (1/5040)(107918U[j]^2 + 1020563U[j+1]^2 + 1521393U[j+2]^2 - 1704396U[j+2]U[j+3] + 482963U[j+3]^2 + U[j+ \\
&+ 1](-2462076U[j+2] + 1358458U[j+3] - 288007U[j+4] + 364863U[j+2]U[j+4] - 208501U[j+3]U[j+4] + \\
&+ 22658U[j+4]^2 + U[j](-649501U[j+1] + 758823U[j+2] - 411487U[j+3] + 86329U[j+4]));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0^{11} &= (1/120960)(1152561U[j-5]^2 + 36480687U[j-4]^2 + 190757572U[j-3]^2 - 444003904U[j-3]U[j-2] + 260445372U[j- \\
&- 2]^2 + 262901672U[j-3]U[j-1] - 311771244U[j-2]U[j-1] + 94851237U[j-1]^2 - 2U[j-4](83230522U[j-3] - \\
&- 96298236U[j-2] + 56603394U[j-1] - 13530085U[j]) - 63394124U[j-3]U[j] + 76206736U[j-2]U[j] - 47460464U[j- \\
&- 1]U[j] + 6150211U[j]^2 - 2U[j-5](6475092U[j-4] - 14721128U[j-3] + 16959402U[j-2] - 9917175U[j-1] + 2356370U[j])); \\
\beta_1^{11} &= (1/120960)(271779U[j-4]^2 + 8449957U[j-3]^2 + 43093692U[j-2]^2 - 97838784U[j-2]U[j-1] + 56662212U[j- \\
&- 1]^2 + 55053752U[j-2]U[j] - 65224244U[j-1]U[j] + 19365967U[j]^2 + U[j-4](-3015728U[j-3] + 6694608U[j-2] - \\
&- 7408908U[j-1] + 4067018U[j] - 880548U[j+1]) - 12183636U[j-2]U[j+1] + 14742480U[j-1]U[j+1] - 9117992U[j]U[j+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1] + 1152561U[j+1]^2 + U[j-3](-37913324U[j-2] + 42405032U[j-1] - 23510468U[j] + 5134574U[j+1])); \\
\beta_2^{11} & = (1/120960)(139633U[j-3]^2 + 3824847U[j-2]^2 + 17195652U[j-1]^2 - 35817664U[j-1]U[j] + 19510972U[j]^2 + \\
& + 17905032U[j-1]U[j+1] - 20427884U[j]U[j+1] + 5653317U[j+1]^2 - 2U[j-2](7940202U[j-1] - 7964956U[j] + \\
& + 3863994U[j+1] - 729381U[j+2]) - 3462252U[j-1]U[j+2] + 4086352U[j]U[j+2] - 2380800U[j+1]U[j+2] + \\
& + 271779U[j+2]^2 - 2U[j-3](714988U[j-2] - 1431992U[j-1] + 1396330U[j] - 662503U[j+1] + 122810U[j+2])); \\
\beta_3^{11} & = (1/120960)(271779U[j-2]^2 + 5653317U[j-1]^2 + 19510972U[j]^2 - 35817664U[j]U[j+1] + 17195652U[j+1]^2 + \\
& + 15929912U[j]U[j+2] - 15880404U[j+1]U[j+2] + 3824847U[j+2]^2 - 2U[j-1](10213942U[j] - 8952516U[j+1] + \\
& + 3863994U[j+2] - 662503U[j+3]) - 2792660U[j]U[j+3] + 2863984U[j+1]U[j+3] - 1429976U[j+2]U[j+3] + \\
& + 139633U[j+3]^2 - 2U[j-2](1190400U[j-1] - 2043176U[j] + 1731126U[j+1] - 729381U[j+2] + 122810U[j+3])); \\
\beta_4^{11} & = (1/120960)(1152561U[j-1]^2 + 19365967U[j]^2 + 56662212U[j+1]^2 - 97838784U[j+1]U[j+2] + 43093692U[j+ \\
& + 2]^2 + 42405032U[j+1]U[j+3] - 37913324U[j+2]U[j+3] + 8449957U[j+3]^2 - 7408908U[j+1]U[j+4] + 6694608U[j+ \\
& + 2]U[j+4] - 3015728U[j+3]U[j+4] + 271779U[j+4]^2 - 2U[j-1](4558996U[j] - 7371240U[j+1] + 6091818U[j+2] - \\
& - 2567287U[j+3] + 440274U[j+4]) + U[j](-65224244U[j+1] + 55053752U[j+2] - 23510468U[j+3] + 4067018U[j+4])); \\
\beta_5^{11} & = (1/120960)(6150211U[j]^2 + 94851237U[j+1]^2 + 260445372U[j+2]^2 - 444003904U[j+2]U[j+3] + 190757572U[j+3]^2 + \\
& + 192596472U[j+2]U[j+4] - 166461044U[j+3]U[j+4] + 36480687U[j+4]^2 - 2U[j+1](155885622U[j+2] - 131450836U[j+ \\
& + 3] + 56603394U[j+4] - 9917175U[j+5]) + U[j](-47460464U[j+1] + 76206736U[j+2] - 63394124U[j+3] + 27060170U[j+ \\
& + 4] - 4712740U[j+5]) - 33918804U[j+2]U[j+5] + 29442256U[j+3]U[j+5] - 12950184U[j+4]U[j+5] + 1152561U[j+5]^2); \\
\beta_0^{13} & = (1/59875200)(1258225940U[j-6]^2 + 5529443084U[j-5]^2 + 431418789360U[j-4]^2 - 1301580166020U[j-4]U[j- \\
& - 3] + 985137198380U[j-3]^2 + 1119254208255U[j-4]U[j-2] - 1701893556420U[j-3]U[j-2] + 739478564460U[j-2]^2 - \\
& - 521329653333U[j-4]U[j-1] + 797280592452U[j-3]U[j-1] - 698497961463U[j-2]U[j-1] + 166930543737U[j- \\
& - 1]^2 + 102951716988U[j-4]U[j] - 158581758572U[j-3]U[j] + 140425750893U[j-2]U[j] - 68289277071U[j-1]U[j] + \\
& + 7177657304U[j]^2 + U[j-6](-16670007831U[j-5] + 46430779053U[j-4] - 69700128812U[j-3] + 59577262788U[j-2] - \\
& - 27545885877U[j-1] + 5391528799U[j]) - 3U[j-5](102854821221U[j-4] - 154733540204U[j-3] + 132607610991U[j- \\
& - 2] - 61507032606U[j-1] + 12084425215U[j]); \\
\beta_1^{13} & = (1/59875200)(257447084U[j-5]^2 + 11250068787U[j-4]^2 + 86959466460U[j-3]^2 - 259838403420U[j-3]U[j- \\
& - 2] + 195601143380U[j-2]^2 + 219064013505U[j-3]U[j-1] - 332861569020U[j-2]U[j-1] + 143344579860U[j- \\
& - 1]^2 - 98508059523U[j-3]U[j] + 151212114012U[j-2]U[j] - 132164397513U[j-1]U[j] + 31090026771U[j]^2 + \\
& + 18375686988U[j-3]U[j+1] - 28498553012U[j-2]U[j+1] + 25299603603U[j-1]U[j+1] - 12223634361U[j]U[j+1] + \\
& + 1258225940U[j+1]^2 - 9U[j-4](6932480657U[j-3] - 10294061628U[j-2] + 8619440987U[j-1] - 3848065022U[j] + \\
& + 712745603U[j+1]) + U[j-5](-3397272201U[j-4] + 9380155443U[j-3] - 13862429972U[j-2] + 11548158588U[j- \\
& - 1] - 5128661355U[j] + 945155329U[j+1]); \\
\beta_2^{13} & = (1/59875200)(84070496U[j-4]^2 + 3510366201U[j-3]^2 + 25788772260U[j-2]^2 - 74236325220U[j-2]U[j-1] + \\
& + 54531707180U[j-1]^2 + 59045150655U[j-2]U[j] - 88597133220U[j-1]U[j] + 36922302360U[j]^2 - 24530177853U[j- \\
& - 2]U[j+1] + 37531128132U[j-1]U[j+1] - 32164185663U[j]U[j+1] + 7257045753U[j+1]^2 + 4158865908U[j-2]U[j+ \\
& + 2] - 6473137292U[j-1]U[j+2] + 5684116173U[j]U[j+2] - 2659103847U[j+1]U[j+2] + 257447084U[j+2]^2 + U[j-4](- \\
& - 1077964287U[j-3] + 2854088973U[j-2] - 3982402892U[j-1] + 3078682188U[j] - 1247531949U[j+1] + 206986975U[j+ \\
& + 2]) - 3U[j-3](6289715661U[j-2] - 8898152044U[j-1] + 6963744951U[j] - 2851926558U[j+1] + 477540695U[j+2])); \\
\beta_3^{13} & = (1/59875200)(84070496U[j-3]^2 + 2927992563U[j-2]^2 + 18133963560U[j-1]^2 - 47431870620U[j-1]U[j] + \\
& + 32154783380U[j]^2 + 33820678305U[j-1]U[j+1] - 47431870620U[j]U[j+1] + 18133963560U[j+1]^2 - 12546315963U[j- \\
& - 1]U[j+2] + 18083339772U[j]U[j+2] - 14296379553U[j+1]U[j+2] + 2927992563U[j+2]^2 + 1902531828U[j-1]U[j+ \\
& + 3] - 2806252532U[j]U[j+3] + 2283428883U[j+1]U[j+3] - 969999969U[j+2]U[j+3] + 84070496U[j+3]^2 + U[j-3] \times \\
& \times (-969999969U[j-2] + 2283428883U[j-1] - 2806252532U[j] + 1902531828U[j+1] - 676871859U[j+2] + 99022657U[j+ \\
& + 3]) - 3U[j-2](4765459851U[j-1] - 6027779924U[j] + 4182105321U[j+1] - 1516747482U[j+2] + 225623953U[j+3])); \\
\beta_4^{13} & = (1/59875200)(257447084U[j-2]^2 + 7257045753U[j-1]^2 + 36922302360U[j]^2 - 88597133220U[j]U[j+1] + \\
& + 54531707180U[j+1]^2 + 59045150655U[j]U[j+2] - 74236325220U[j+1]U[j+2] + 25788772260U[j+2]^2 - \\
& - 20891234853U[j]U[j+3] + 26694456132U[j+1]U[j+3] - 18869146983U[j+2]U[j+3] + 3510366201U[j+3]^2 + \\
& + 3078682188U[j]U[j+4] - 3982402892U[j+1]U[j+4] + 2854088973U[j+2]U[j+4] - 1077964287U[j+3]U[j+4] + \\
& + 84070496U[j+4]^2 - 9U[j-1](3573798407U[j] - 4170125348U[j+1] + 2725575317U[j+2] - 950642186U[j+3] + \\
& + 138614661U[j+4]) + U[j-2](-2659103847U[j-1] + 5684116173U[j] - 6473137292U[j+1] + 4158865908U[j+2] - \\
& - 1432622085U[j+3] + 206986975U[j+4]); \\
\beta_5^{13} & = (1/59875200)(1258225940U[j-1]^2 + 31090026771U[j]^2 + 143344579860U[j+1]^2 - 332861569020U[j+1]U[j+ \\
& + 2] + 195601143380U[j+2]^2 + 219064013505U[j+1]U[j+3] - 259838403420U[j+2]U[j+3] + 86959466460U[j+3]^2 - \\
& - 77574968883U[j+1]U[j+4] + 92646554652U[j+2]U[j+4] - 62392325913U[j+3]U[j+4] + 11250068787U[j+4]^2 + \\
& + 11548158588U[j+1]U[j+5] - 13862429972U[j+2]U[j+5] + 9380155443U[j+3]U[j+5] - 3397272201U[j+4]U[j+ \\
& + 5] + 257447084U[j+5]^2 + U[j-1](-12223634361U[j] + 25299603603U[j+1] - 28498553012U[j+2] + 18375686988U[j+ \\
& + 3] - 6414710427U[j+4] + 945155329U[j+5]) - 3U[j](44054799171U[j+1] - 50404038004U[j+2] + 32836019841U[j+ \\
& + 3] - 11544195066U[j+4] + 1709553785U[j+5]); \\
\beta_6^{13} & = (1/59875200)(7177657304U[j]^2 + 166930543737U[j+1]^2 + 739478564460U[j+2]^2 - 1701893556420U[j+2]U[j+ \\
& + 3] + 985137198380U[j+3]^2 + 1119254208255U[j+2]U[j+4] - 1301580166020U[j+3]U[j+4] + 431418789360U[j+
\end{aligned}$$



$$+4]^2 - 397822832973U[j+2]U[j+5] + 464200620612U[j+3]U[j+5] - 308564463663U[j+4]U[j+5] + 55294430841U[j+5]^2 + 59577262788U[j+2]U[j+6] - 69700128812U[j+3]U[j+6] + 46430779053U[j+4]U[j+6] - 16670007831U[j+5]U[j+6] + 1258225940U[j+6]^2 + U[j](-68289277071U[j+1] + 140425750893U[j+2] - 158581758572U[j+3] + 102951716988U[j+4] - 36253275645U[j+5] + 5391528799U[j+6]) - 3U[j+1](232832653821U[j+2] - 265760197484U[j+3] + 173776551111U[j+4] - 61507032606U[j+5] + 9181961959U[j+6])).$$

## Список литературы (References)

- Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. — 636 с.  
Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. Chislennyye metody [Numerical methods]. — М.: Binom. Laboratorija znaniy, 2003 (in Russian).
- Годунов С. К. (ред).* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 401 с.  
Godunov S. K. (ed.) Chislennoe reshenie mnogomernyh zadach gazovoj dinamiki [Numerical solutions of multidimensional gas dynamics problems]. — М.: Nauka, 1976. — 401 с. (in Russian)
- Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.  
Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Second Edition, Updated, Revised and Extended. — Boca Raton—London—New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2012. — 1912 p. (Original Russian book: Zajcev V. F., Poljanin A. D. Spravochnik po nelinejnym differencial'nyim uravnenijam. — М.: FIZMATLIT, 2001.)
- Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.* О разностных уравнениях математической физики // УМН. — 1941. — № 8. — С. 125–160.  
Courant R., Friedrichs K. und Lewy H. Tiber die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Math. Annalen. — 1928. — Vol. 100. — P. 32–74.
- Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.* Some results on uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory schemes // Applied Numerical Mathematics. — 1986. — Vol. 2, Issue 3–5. — P. 347–377.
- Jiang G. S., Shu C. W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. — 1996. — 126 (1). — P. 202–228.
- Li G., Qiu J.* Hybrid WENO schemes with different indicators on curvilinear grids // Advances in Computational Mathematics. — 2010. — Vol. 40, No. 4. — P. 748–772.
- Macdonald C. B., Mohammad M., Ruuth S. J.* On the Linear Stability of the Fifth-Order WENO Discretization // Journal of Scientific Computing. — 2011. — Vol. 47, Issue 2. — P. 127–149.
- Shen Y. Q., Zha G. C.* A Robust Seventh-order WENO Scheme and Its Applications // AIAA-2008-0757. — 2008.
- Shu C. W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations. Lecture Notes in Mathematics. — 1998, Springer, Berlin, Heidelberg. — Vol. 1697. — P. 325–432.
- Spiteri R. J., Ruuth S. J.* A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — 40. — P. 469–491.
- Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. — Springer-Verlag, 1999. — 686 p.
- Wang R., Spiteri R. J.* Linear instability of the fifth-order WENO method // SIAM J. Numer. Anal. — 2007. — 45 (5). — P. 1871–1901.
- Yamaleev N. K., Carpenter M. H.* High-Order Energy Stable WENO Schemes // AIAA-2008-2876, 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference).